HAL
open science

FILTRES DE ŠOLC

Luc Dettwiller

To cite this version:

Luc Dettwiller. FILTRES DE ŠOLC. Le Bulletin de l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie, 2020. sfo-03003714

HAL Id: sfo-03003714

https://hal-sfo.ccsd.cnrs.fr/sfo-03003714

Submitted on 13 Nov 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Filtres de Šolc

par **Luc DETTWILLER**
Lycée Blaise Pascal - 63037 Clermont-Ferrand Cedex
luc. dettwiller@ac-clermont.fr

Les filtres de Šolc forment un sous-ensemble des filtres biréfringents, comme par ailleurs les filtres de Lyot. Tandis que ceux-ci sont constitués d'une suite de lames biréfringentes d'épaisseurs différentes, mais orientées de la même façon, avec un polariseur entre chacune d'elles plus un polariseur P à l'entrée et un autre A à la sortie, ceux de Šolc sont formés d'une suite de lames biréfringentes identiques, mais différemment orientées, placées entre P et A sans autre polariseur entre les lames. On étudie, par la méthode des matrices de Jones, les deux modèles classiques de filtres de Šolc. On obtient l'expression de leur facteur de transmission spectrale, en fonction de l'orientation de P et de A. On trace les courbes de transmission spectrale pour l'orientation optimale de P et A, puis on regarde l'effet de changements d'orientation. En termes d'évolution de la polarisation à l'intérieur du filtre, on propose une interprétation des propriétés constatées, et on corrobore celle-ci en étudiant l'ellipticité et l'orientation de la polarisation émergeant de la pile de lames. Les scripts Maple correspondants sont fournis.

INTRODUCTION

Pour les besoins de l'observation astronomique du Soleil, notamment la coronographie ou la réalisation de spectrohéliogrammes, on doit sélectionner une bande spectrale très étroite, de largeur 0,2 nm typiquement pour observer la couronne, et 0,05 nm pour observer le disque solaire. Dans ce but, Bernard Lyot conçut dès 1927 un filtre dit « biréfringent »(1) à bande passante très étroite [1], formé d'une suite de lames retardatrices successives, normales à l'axe Oz, induisant des déphasages qui sont en progression géométrique de raison 2 pour la lumière se propageant dans la direction de Oz (cf. figure 1, page ci-après) ; elles sont placées chacune entre deux polariseurs orientés à 45° des lignes neutres des lames, avec en plus un polariseur P à l'entrée et un autre A à la sortie. Son premier dispositif de ce type lui permettait d'isoler une bande spectrale de 0,1 nm, mais seulement dans le vert. Par la suite, Lyot perfectionna son invention,

(1) Mais il ne fut réalisé qu'en 1933, car Lyot a dû attendre plusieurs années avant d'obtenir un cristal de calcite – il y avait dans l'entre-deux guerres un embargo militaire des armées française, anglaise, allemande et soviétique sur ce matériau, car la figure d'interférences localisées à l'infini (croix de Malte) qu'il donne entre polariseur et analyseur servait de viseur pour la Défense Contre les Avions !

qui lui permit de prendre de remarquables photographies de la chromosphère solaire, des protubérances et de la couronne. En 1937 Yngve Öhman, qui ignorait les travaux de Lyot, réalisa un filtre basé sur le même principe et transmettant une bande spectrale de 4 nm centrée sur la raie Hα (656,3 nm).

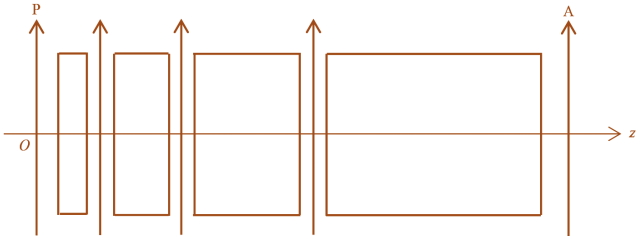


Figure 1 - Schéma de principe d'un filtre de Lyot à quatre lames ; chacune d'elles est placée entre deux polariseurs, le premier de tous étant P et le dernier A.

Un des inconvénients de ces premiers filtres biréfringents est la dépendance de leur courbe de transmission par rapport à la direction d'incidence : cet effet est sensible, puisque leur bande spectrale est voulue très fine. Pour atténuer cette dépendance et accroître le champ angulaire utile du filtre, Lyot a proposé en 1944 de remplacer les lames simples de son premier filtre par des lames composites spécialement étudiées ; il en a imaginé trois modèles [2].

Afin d'augmenter la luminosité en réduisant le nombre de polariseurs (et du même coup la lumière diffusée), John Evans a réalisé vers 1948 un filtre légèrement modifié, où entre deux polariseurs successifs il y a trois lames [3]. Le filtre d'Evans est aussi à grand champ, mais, par rapport à un filtre de Lyot équivalent, il utilise deux fois moins de polariseurs.

L'utilisation de filtres biréfringents s'est alors largement répandue dans les observatoires solaires : dans les années 1950, la société *Optique et précision de Levallois* a fabriqué vingt-cinq filtres de Lyot, de 65 pm de bande passante dans la raie Hα, afin d'équiper des observatoires dans le monde entier, et l'URSS en a produit aussi un grand nombre. Une bande passante encore plus fine (12 pm) avec un champ angulaire de 2,3° a été obtenue par Ronald Gordon Giovanelli qui a construit un filtre Hα combinant les éléments de Lyot et d'Evans, accordable sur ± 1,6 nm (par variation de température des lames de quartz entre 10 °C et 60 °C), afin d'étudier les conditions physiques de la chromosphère.

À partir de 1953, et avec un principe très différent, Ivan Šolc proposa d'autres filtres biréfringents aussi à bande passante étroite, mais plus simples à fabriquer [4-7] : ils sont constitués d'une suite de lames biréfringentes, identiques, mais différemment orientées, placées entre P et A sans autre polariseur entre les lames. Les premières

photographies obtenues par les collègues de Šolc suscitèrent tout de suite l'intérêt [6] : utilisant beaucoup moins de polariseurs que les filtres de Lyot, ceux de Šolc sont beaucoup plus lumineux. Leurs N lames biréfringentes jouent le rôle d'autant de lames retardatrices, toutes identiques, et normales à l'axe Oz du repère orthonormé direct $Oxyz$ associé à la base $(\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z})$; chacune produit un déphasage retard 2γ sur son axe lent par rapport à son axe rapide. Pour une normale aux ondes dans la direction de Oz, 2γ est égal à 2π multiplié par la différence des deux indices de réfraction de la lame (pour cette normale aux ondes) et par l'épaisseur de la lame, puis divisé par la longueur d'onde dans le vide.

Depuis, les filtres biréfringents ont fait l'objet d'un grand nombre de travaux, et leurs applications débordent largement le domaine de l'astronomie.

Il y a divers modèles de filtres de Šolc, qui diffèrent par la disposition relative des N lames retardatrices. Nous allons étudier les deux modèles classiques : le filtre de Šolc en éventail, et le filtre de Šolc replié.

Pour chacun d'eux, on considère l'effet de leur traversée par une lumière monochromatique se propageant dans le sens de Oz ; alors les lignes neutres (ou axes) à considérer pour toutes les lames sont parallèles au plan xOy. Afin d'obtenir l'expression du facteur de transmission spectrale du filtre, qui dépend de l'orientation de P et de A, on utilise le formalisme des matrices de Robert Clark Jones [7], *i.e.* des matrices de transfert d'une composante spectrale (proportionnelle à $e^{-i\omega t}$) du champ électrique transverse – donc en dimension 2. La disposition régulière des lames successives ramène l'essentiel du problème à l'expression de la puissance d'une matrice ; comme celle-ci est de déterminant 1 (si on néglige les pertes par réflexions partielles ainsi que par diffusion et par absorption au sein de chaque lame), le calcul de cette puissance de matrice se traite élégamment par un théorème de Sylvester, et on en déduit facilement l'expression du facteur de transmission spectrale en fonction du déphasage dû à chaque lame, mais aussi de l'orientation de P et A.

On trace des courbes de transmission spectrale pour le réglage optimal : P et A parallèles entre eux pour le filtre en éventail dont les lames extrêmes ont leurs axes lents presque orthogonaux ; P et A perpendiculaires entre eux pour le filtre replié. Puis on regarde l'effet de changements d'orientation de P et A, ce qui permet d'estimer la sensibilité du réglage optimal – c'est un paramètre important pour la question du tolérancement.

Enfin, pour rendre plus physique la compréhension du fonctionnement de ces filtres, on propose une discussion de l'évolution de la polarisation à l'intérieur du filtre, et on corrobore celle-ci en étudiant l'ellipticité et l'orientation de la polarisation émergeant de la pile de lames. Au passage, on note que quand le nombre de lames tend vers l'infini, la convergence de ces caractéristiques de la polarisation (en tant que fonctions de γ) n'est pas uniforme !

Les scripts *Maple* correspondant à toutes ces études numériques sont fournis en annexe 2, et permettent aux lecteurs qui le désirent de faire varier les différents paramètres et de se familiariser avec les propriétés de ces filtres dans tous les cas de figure.

1. FILTRE DE ŠOLC EN ÉVENTAIL

Dans ce modèle de filtre, l'angle (dans xOy, donc orienté) de Ox vers l'axe lent L_j de la lame retardatrice numéro j est $j\theta$, défini seulement modulo π (cf. figure 2).

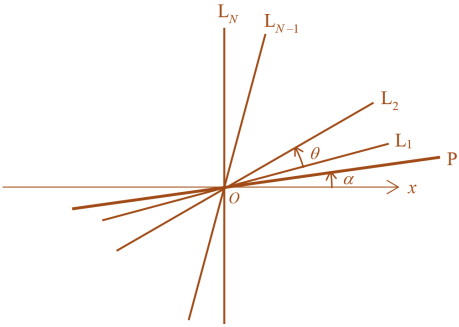


Figure 2 - Orientations des axes lents L_j des N lames du filtre en éventail et de l'axe du polariseur P ; dans la configuration usuelle, les axes du polariseur et de l'analyseur A sont parallèles ($\beta = \alpha$ mod. π), ce qui explique que A n'est pas représenté ici.

Ainsi la matrice de Jones de l'ensemble des lames du filtre de Šolc à lames en éventail s'écrit

$$[\mathbf{M}] = [\mathbf{R_N}]\,[\mathbf{D}]\,[\mathbf{R_{-N}}]\,[\mathbf{R_{N-1}}]\,[\mathbf{D}]\,[\mathbf{R_{-(N-1)}}]\ldots[\mathbf{R_1}]\,[\mathbf{D}]\,[\mathbf{R_{-1}}] = [\mathbf{R_N}]\left([\mathbf{D}]\,[\mathbf{R_{-1}}]\right)^N \quad (1)$$

où $[\mathbf{R_n}]$ est la matrice de rotation d'angle $n\theta$, même si n est négatif (donc, par exemple, $[\mathbf{R_{-1}}]$ est la matrice de rotation d'angle $-\theta$), et $[\mathbf{D}] = \begin{pmatrix} e^{i\gamma} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma} \end{pmatrix}$ est la matrice de Jones d'une lame (à un facteur multiplicatif près qui n'intervient pas dans l'étude des propriétés de la polarisation) dans la base orthonormée de son axe lent et de son axe rapide ; donc

$$[\mathbf{D}]\,[\mathbf{R_{-1}}] = \begin{pmatrix} e^{i\gamma} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\gamma}\cos\theta & e^{i\gamma}\sin\theta \\ -e^{-i\gamma}\sin\theta & e^{-i\gamma}\cos\theta \end{pmatrix} \quad (2)$$

est, comme $[\mathbf{R_n}]$ et $[\mathbf{D}]$, une matrice unimodulaire positive (*i.e.* de déterminant égal à + 1). On note sa demi-trace (réelle, de valeur absolue strictement inférieure à 1)

$$\cos\chi := \cos\gamma\cos\theta. \quad (3)$$

Or un théorème de Sylvester (qui se montre facilement par récurrence) dit que pour

une telle matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, sa puissance N s'écrit

$$\frac{1}{\sin\chi}\begin{pmatrix} \sin(N\chi)\, a_{11} - \sin\big((N-1)\,\chi\big) & \sin(N\chi)\, a_{12} \\ \sin(N\chi)\, a_{21} & \sin(N\chi)\, a_{22} - \sin\big((N-1)\,\chi\big) \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\big([\mathbf{D}]\,[\mathbf{R}_{-1}]\big)^N = \frac{1}{\sin\chi}\begin{pmatrix} \sin(N\chi)\, e^{i\gamma}\cos\theta - \sin\big((N-1)\,\chi\big) & \sin(N\chi)\, e^{i\gamma}\sin\theta \\ -\sin(N\chi)\, e^{-i\gamma}\sin\theta & \sin(N\chi)\, e^{-i\gamma}\cos\theta - \sin\big((N-1)\,\chi\big) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

En notant $E_0\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix} = E_0\,\mathbf{e}_{\boldsymbol{\alpha}}$ l'amplitude (réelle) du champ électrique de la lumière envoyée par le polariseur d'entrée sur la pile de lames, et $\mathbf{e}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix}$ – resp. $\mathbf{e}_{\boldsymbol{\beta}}$ – un vecteur unitaire dirigeant l'axe du polariseur P – resp. de l'analyseur A –, on peut exprimer le facteur de transmission spectral de l'ensemble sous la forme

$$T = |\tau|^2 \quad (5)$$

où (en négligeant les pertes par réflexion partielle et par absorption ou diffusion)

$$\begin{aligned}\tau &= \mathbf{e}_{\boldsymbol{\beta}}\cdot[\mathbf{M}]\,\mathbf{e}_{\boldsymbol{\alpha}} = [\mathbf{R}_{-\mathbf{N}}]\,\mathbf{e}_{\boldsymbol{\beta}}\cdot\big([\mathbf{D}]\,[\mathbf{R}_{-1}]\big)^N\mathbf{e}_{\boldsymbol{\alpha}} \\ &= \frac{1}{\sin\chi}\begin{pmatrix}\cos(\beta-N\theta) \\ \sin(\beta-N\theta)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \sin(N\chi)\, e^{i\gamma}\cos\theta - \sin\big((N-1)\chi\big) & \sin(N\chi)\, e^{i\gamma}\sin\theta \\ -\sin(N\chi)\, e^{-i\gamma}\sin\theta & \sin(N\chi)\, e^{-i\gamma}\cos\theta - \sin\big((N-1)\chi\big)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix}\end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}\tau\sin\chi = \sin(N\chi)\big[&\cos\big(\beta-\alpha-(N-1)\theta\big)\cos\gamma + i\cos\big(\beta+\alpha-(N+1)\theta\big)\sin\gamma\big] \\ &-\sin\big((N-1)\chi\big)\cos(\beta-\alpha-N\theta).\end{aligned} \quad (7)$$

On note que T est une fonction paire de γ, parce qu'en changeant γ en son opposé sans changer θ (ni α ni β) on peut néanmoins conserver la même valeur de χ – cf. la relation (3) – ou changer χ en son opposé, ce qui change $\sin\chi$, $\sin(N\chi)$ et $\sin\big((N-1)\chi\big)$ en leurs opposés, mais laisse T invariant.

Avec la disposition classique où $\alpha = \theta/2$, et si en plus $\beta = 0$, il vient, grâce aux expressions (3) et (7),

$$\tau = \frac{\sin(N\chi)}{\sin\chi}\Big[(\cos\gamma)\sin\Big(\Big(N+\frac{1}{2}\Big)\theta\Big)\sin\theta + i(\sin\gamma)\cos\Big(\Big(N+\frac{1}{2}\Big)\theta\Big)\Big] + \cos(N\chi)\cos\Big(\Big(N+\frac{1}{2}\Big)\theta\Big). \quad (8)$$

Enfin, si $\Big(N+\frac{1}{2}\Big)\theta = \frac{\pi}{2} + m\pi \quad (m\in\mathbf{Z})$ on a d'après (3) et (8)

$$\tau = (-1)^m\frac{\sin(N\chi)}{\sin\chi}\cos\gamma\sin\theta = (-1)^m\frac{\sin(N\chi)}{\sin\chi}\cos\chi\tan\theta \quad (9)$$

d'où

$$T = \left[\frac{\tan\theta}{\tan\chi}\sin(N\chi)\right]^2. \quad (10)$$

Mais si $\alpha = \theta/2 = \beta$ il vient, grâce à l'expression (7),

$$\tau\sin\chi = \sin(N\chi)\big[\cos\big((N-1)\,\theta\big)\cos\gamma + i\cos(N\theta)\sin\gamma\big] - \sin\big((N-1)\chi\big)\cos(N\theta) \quad (11)$$

et si en plus $N\theta = \frac{\pi}{2} + m\pi \quad (m\in\mathbf{Z})$ on arrive aux mêmes expressions (9)-(10), ce qui est en accord avec l'expression (10) de [8]. À θ fixé, quand γ varie de $0\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$

à $\pi \pmod{2\pi}$, alors χ varie de $\theta \pmod{2\pi}$ par exemple à $\pi - \theta \pmod{2\pi}$, et pour ces deux bornes T vaut, dans les deux cas précédents respectivement, $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ si $\beta = 0$ ou 1 si $\beta = \theta/2$ – ce qui est évident puisque pour $\gamma = 0 \pmod{\pi}$ les lames n'ont aucune action sur la polarisation donc quand $\alpha = \beta$, pour ces valeurs de γ on atteint le maximum absolu $T = 1$, comme dans le cas des différents ordres de diffraction d'un réseau de traits infiniment fins. On relève cependant une légère différence par rapport à ce cas des réseaux idéalisés : les valeurs de γ (contrairement à celles de χ) correspondant aux annulations ou aux pics de T ne forment pas rigoureusement une suite arithmétique. Plus notable, toujours à $\beta = \theta/2$ fixé : quand, à partir de la situation initiale où $\gamma = 0$ par exemple, $N\chi$ augmente de $j\pi = j\frac{2N}{2m+1}\theta$, alors $|\tan\theta \sin(N\chi)|$ n'est pas changé, mais la valeur de χ passe de sa valeur initiale θ à $\theta + \frac{j\pi}{N} = \left(1 + j\frac{2}{2m+1}\right)\theta$, donc pour $|j| \ll N$ avec $N \gg 1$ la valeur de $\tan\chi$ est quasiment multipliée par $\left(1 + j\frac{2}{2m+1}\right)$ et donc d'après l'expression (10) ***les valeurs relatives des maxima secondaires n° j de T sont quasiment*** $\left(1 + |j|\frac{2}{2m+1}\right)^{-2}$ ***; ils sont d'autant moins gênants que*** $|m|$ ***est petit*** *(cf. figure 3)*, ***alors on prend*** $m = 0$ ***et ainsi le premier maximum secondaire*** $(|j| = 1)$ ***est environ à*** $(1+2)^{-2} \cong 11\,\%$ ***d'un maximum principal*** *(cf. figure 3)*, ***ce qui est plus gênant que les traditionnels 4 % – i.e. la valeur relative du premier maximum secondaire des réseaux classiques !***

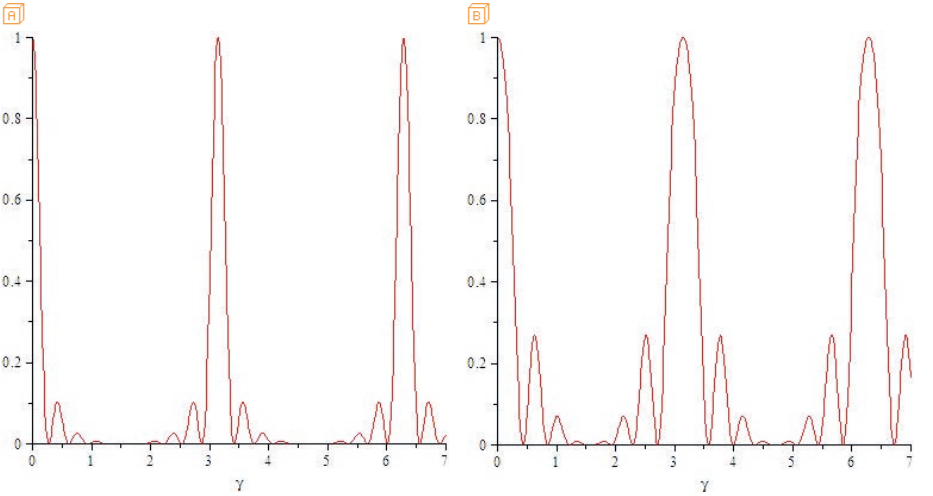


Figure 3 - Graphe de $T(\gamma)$ d'un filtre en éventail dans le cas où $N = 10$, $\alpha = \theta/2 = \beta$, $N\theta = \frac{\pi}{2} + m\pi$, avec A $m = 0$ et B $m = 1$. L'intérêt des graphes de $T(\gamma)$ est leur quasi-similarité avec les courbes de transmission spectrale du filtre en fonction de la fréquence ν (ou du nombre d'onde), car si la dispersion est négligeable γ est proportionnel à ν.

Une apodisation sera donc bienvenue. Circonstance aggravante : une petite rotation égale du polariseur et de l'analyseur renforce les maxima secondaires (cf. figure 4).

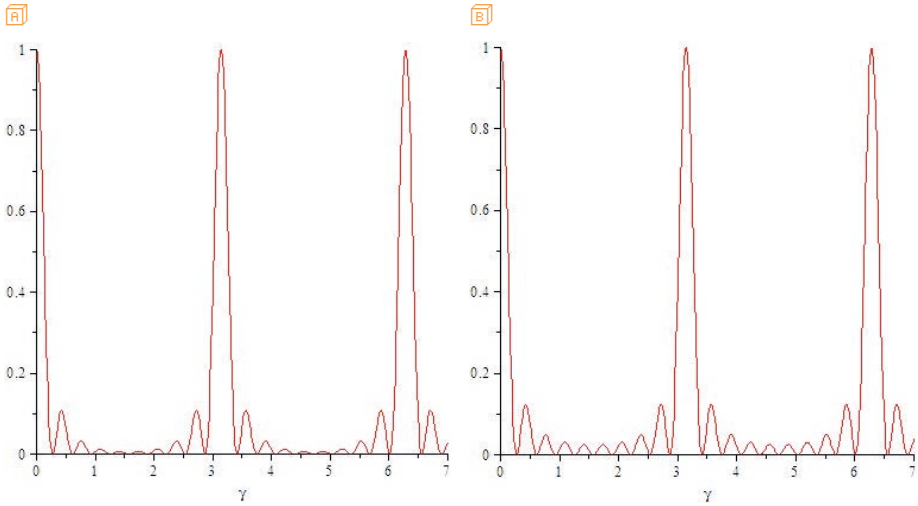


Figure 4 - Graphe de $T(\gamma)$ déduit de l'expression (7) dans le cas où $N\theta = \frac{\pi}{2} + m\pi$, $N = 10$, $m = 0$ avec A $\alpha = \theta/4 = \beta$ et B $\alpha = 0 = \beta$; on voit que les maxima secondaires au milieu entre deux maxima principaux sont plus forts en B qu'en A.

Une rotation du polariseur (ou de l'analyseur) seul (cf. figure 5) n'est malheureusement pas le moyen de décaler finement les pics de transmission du filtre ; cette

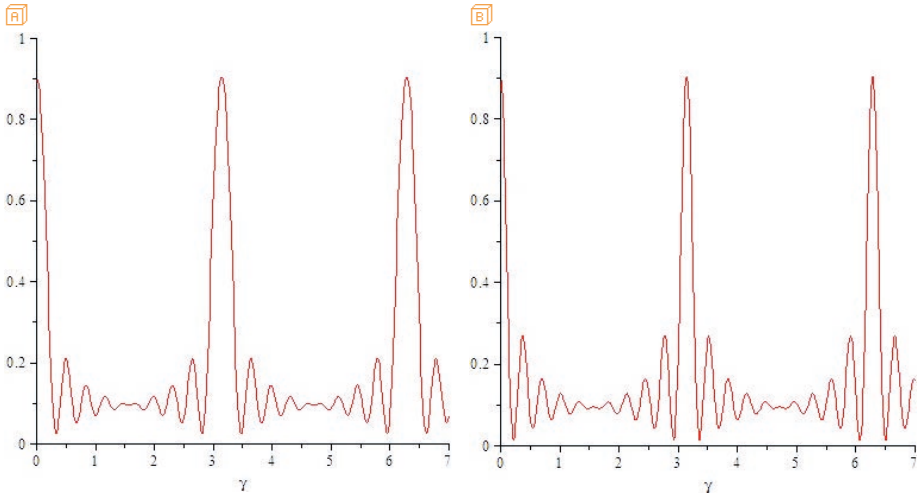


Figure 5 - Graphe de $T(\gamma)$ dans le cas d'un filtre en éventail où $N\theta = \frac{\pi}{2} + m\pi$, $N = 10$, $m = 0$ avec A $(\alpha, \beta) = \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{10}, \frac{\theta}{2}\right)$ et B $(\alpha, \beta) = \left(\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{10}\right)$.

rotation est néfaste, car elle rend les minima non nuls et augmente la transmission dans les maxima secondaires.

Interprétation

Une analogie éclairante existe entre les filtres de Šolc en éventail, et les afficheurs à cristaux liquides nématiques torsadés. Dans ceux-ci, l'axe optique du cristal tourne régulièrement à raison d'un tour par pas sur toute l'épaisseur du cristal, qui est alors un milieu inhomogène ; par rapport au filtre de Šolc en éventail, c'est donc le passage au continu, *i.e.* à la limite où θ et γ tendent vers 0 tandis que N tend vers l'infini, à $N\theta$ et $N\gamma$ fixés.

Dans une étude de ces afficheurs, nous avons montré [9] que dans l'approximation BKW la sphère de Poincaré permet de voir géométriquement l'évolution de la polarisation dans un tel milieu inhomogène biréfringent. Pour $N \gg 1$ et $\left|\alpha - \frac{\theta}{2}\right|$ de l'ordre de θ ou moins, l'analogie indiquée ci-dessus nous permet d'avancer l'interprétation approximative que voici, pour la finesse des pics de transmission de ce filtre, et le relèvement des minima locaux de transmission quand le polariseur et l'analyseur ne sont plus parallèles : dès que $\gamma \pmod{\pi}$ est de l'ordre de quelques θ ou plus, d'une lame à la suivante la polarisation garde encore une ellipticité ε très faible (dont le calcul est détaillé dans l'annexe 1) et donc reste quasiment rectiligne (cf. figure 6). On s'attendrait

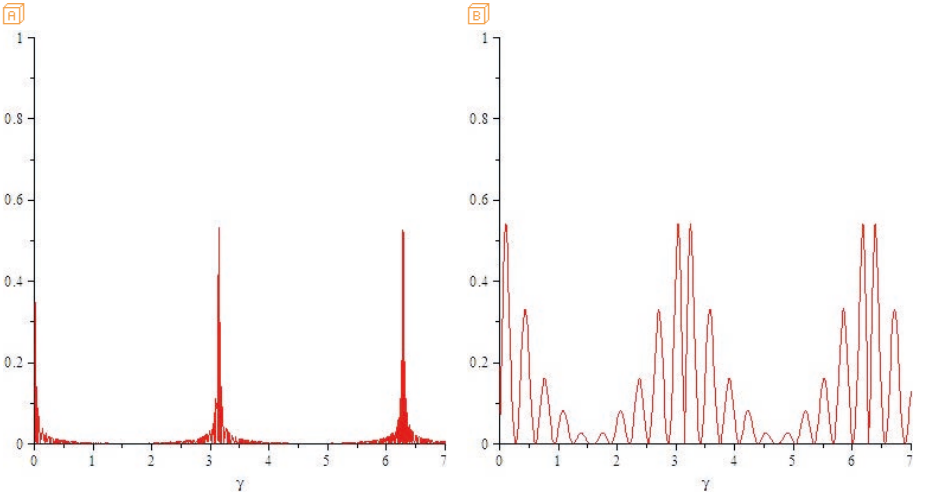


Figure 6 - Graphe de $\varepsilon(\gamma)$ dans le cas d'un filtre en éventail où $\alpha = \theta/2 = \beta$ et $N\theta = \pi/2$, avec A $N = 300$ et B $N = 10$. Bien sûr, l'ellipticité est nulle entre autres quand $\gamma = 0 \pmod{\pi}$, car aucune lame n'agit sur la polarisation, ou quand $\gamma = \pi/2 \pmod{\pi}$, car dans ce cas chaque lame est demi-onde (donc transforme la polarisation rectiligne incidente en une polarisation rectiligne d'orientation différente) ; notons que les maxima absolus d'ellipticité se produisent quand $\gamma \cong \pm\theta \pmod{\pi}$ et semblent valoir environ 0,5 quel que soit $N \gg 1$.

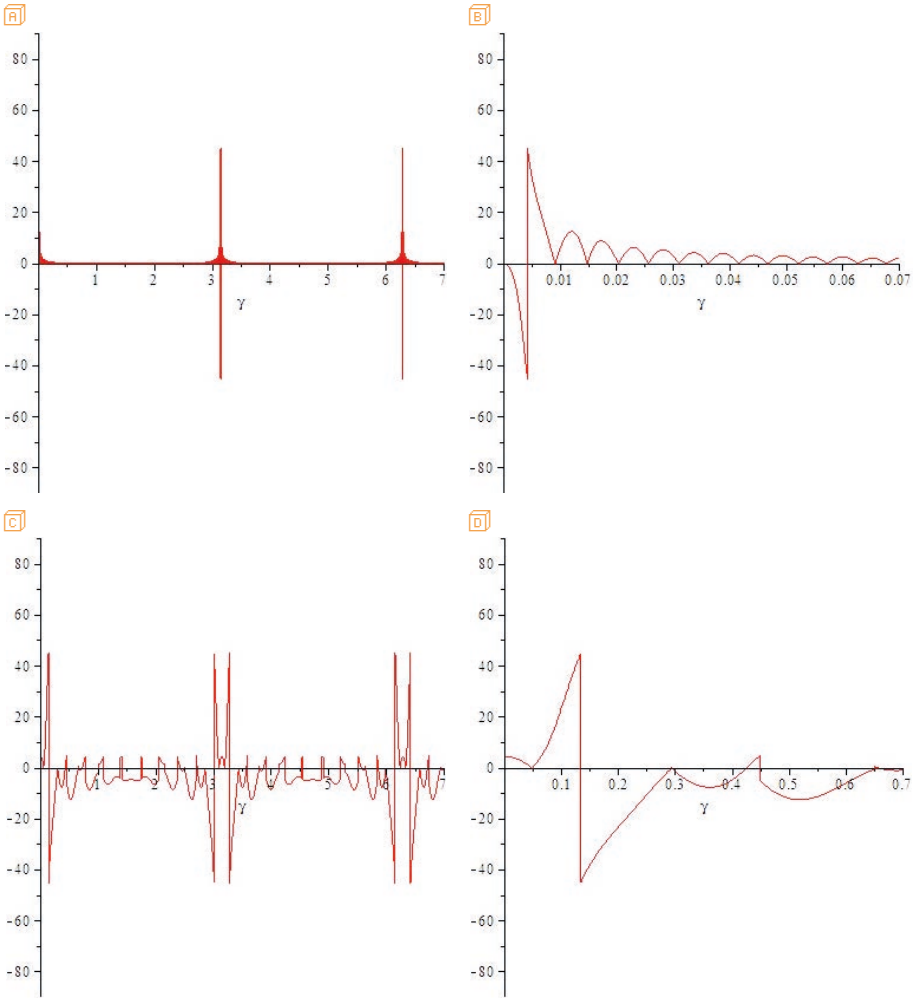


Figure 7 - Graphe, en fonction de γ, de l'azimut (en degrés par rapport à la direction de Ox) des axes de la polarisation émergeant de la pile de lames d'un filtre en éventail où $\alpha = \theta/2 = \beta$ et $N\theta = \pi/2$, avec A B $N = 300$ (et en B un zoom d'un facteur 100 en abscisse), puis C D $N = 10$ (et en D un zoom d'un facteur 10 en abscisse). Dans ce cas-ci, on voit bien que pour $\gamma = 0 \pmod{\pi}$ l'azimut du grand axe part comme prévu de $\alpha = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2N} = 4,5°$, puis atteint très rapidement $\pm 45°$ où le graphe commute à chaque fois et donne l'azimut de l'autre axe, mais pour la suite on confirme que jusqu'à ce que γ soit de nouveau très proche de $\pi \pmod{\pi}$ l'azimut du petit axe est faible – d'où une polarisation émergente presque croisée avec l'analyseur.

à ce que, quand N tend vers l'infini, ε tende vers 0 ; c'est vrai, mais la convergence n'est pas uniforme, elle est seulement simple (cf. figure 6, pages précédentes, et l'annexe 1).

La polarisation émergente tourne presque autant que les lignes neutres successives des lames, donc d'environ $N\theta = \frac{\pi}{2} + m\pi$ au total, alors à la sortie de la pile de lames la polarisation est quasiment croisée avec l'analyseur (qui est parallèle au polariseur) – et le calcul numérique de l'azimut des grand et petit axes de la polarisation émergeant de la pile de lames (cf. figure 7, page précédente, et annexe 2) confirme notre interprétation.

Évidemment, tout cela devient nettement faux dès que $\left|\alpha - \frac{\theta}{2}\right|$ est grand devant θ.

Donc si $N\theta$ est fixé, plus $N \gg 1$ est grand, plus θ est petit, et l'ellipticité faible si $\gamma \pmod{\pi}$ est fixé à plus que quelques θ ; plus les pics sont fins aussi. Par exemple (cf. figure 8A) $(\alpha, \beta) = \left(\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{10}\right)$ donne des pics de transmission à $\cos^2 \frac{\pi}{10} \cong 0,90$, et pour $N\theta = \frac{\pi}{2}$ avec $N = 300$, dès que $\gamma \pmod{\pi}$ est de l'ordre de $\pi/100$ ou plus, la polarisation émergeant de la pile de lames est quasi rectiligne orientée à $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}$ de l'axe de l'analyseur, donc $T \cong \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) \cong 0,10$ quel que soit γ. Si (cf. figure 8B) $(\alpha, \beta) = \left(\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}\right)$ de nouveau, on retrouve des pics de transmission à 1 ; et pour $N\theta = \frac{\pi}{4}$ avec $N = 300$, dès que $\gamma \pmod{\pi}$ est de l'ordre de $\pi/100$ ou plus, la polarisation émergeant de la pile de lames est quasi rectiligne orientée à $\frac{\pi}{4}$ de l'axe de l'analyseur, donc $T \cong \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ quel que soit γ.

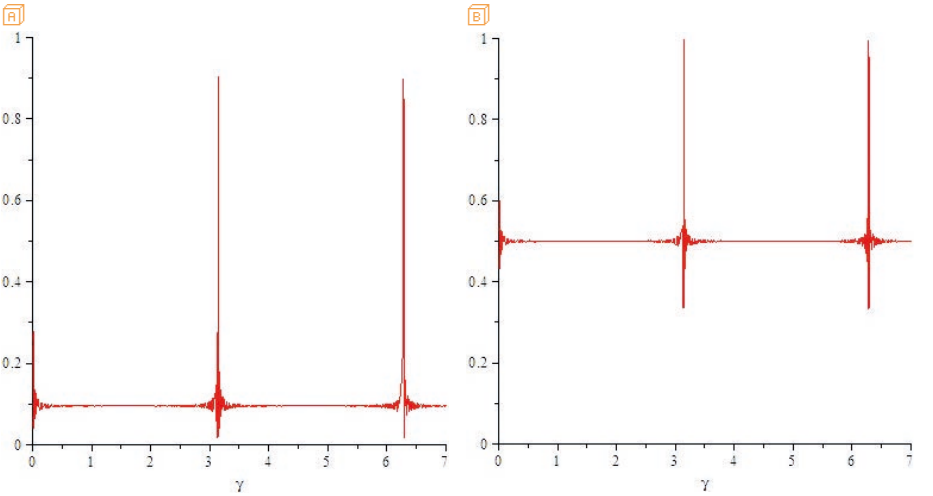


Figure 8 - Graphe de $T(\gamma)$ dans le cas d'un filtre en éventail où $N = 300$, avec A $(\alpha, \beta) = \left(\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{10}\right)$ et $N\theta = \frac{\pi}{2}$, B $(\alpha, \beta) = \left(\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}\right)$ et $N\theta = \frac{\pi}{4}$.

2. FILTRE DE ŠOLC REPLIÉ, À NOMBRE PAIR DE LAMES

Dans ce modèle de filtre, l'angle (défini seulement modulo π) de Ox vers l'axe lent de la lame retardatrice numéro j est $(-1)^{j-1}\,\theta/2$; les orientations des lames successives sont donc alternées, car successivement symétriques par rapport à Ox (cf. figure 9), d'où l'appellation de « filtre de Šolc replié ».

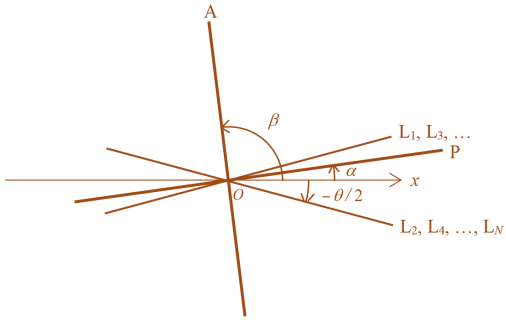


Figure 9 - Orientations des axes lents L_j des N lames du filtre replié, de l'axe du polariseur P et de l'analyseur A.

Pour l'ensemble L_1 et L_2, vu leurs orientations précisées ci-dessus, leurs matrices de Jones s'écrivent $[\mathbf{R}_{1/2}]\,[\mathbf{D}]\,[\mathbf{R}_{-1/2}]$ et $[\mathbf{R}_{-1/2}]\,[\mathbf{D}]\,[\mathbf{R}_{1/2}]$ respectivement, donc pour l'ensemble L_1-L_2, sa matrice de Jones s'écrit

$$\left([\mathbf{R}_{-1/2}]\,[\mathbf{D}]\,[\mathbf{R}_{1/2}]\right)\left([\mathbf{R}_{1/2}]\,[\mathbf{D}]\,[\mathbf{R}_{-1/2}]\right) = [\mathbf{R}_{-1/2}]\,[\mathbf{D}]\,[\mathbf{R}_{1}]\,[\mathbf{D}]\,[\mathbf{R}_{-1/2}] \tag{12}$$

et celle de l'ensemble du filtre de Šolc replié, à nombre pair $N = 2\,Q$ de lames, est

$$[\mathbf{M}] = \left[\left([\mathbf{R}_{-1/2}]\,[\mathbf{D}]\,[\mathbf{R}_{1/2}]\right)\left([\mathbf{R}_{1/2}]\,[\mathbf{D}]\,[\mathbf{R}_{-1/2}]\right)\right]^{Q} = \left([\mathbf{R}_{-1/2}]\,[\mathbf{D}]\,[\mathbf{R}_{1}]\,[\mathbf{D}]\,[\mathbf{R}_{-1/2}]\right)^{Q}. \tag{13}$$

Le calcul donne, par analogie avec la relation (2),

$$[\mathbf{D}]\,[\mathbf{R}_1]\,[\mathbf{D}] = \begin{pmatrix} e^{i\gamma}\cos\theta & -e^{i\gamma}\sin\theta \\ e^{-i\gamma}\sin\theta & e^{-i\gamma}\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\gamma} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i2\gamma}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & e^{-i2\gamma}\cos\theta \end{pmatrix} \tag{14}$$

puis

$$\begin{aligned}[\mathbf{D}]\,[\mathbf{R}_1]\,[\mathbf{D}]\,[\mathbf{R}_{-1/2}] &= \begin{pmatrix} e^{i2\gamma}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & e^{-i2\gamma}\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2 \\ -\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta/2)\,e^{i2\gamma} + \sin(\theta)\sin(\theta/2) & \sin(\theta/2)\cos(\theta)\,e^{i2\gamma} - \sin(\theta)\cos(\theta/2) \\ \sin(\theta)\cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)\cos(\theta)\,e^{-i2\gamma} & \cos(\theta)\cos(\theta/2)\,e^{-i2\gamma} + \sin(\theta)\sin(\theta/2) \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{15}$$

d'où

$$\begin{aligned}&[\mathbf{R}_{-1/2}]\,[\mathbf{D}]\,[\mathbf{R}_1]\,[\mathbf{D}]\,[\mathbf{R}_{-1/2}] = \\ &\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta\cos(\theta/2)\,e^{i2\gamma} + \sin\theta\sin(\theta/2) & \sin(\theta/2)\cos\theta\,e^{i2\gamma} - \sin\theta\cos(\theta/2) \\ \sin\theta\cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)\cos\theta\,e^{-i2\gamma} & \cos\theta\cos(\theta/2)\,e^{-2i\gamma} + \sin\theta\sin(\theta/2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left[e^{i2\gamma}\cos^2(\theta/2) - e^{-i2\gamma}\sin^2(\theta/2)\right]\cos\theta + \sin^2\theta & -\left[1-\cos(2\gamma)\right]\sin\theta\cos\theta \\ \left[1-\cos(2\gamma)\right]\sin\theta\cos\theta & \left[e^{-i2\gamma}\cos^2(\theta/2) - e^{i2\gamma}\sin^2(\theta/2)\right]\cos\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{16}$$

et enfin

$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} 1 - 2\cos^2\theta\sin^2\gamma + i\cos\theta\sin(2\gamma) & -\sin(2\theta)\sin^2\gamma \\ \sin(2\theta)\sin^2\gamma & 1 - 2\cos^2\theta\sin^2\gamma - i\cos\theta\sin(2\gamma) \end{pmatrix}^Q \tag{17}$$

qui est encore une matrice unimodulaire positive. On note sa demi-trace (de valeur absolue inférieure à 1)

$$\cos(2\kappa) := 1 - 2\cos^2\theta\sin^2\gamma \tag{18}$$

d'où

$$\sin^2\kappa = \cos^2\theta\sin^2\gamma \tag{19}$$

et le même théorème de Sylvester que celui utilisé au début du paragraphe 1 donne

$$\sin(2\kappa)\,[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} \sin(2Q\kappa)\left[\cos(2\kappa) + i\cos\theta\sin(2\gamma)\right] - \sin\left(2(Q-1)\kappa\right) & -\sin(2Q\kappa)\sin(2\theta)\sin^2\gamma \\ \sin(2Q\kappa)\sin(2\theta)\sin^2\gamma & \sin(2Q\kappa)\left[\cos(2\kappa) - i\cos\theta\sin(2\gamma)\right] - \sin\left(2(Q-1)\kappa\right) \end{pmatrix} \tag{20}$$

On en tire $\tau = \mathbf{e}_\beta \cdot [\mathbf{M}]\,\mathbf{e}_\alpha$ donc

$$\begin{aligned} \tau\sin(2\kappa) &= \left\{\sin(N\kappa)\left[\cos(2\kappa) + i\cos\theta\sin(2\gamma)\right] - \sin\left((N-2)\kappa\right)\right\}\cos\alpha\cos\beta \\ &\quad + \sin(N\kappa)\sin(2\theta)\sin^2\gamma\,(\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta) \\ &\quad + \left\{\sin(N\kappa)\left[\cos(2\kappa) - i\cos\theta\sin(2\gamma)\right] - \sin\left((N-2)\kappa\right)\right\}\sin\alpha\sin\beta \\ &= \left\{\sin(N\kappa)\cos(2\kappa) - \sin\left((N-2)\kappa\right)\right\}\cos(\beta-\alpha) + \sin(N\kappa)\sin(2\theta)\sin^2\gamma\sin(\beta-\alpha) \\ &\quad + i\sin(N\kappa)\cos\theta\sin(2\gamma)\cos(\beta+\alpha). \end{aligned} \tag{21}$$

On note que T est encore une fonction paire de γ, donc pour le calculer on peut prendre arbitrairement

$$\sin\kappa = \cos\theta\sin\gamma. \tag{22}$$

Pour $\alpha = 0$ et $\beta = \pi/2$ il vient

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\sin(N\kappa)}{\sin(2\kappa)}\sin(2\theta)\sin^2\gamma = \frac{\sin(N\kappa)}{\sin\kappa\cos\kappa}\sin\theta\cos\theta\sin^2\gamma \\ &= \frac{\sin(N\kappa)}{\cos\theta\sin\gamma\cos\kappa}\sin\theta\sin\kappa\sin\gamma \end{aligned} \tag{23}$$

et

$$T = \left[\frac{\tan\theta}{\cot\kappa}\sin(N\kappa)\right]^2. \tag{24}$$

La comparaison entre les relations (3) *et* (10) *d'une part,* (22) *et* (24) *d'autre part, est intéressante : on passe des propriétés des filtres de Šolc de type éventail – avec* $N\theta = \frac{\pi}{2} + m\pi$ *– à ceux repliés avec* N *pair, pour les valeurs de* α *et* β *spécifiées ci-dessus dans chaque cas, par changement de* γ *en* $\frac{\pi}{2} + \gamma$*, et de* χ *en* $\frac{\pi}{2} + \chi$ *avec* χ *qui correspond alors à* κ*. Donc moyennant une translation horizontale de* $\pi/2$*, les similitudes entre les figures 3 et 10 (cf. page ci-contre) illustrent parfaitement cette correspondance.*

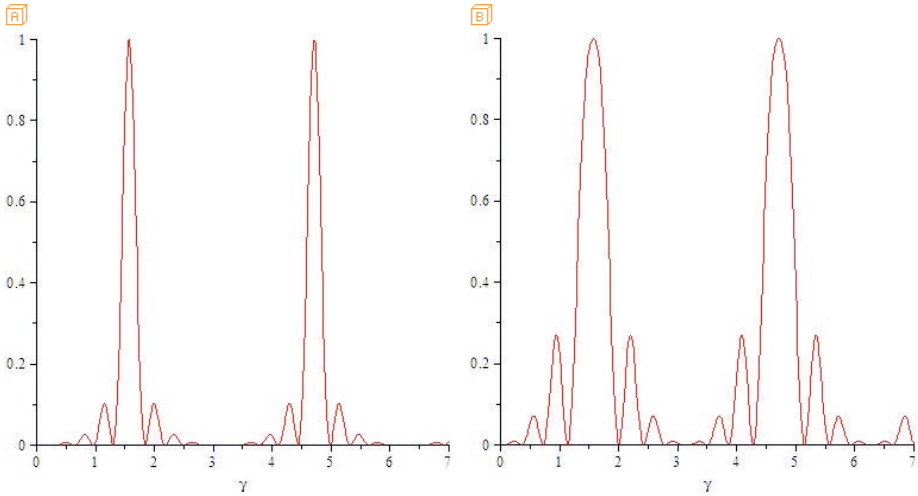


Figure 10 - Graphe de $T(\gamma)$ dans le cas d'un filtre replié où $Q=5$, $N\theta=\frac{\pi}{2}+m\pi$, $\alpha=0$ et $\beta=\pi/2$ – donc le polariseur et l'analyseur sont croisés, alors pour $\gamma=0\,(\mathrm{mod}\,\pi)$ on a $T=0$ évidemment ; A $m=0$ et B $m=1$. La correspondance indiquée ci-dessus avec les filtres de Šolc en éventail est évidente – voir la figure 3.

Une petite rotation égale du polariseur et de l'analyseur renforce les maxima secondaires (cf. figure 11).

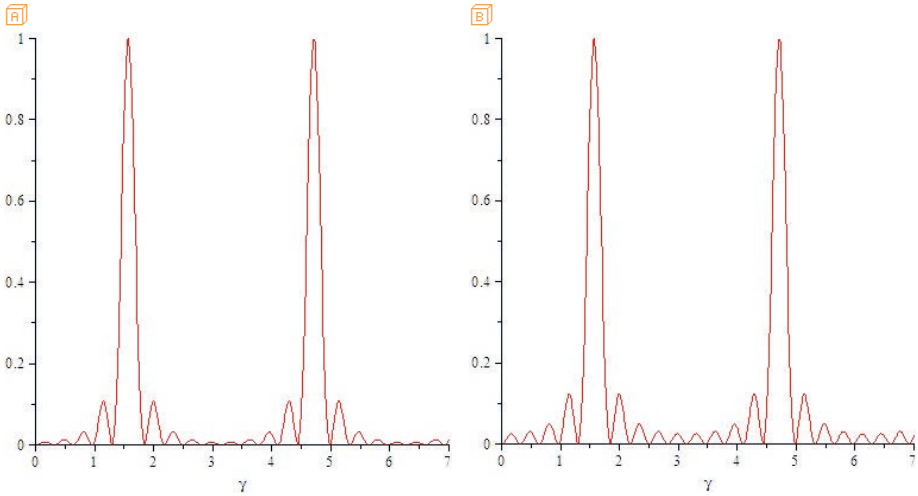


Figure 11 - Graphe de $T(\gamma)$ dans le cas d'un filtre replié où $Q=5$, $N\theta=\frac{\pi}{2}$, avec A $\alpha=\frac{\theta}{4}$ et $\beta=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{4}$, B $\alpha=\frac{\theta}{2}$ et $\beta=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}$; on voit que les maxima secondaires au milieu entre deux maxima principaux sont plus forts en B qu'en A.

Malheureusement, une rotation du polariseur (ou de l'analyseur) seul (voir la figure 12, qui se déduit de la figure 5 par translation horizontale de $\pi/2$) n'est toujours pas le moyen de décaler finement les pics de transmission du filtre ; elle a les mêmes effets nuisibles que pour le filtre en éventail.

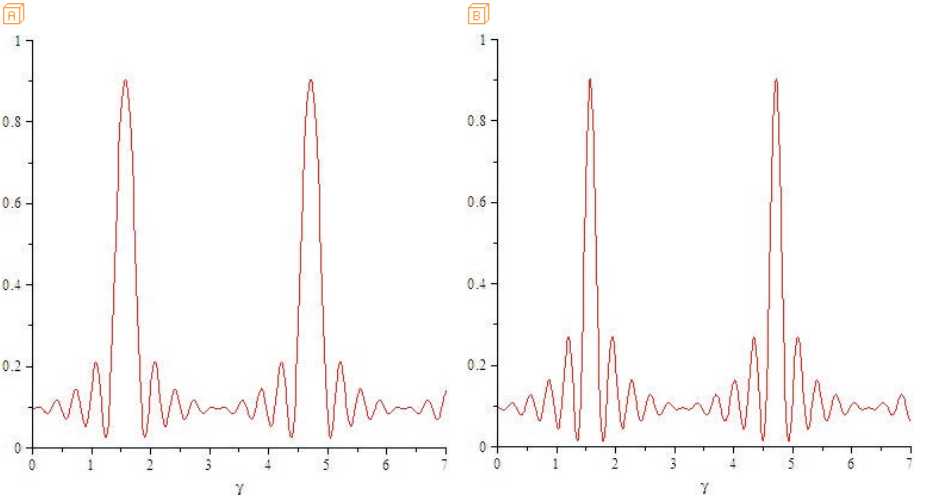


Figure 12 - Graphe de $T(\gamma)$ dans le cas d'un filtre replié où $Q = 5$, $N\theta = \frac{\pi}{2}$, avec A $(\alpha, \beta) = \left(\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}\right)$ et B $(\alpha, \beta) = \left(0, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right)$.

Interprétation

Dans le cas particulier où $\gamma = \pi/2 \pmod{\pi}$, chaque lame est demi-onde donc change la polarisation incidente sur elle en sa symétrique par rapport à l'une quelconque des lignes neutres de la lame, et comme l'angle entre les lignes neutres correspondantes de deux lames voisines est θ, chaque paire de ces lames produit une rotation de -2θ pour la polarisation qui la traverse ; l'effet de la pile de lames sur la polarisation est donc une rotation de $Q \times -2\theta = -N\theta$. Quand l'écart entre γ et $\pi/2 \pmod{\pi}$ est de l'ordre de θ au maximum, la pile de lames peut donner une polarisation elliptique légèrement mieux transmise par l'analyseur que la polarisation rectiligne précédente (cf. figure 13, page ci-contre). Mais dès que l'écart entre γ et $\pi/2 \pmod{\pi}$ est d'un ordre supérieur à θ, les polarisations émergeant des paires successives de lames ont des ellipticités de l'ordre de θ s'il est petit, et leurs orientations restent toujours voisines de celle de la polarisation incidente sur la pile de lames. Donc si $N\theta$ est fixé, plus N est grand, plus les pics de transmission à environ $\cos^2(\beta - \alpha + N\theta)$ pour γ voisin de $\pi/2 \pmod{\pi}$ sont fins, et pour les autres valeurs de γ la transmission est quasi constante proche de $\cos^2(\beta - \alpha)$ (cf. figure 13, page ci-contre).

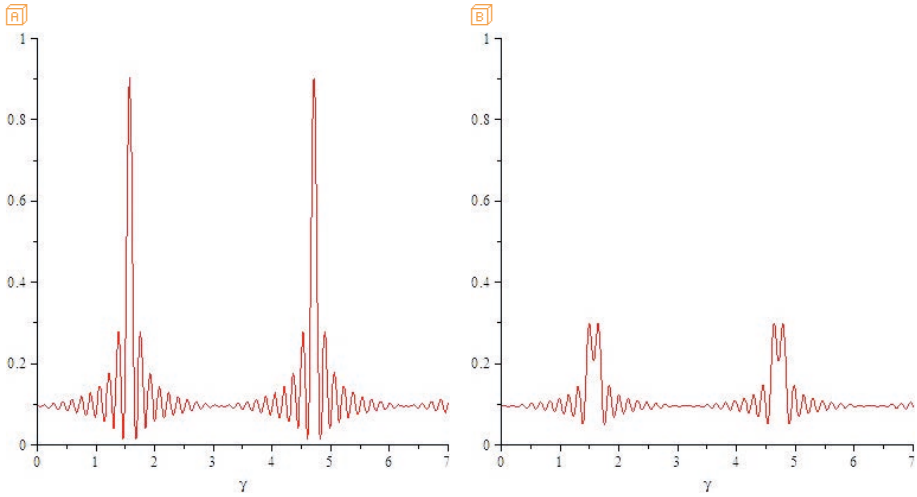


Figure 13 - Graphe de $T(\gamma)$ dans le cas d'un filtre replié où $N = 20$, avec A $(\alpha, \beta) = \left(0, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right)$ et $N\theta = \frac{\pi}{2}$ d'où des pics de transmission à $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{2}\right) \cong 0,90$ et sinon $T \cong \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) \cong 0,10$ presque partout, B $(\alpha, \beta) = \left(\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}\right)$ et $N\theta = \frac{\pi}{4}$ d'où des pics de transmission contenant la valeur $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{4}\right) \cong 0,21$ (qui n'est pas leur maximum) et sinon $T \cong \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) \cong 0,10$ presque partout.

On voit qu'avec ces modèles de filtres, la seule solution pour ajuster la fréquence des pics de transmission est de changer le rapport entre γ et la fréquence, par exemple en jouant sur l'inclinaison ou sur la largeur ou la biréfringence des lames par le biais de la température, ou de la biréfringence de contrainte, ou d'un effet électro-optique, etc. ; mais des changements extérieurs aux lames ne changent quasiment pas les fréquences des pics.

Un filtre de Šolc replié peut fonctionner aussi avec un nombre impair N de lames ; pour N grand on doit donc s'attendre, grâce à notre interprétation, à des courbes similaires à celles de la figure 10 si on prend $N\theta \cong \frac{\pi}{2} + m\pi$, $\alpha = 0$ et $\beta = \pi/2$.

CONCLUSION

Ainsi que le montrent les figures 3-4 et 10-11, un inconvénient des filtres de Šolc réside dans les maxima secondaires, qui bordent les pics des courbes de transmission. Ils sont plus importants que ceux donnés par un filtre de Lyot ; une apodisation est donc bienvenue. Šolc a trouvé une disposition des lames qui la réalise [10-11] : celle où l'angle (défini modulo π) de Ox vers l'axe lent de la lame retardatrice numéro

j est $\theta_j := (-1)^{j-1}\left[\frac{\theta}{2} + (j-1)\,\eta\right]$ si $j \in [1, Q]$ et $\theta_j := (-1)^{j-1}\left[\frac{\theta}{2} + (2Q-j)\,\eta\right]$ si $j \in [Q+1, 2Q]$, θ et η étant de même signe et appartenant à $]-\pi/2, \pi/2[$. D'autres dispositions ont été élégamment trouvées par Fredga et Högbom [12].

Les filtres de Šolc peuvent ainsi concurrencer avantageusement celui de Lyot, d'autant que ceux-là sont plus lumineux qu'un filtre de Lyot ayant même bande passante ; cependant, le champ angulaire utile du filtre de Šolc est plus étroit.

Grâce à l'élément accordable de Title et Rosenberg, ou à des dispositifs électro-optiques, on sait rendre accordables ces divers filtres sans jouer sur leur température.

En outre, ces filtres initialement destinés à l'astronomie ont trouvé d'autres applications, par exemple dans les cavités des lasers à colorants, dans les systèmes de télécommunications optiques, etc.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Lyot, « Un monochromateur à grand champ utilisant les interférences en lumière polarisée [Wide field monochromator using polarized light interference] », *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, **197**, p. 1593-1595, 1933.

[2] B. Lyot, « Filtre monochromatique polarisant et ses applications en physique solaire », *Ann. Astrophys. (Paris)*, **7**, p. 31-79, 1944.

[3] J. W. Evans, "The Birefringent Filter", *J. Opt. Soc. Am.*, **39**, p. 229-242, 1949.

[4] I. Šolc, "Novy typ dvojljmneho filtru", *Česk. Časopis. Fys.*, **3**, p. 366-376, 1953.

[5] I. Šolc, "Koincidencni dvojlomny filtru", *Česk. Časopis. Fys.*, **4**, p. 607-608, 1954.

[6] K. Hermann-Otavský, "Československý dvojlomný monochromátor", *Říše hvězd*, **37**, p. 4-7, 1956.

[7] R. C. Jones, "A New Calculus for the Treatment of Optical Systems – I. Description and Discussion of the Calculus", *J. Opt. Soc. Am.*, **31**, p. 488-493, 1941;

[8] J. W. Evans, "Solc Birefringent Filter", *J. Opt. Soc. Am.*, **48**, p. 142-145, 1958.

[9] L. Dettwiller, « Comparaison de théories sur les afficheurs à cristaux liquides », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 112, n° 1009, p. 1291-1302, décembre 2018.

[10] I. Šolc, "Retezove dvojlomne filtry", *Česk. Časopis. Fys.*, **10**, p. 16-34, 1960.

[11] I. Šolc, "Birefringent Chain Filters", *J. Opt. Soc. Am.*, **55**, p. 621-625, 1965.

[12] K. Fredga et J. A. Högbom, "A versatile birefringent filter", *Solar Phys.*, **20**, p. 204-227, 1971.

Annexe 1

Étude de l'ellipticité de la polarisation émergeant de la pile de lames du filtre en éventail

D'après la relation (1), cette pile de lames a pour matrice de Jones $[\mathbf{M}] = [\mathbf{R_N}]\left([\mathbf{D}]\,[\mathbf{R}_{-1}]\right)^N$. Comme une rotation ne change pas l'ellipticité ε, celle-ci est donc la même que celle de la polarisation parfaite caractérisée par le vecteur de Jones (avec E_0 réel)

$$\left([\mathbf{D}]\,[\mathbf{R}_{-1}]\right)^N E_0\mathbf{e}_{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{E_0}{\sin\chi}\begin{pmatrix}\left[\sin(N\chi)\,e^{i\gamma}\cos\theta-\sin\left((N-1)\chi\right)\right]\cos\alpha+\left[\sin(N\chi)\,e^{i\gamma}\sin\theta\right]\sin\alpha\\ -\sin(N\chi)\,e^{-i\gamma}\sin\theta\cos\alpha+\left[\sin(N\chi)\,e^{-i\gamma}\cos\theta-\sin\left((N-1)\chi\right)\right]\sin\alpha\end{pmatrix} \tag{A1}$$

$$= \frac{E_0}{\sin\chi}\begin{pmatrix}\cos(\alpha-\theta)\sin(N\chi)\,e^{i\gamma}-\cos\alpha\sin\left((N-1)\chi\right)\\ \sin(\alpha-\theta)\sin(N\chi)\,e^{-i\gamma}-\sin\alpha\sin\left((N-1)\chi\right)\end{pmatrix}$$

dont les parties réelle et imaginaire, notées $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ respectivement, sont telles que

$$\frac{\sin\chi}{E_0}\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha-\theta)\sin(N\chi)\cos\gamma-\cos\alpha\sin\left((N-1)\chi\right)\\ \sin(\alpha-\theta)\sin(N\chi)\cos\gamma-\sin\alpha\sin\left((N-1)\chi\right)\end{pmatrix} \tag{A2}$$

et

$$\frac{\sin\chi}{E_0}\,\mathbf{B} = \sin(N\chi)\sin\gamma\begin{pmatrix}\cos(\alpha-\theta)\\ -\sin(\alpha-\theta)\end{pmatrix}. \tag{A3}$$

On dit que $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ forment une paire de demi-axes conjugués de la polarisation elliptique (en général) décrite par ce vecteur de Jones, au sens où

$$\Re e\left[(\mathbf{A}+i\mathbf{B})\,e^{-i\omega t}\right] = \mathbf{A}\cos\omega t+\mathbf{B}\sin\omega t\,; \tag{A4}$$

mais ces axes ne sont pas orthogonaux, contrairement aux demi-grand et petit axes $\mathbf{A}'$ et $\mathbf{B}'$ (réels) respectivement. En appelant t_0 une date telle que le vecteur exprimé par (A4) vaille $\mathbf{A}'$, et en posant $t' := t - t_0$, on a

$$\mathbf{A}\cos\omega t+\mathbf{B}\sin\omega t = \mathbf{A}'\cos\omega t'+\mathbf{B}'\sin\omega t' \quad \text{donc} \quad \mathbf{A}+i\mathbf{B} = (\mathbf{A}'+i\mathbf{B}')\,e^{i\omega t_0} \tag{A5}$$

et on vérifie facilement que

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{A}'\times\mathbf{B}' \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^2+\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}'^2+\mathbf{B}'^2 \tag{A6}$$

– ce qui est une formulation moderne des deux théorèmes d'Apollonios (IIIe siècle av. J.-C.). On peut les utiliser pour trouver l'ellipticité $\varepsilon := \|\mathbf{B}'\|/\|\mathbf{A}'\|$, en calculant $\mathbf{A}'^2$ et $\mathbf{B}'^2$ facilement car $\mathbf{A}'$ et $\mathbf{B}'$ sont orthogonaux, donc

$$\mathbf{A}'^2\mathbf{B}'^2 = (\mathbf{A}'\times\mathbf{B}')^2 = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})^2\,; \tag{A7}$$

alors $\mathbf{A}'^2$ et $\mathbf{B}'^2$ sont les deux racines de l'équation du second degré (d'inconnue s)

$$s^2-(\mathbf{A}^2+\mathbf{B}^2)\,s+(\mathbf{A}\times\mathbf{B})^2 = 0 \tag{A8}$$

dont le discriminant s'écrit

$$(\mathbf{A}^2+\mathbf{B}^2)^2-4\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B})^2 = (\mathbf{A}^2+\mathbf{B}^2)^2-4\left[\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2\right] = (\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2)^2+4\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2. \tag{A9}$$

On en déduit l'ellipticité

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 - \sqrt{(\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2}}{\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + \sqrt{(\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2}}} \tag{A10}$$

avec

$$\left|\frac{\sin\chi}{E_0}\right|^2 \mathbf{A}^2 = \sin^2(N\chi)\cos^2\gamma + \sin^2\big((N-1)\chi\big) - 2\sin(N\chi)\cos\gamma\cos\theta\sin\big((N-1)\chi\big) \tag{A11}$$

$$\left|\frac{\sin\chi}{E_0}\right|^2 \mathbf{B}^2 = \sin^2(N\chi)\, sin^2\gamma \tag{A12}$$

$$\left|\frac{\sin\chi}{E_0}\right|^2 \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \sin(N\chi)\sin\gamma\left[\sin(N\chi)\cos\gamma\cos\big(2(\alpha-\theta)\big) - \sin\big((N-1)\chi\big)\cos(2\alpha-\theta)\right]. \tag{A13}$$

Limite où N tend vers l'infini, avec $N\theta := A$ fixé

Pour $\alpha = 0$ et $\gamma \neq 0 \pmod{\pi}$ fixés, on cherche des équivalents pour N au voisinage de l'infini : à partir des relations (3) et (A1) on trouve

$$\big||\chi| - |\gamma|\big| \sim \frac{A^2}{2N^2}\,|\cot\gamma| \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi), \tag{A14}$$

$$\big([\mathbf{D}]\,[\mathbf{R}_{-1}]\big)^N \mathbf{e_0} \sim \frac{1}{\sin\gamma}\begin{pmatrix}\sin(N\gamma)\, e^{i\gamma} - \big[\sin(N\gamma)\cos\gamma - \cos(N\gamma)\sin\gamma\big] \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sin(N\gamma) + \cos(N\gamma) \\ 0\end{pmatrix} \tag{A15}$$

et finalement

$$[\mathbf{M}]\,\mathbf{e}_{\theta/2} \sim [\mathbf{M}]\,\mathbf{e_0} \sim \begin{pmatrix}\cos A & -\sin A \\ \sin A & \cos A\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{iN\gamma} \\ 0\end{pmatrix} = e^{iN\gamma}\,\mathbf{e_A} \tag{A16}$$

qui est en accord avec notre interprétation invoquant la rotation due à une pile de lames, avec $N \gg 1$, quand la polarisation incidente est rectiligne quasi parallèle à l'un des axes de la première lame. Et comme la polarisation émergeant de la pile est identique à la polarisation incidente quand $\gamma = 0 \pmod{\pi}$, on a prouvé que pour $\alpha \sim 0$ la fonction donnant ε (en fonction de γ) converge vers la fonction nulle quand N tend vers l'infini.

Pour $\gamma = \theta = 2\alpha = A/N$, grâce aux relations (3) et (A2)-(A3) on trouve $\chi \sim \theta\sqrt{2}$, que $\lim\limits_{N\to\infty} \mathbf{B}$ et $\lim\limits_{N\to\infty} \varepsilon$ sont non nulles quand $\sin\big(A\sqrt{2}\big) \neq 0$, et qu'ainsi la convergence de ε vers 0 n'est pas uniforme ; la figure 6 (où $A = \pi/2$) corrobore ce résultat.

Annexe 2

Scripts Maple

```
> restart;
```

Courbe de transmission fréquentielle d'un filtre de Solc en éventail

$m := 0$

$$0 \tag{1.1}$$

$A := \frac{\pi}{2} + m\pi$

$$\frac{1}{2}\pi \tag{1.2}$$

$N := 10$

$$10 \tag{1.3}$$

$\theta := \frac{A}{N}$

$$\frac{1}{20}\pi \tag{1.4}$$

$\alpha := \frac{\theta}{2} - 0\frac{\theta}{4} + 0\frac{\pi}{10}$

$$\frac{1}{40}\pi \tag{1.5}$$

$\beta := \frac{\theta}{2} - 0\frac{\theta}{4} + 0\frac{\pi}{10}$

$$\frac{1}{40}\pi \tag{1.6}$$

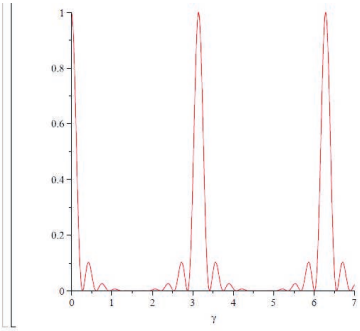
$\chi(\gamma) := \arccos(\cos(\gamma)\cos(\theta))$

$$\gamma \rightarrow \arccos(\cos(\gamma)\cos(\theta)) \tag{1.7}$$

$$T := \frac{1}{(\sin(\chi(\gamma)))^2}\left((\sin(N\chi(\gamma))\cos(\beta-\alpha-(N-1)\theta)\cos(\gamma)-\sin((N-1)\chi(\gamma))\cos(\beta-\alpha-N\theta))^2+(\sin(N\chi(\gamma))\cos(\beta+\alpha-(N+1)\theta)\sin(\gamma))^2\right)$$

$$\frac{\sin\left(10\arccos\left(\cos(\gamma)\cos\left(\frac{1}{20}\pi\right)\right)\right)^2\cos\left(\frac{9}{20}\pi\right)^2\cos(\gamma)^2}{1-\cos(\gamma)^2\cos\left(\frac{1}{20}\pi\right)^2} \tag{1.8}$$

```
> plot(T,gamma=0..7);
```



Variation fréquentielle de l'ellipticité de la polarisation émergeant de la pile de lames d'un filtre de Solc en éventail

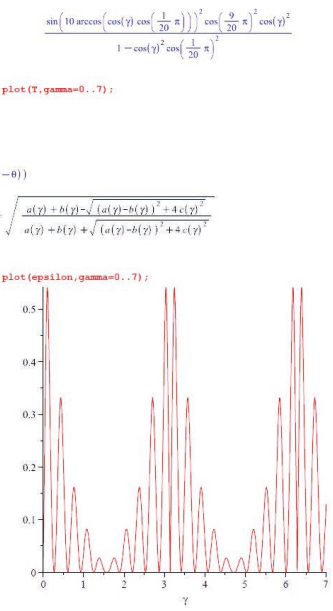
$$a(\gamma) := (\sin(N\chi(\gamma))\cos(\gamma))^2 + (\sin((N-1)\chi(\gamma)))^2 \rightarrow \sin(N\chi(\gamma))^2\cos(\gamma)^2 + \sin((N-1)\chi(\gamma))^2 - 2\sin(N\chi(\gamma))\cos(\gamma)\cos(\theta)\sin((N-1)\chi(\gamma)) \tag{2.1}$$

$$b(\gamma) := (\sin(N\chi(\gamma))\sin(\gamma))^2 \rightarrow \sin(N\chi(\gamma))^2\sin(\gamma)^2 \tag{2.2}$$

$$c(\gamma) := \sin(N\chi(\gamma))\sin(\gamma)\,(\sin(N\chi(\gamma))\cos(\gamma)\cos(2(\alpha-\theta)) - \sin((N-1)\chi(\gamma))\cos(2\alpha-2\theta)) \rightarrow \sin(N\chi(\gamma))\sin(\gamma)\,(\sin(N\chi(\gamma))\cos(\gamma)\cos(2\alpha-2\theta) - \sin((N-1)\chi(\gamma))\cos(2\alpha \tag{2.3}$$

$$\varepsilon := \sqrt{\frac{a(\gamma)+b(\gamma)-\sqrt{(a(\gamma)-b(\gamma))^2+4c(\gamma)^2}}{a(\gamma)+b(\gamma)+\sqrt{(a(\gamma)-b(\gamma))^2+4c(\gamma)^2}}} \tag{2.4}$$

```
> plot(epsilon,gamma=0..7);
```



Variation fréquentielle de l'azimut des axes de la polarisation émergeant de la pile de lames d'un filtre de Solc en éventail (avec A = 90° !)

$$X := \cos(\alpha-\theta)\sin(N\chi(\gamma))\exp(I\gamma)-\cos(\alpha)\sin((N-1)\chi(\gamma))\cos\left(\frac{1}{40}\pi\right)\sin\left(10\arccos\left(\cos(\gamma)\cos\left(\frac{1}{20}\pi\right)\right)\right)e^{I\gamma} - \cos\left(\frac{1}{40}\pi\right)\sin\left(9\arccos\left(\cos(\gamma)\cos\left(\frac{1}{20}\pi\right)\right)\right) \tag{3.1}$$

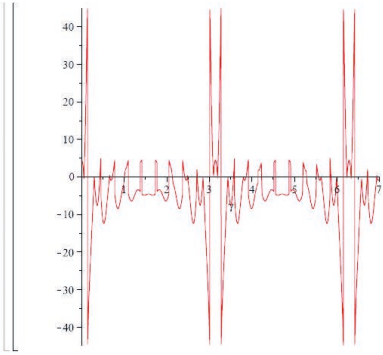
$$Y := \sin(\alpha-\theta)\sin(N\chi(\gamma))\exp(-I\gamma)-\sin(\alpha)\sin((N-1)\chi(\gamma))\cos\left(\frac{1}{40}\pi\right)\sin\left(10\arccos\left(\cos(\gamma)\cos\left(\frac{1}{20}\pi\right)\right)\right)e^{-I\gamma} - \sin\left(\frac{1}{40}\pi\right)\sin\left(9\arccos\left(\cos(\gamma)\cos\left(\frac{1}{20}\pi\right)\right)\right) \tag{3.2}$$

$$azimut := \frac{180}{\pi}\frac{1}{2}\cdot\arctan\left(\tan\left(2\arctan\left(\left|\frac{X}{Y}\right|\right)\right)\cdot\cos(\mathrm{argument}(Y)-\mathrm{argument}(X))\right)$$

$$\frac{1}{\pi}\left(90\arctan\left(\tan\left(2\arctan\left(\left(\left(\cos\left(\frac{1}{40}\pi\right)\sin\left(10\arccos\left(\cos(\gamma)\cos\left(\frac{1}{20}\pi\right)\right)\right)\cos(\gamma) - \cos\left(\frac{1}{40}\pi\right)\sin\left(9\arccos\left(\cos(\gamma)\cos\left(\frac{1}{20}\pi\right)\right)\right)\right)^2 + \cos\left(\frac{1}{40}\pi\right)^2\sin\left(10\arccos\left(\cos(\gamma)\cos\left(\frac{1}{20}\pi\right)\right)\right)^2\sin(\gamma)^2\right)^{1/2} \Big/ \left(\left(-\sin\left(\frac{1}{40}\pi\right)\sin\left(10\arccos\left(\cos(\gamma)\cos\left(\frac{1}{20}\pi\right)\right)\right)\cos(\gamma) - \sin\left(\frac{1}{40}\pi\right)\sin\left(9\arccos\left(\cos(\gamma)\cos\left(\frac{1}{20}\pi\right)\right)\right)\right)^2 + \sin\left(\frac{1}{40}\pi\right)^2\sin\left(10\arccos\left(\cos(\gamma)\cos\left(\frac{1}{20}\pi\right)\right)\right)^2\sin(\gamma)^2\right)^{1/2}\right)\right)\right) \tag{3.3}$$

$$\cos\Big(\arctan\Big(\Big(\sin\Big(\frac{1}{40}\pi\Big)\sin\Big(10\arccos\Big(\cos(\gamma)\cos\Big(\frac{1}{20}\pi\Big)\Big)\Big)\sin(\gamma)\Big)\Big/\Big(-\sin\Big(\frac{1}{40}\pi\Big)\sin\Big(10\arccos\Big(\cos(\gamma)\cos\Big(\frac{1}{20}\pi\Big)\Big)\Big)\cos(\gamma) - \sin\Big(\frac{1}{40}\pi\Big)\sin\Big(9\arccos\Big(\cos(\gamma)\cos\Big(\frac{1}{20}\pi\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big) - \arctan\Big(\Big(\cos\Big(\frac{1}{40}\pi\Big)\sin\Big(10\arccos\Big(\cos(\gamma)\cos\Big(\frac{1}{20}\pi\Big)\Big)\Big)\sin(\gamma)\Big)\Big/\Big(\cos\Big(\frac{1}{40}\pi\Big)\sin\Big(10\arccos\Big(\cos(\gamma)\cos\Big(\frac{1}{20}\pi\Big)\Big)\Big)\cos(\gamma) - \cos\Big(\frac{1}{40}\pi\Big)\sin\Big(9\arccos\Big(\cos(\gamma)\cos\Big(\frac{1}{20}\pi\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)$$

```
> plot(azimut,gamma=0..7);
```




```
> restart;
```

Courbe de transmission fréquentielle d'un filtre de Solc replié, à nombre pair de lames

$m := 0$

$$0 \quad (1.1)$$

$A := \frac{\mathrm{Pi}}{2} + m\,\mathrm{Pi}$

$$\frac{1}{2}\pi \quad (1.2)$$

$Q := 5$

$$5 \quad (1.3)$$

$N := 2\,Q$

$$10 \quad (1.4)$$

$\theta := \frac{A}{N}$

$$\frac{1}{20}\pi \quad (1.5)$$

$\alpha := 0\frac{\theta}{4} + 0\frac{\mathrm{Pi}}{10}$

$$0 \quad (1.6)$$

$\beta := \frac{\mathrm{Pi}}{2} + 0\frac{\theta}{4} + 0\frac{\mathrm{Pi}}{10}$

$$\frac{1}{2}\pi \quad (1.7)$$

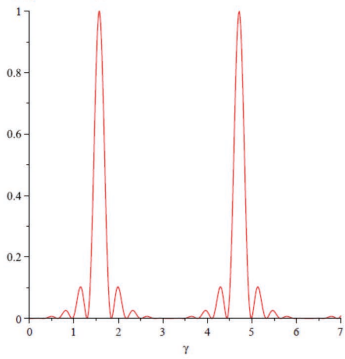
$\kappa(\gamma) := \arcsin(\sin(\gamma)\cos(\theta))$

$$\gamma \to \arcsin(\sin(\gamma)\cos(\theta)) \quad (1.8)$$

$$T := \frac{1}{(\sin(2\kappa(\gamma)))^2}\Big(\big((\sin(N\kappa(\gamma))\cos(2\kappa(\gamma)) - \sin((N-2)\kappa(\gamma)))\cos(\beta-\alpha) + \sin(N\kappa(\gamma))\sin(2\theta)\sin(\gamma)^2\sin(\beta-\alpha)\big)^2 + (\sin(N\kappa(\gamma))\cos(\theta)\sin(2\gamma)\cos(\beta+\alpha))^2\Big)$$

$$\frac{\sin\Big(10\arcsin\Big(\sin(\gamma)\cos\Big(\frac{1}{20}\pi\Big)\Big)\Big)^2\sin\Big(\frac{1}{10}\pi\Big)^2\sin(\gamma)^4}{\sin\Big(2\arcsin\Big(\sin(\gamma)\cos\Big(\frac{1}{20}\pi\Big)\Big)\Big)^2} \quad (1.9)$$

```
> plot(T,gamma=0..7);
```



Luc DETTWILLER
*Professeur en PC**
Lycée Blaise Pascal
Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme)