



**HAL**  
open science

# COMPARAISON DE THÉORIES SUR LES AFFICHEURS À CRISTAUX LIQUIDES

Luc Dettwiller

► **To cite this version:**

Luc Dettwiller. COMPARAISON DE THÉORIES SUR LES AFFICHEURS À CRISTAUX LIQUIDES. Le Bulletin de l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie, 2018, 112 (1009), pp.1291-1302. sfo-01965059

**HAL Id: sfo-01965059**

**<https://hal-sfo.ccsd.cnrs.fr/sfo-01965059>**

Submitted on 24 Dec 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Comparaison de théories sur les afficheurs à cristaux liquides

par Luc DETTWILLER

Lycée Blaise Pascal - 63037 Clermont-Ferrand Cedex  
luc.dettwiller@ac-clermont.fr

**P**OUR MIEUX COMPRENDRE LES LIMITES théoriques des afficheurs à cristaux liquides, et chercher éventuellement à les repousser, on compare diverses techniques d'étude du changement progressif de polarisation qui se produit lors de la propagation de la lumière, sous incidence normale, dans une lame d'un milieu uniaxe nématique torsadé. Nous rappelons la méthode dite « dynamique », qui consiste à considérer la lame comme une succession de lames retardatrices élémentaires dont les lignes neutres sont tournées les unes par rapport aux autres, et qui conclut à l'existence de deux polarisations elliptiques orthogonales, invariantes modulo la rotation de l'axe optique dans le milieu ; nous signalons que ce résultat peut se trouver géométriquement, sans intégrer un système différentiel du premier ordre, mais en raisonnant avec la sphère de Poincaré. On sait malheureusement que cette méthode dynamique relève de l'approximation BKW, et qu'une étude rigoureuse passe par la résolution de l'équation d'Helmholtz (généralisée au cas d'un milieu biréfringent inhomogène), qui est du second ordre ; on trouve aussi qu'il existe deux polarisations elliptiques invariantes, mais d'ellipticités différentes ! L'originalité de notre propos réside essentiellement dans la comparaison minutieuse des résultats de ces diverses études en les exprimant de la manière la plus simple possible, notamment afin de spécifier analytiquement le moment à partir duquel les résultats de l'étude rigoureuse s'écartent sensiblement de ceux de l'approximation BKW. Cette question a son importance pratique, car on peut profiter de la connaissance des polarisations invariantes pour concevoir des afficheurs plus minces.

## INTRODUCTION

Les écrans à cristaux liquides font partie de notre quotidien depuis les années 2000, grâce aux progrès de cette technologie qui permet de réaliser des afficheurs de plus en plus performants, au niveau de leur finesse notamment. Leur principe de base exploite les propriétés de propagation de la lumière dans un cristal liquide uniaxe nématique, et torsadé (*i.e.* dont l'axe optique tourne régulièrement à raison d'un tour par pas sur toute l'épaisseur du cristal, qui est alors un milieu inhomogène) lorsque l'afficheur est éteint [1]. Avec une approximation classique, remontant aux études cristallographiques de Charles Mauguin en 1911 [2], on montre que la polarisation de la lumière évolue au sein du cristal, de manière simple si celle de l'onde incidente est

rectiligne parallèle à l'axe optique sur la face d'entrée : elle reste rectiligne, parallèle à l'axe optique en tout point du milieu nématique torsadé. D'ailleurs, un tel milieu est analogue à un cholestérique ; la différence essentielle est que dans ce cas-ci le pas de la rotation de l'axe optique est fixé par le milieu, alors que dans le cas du nématique torsadé c'est plus souple : il est conditionné par la distance entre les faces d'ancrage moléculaire qui le limitent – et par leur orientation. Pour la polarisation incidente particulière considérée ci-dessus, l'approximation de Mauguin se traduit donc par un pouvoir rotatoire qui peut être énorme (atteignant des centaines de tours par millimètre avec des cholestériques, contre  $22^\circ/\text{mm}$  seulement avec le quartz dans les conditions normales et pour la raie D).

Mais l'approximation de Mauguin n'est pas assez fine quand on veut concevoir des afficheurs modernes, extra-plats : dans ce cas, la longueur d'onde de la composante spectrale visible considérée n'est plus assez petite devant le pas du cristal nématique torsadé, et la polarisation cesse d'être rectiligne au sein du cristal, qui agit de manière plus complexe qu'un milieu optiquement actif ; et si la polarisation n'est plus rectiligne au niveau de la face de sortie quand l'afficheur est éteint, sa qualité s'en ressent ! Alors de nombreuses études théoriques ont été menées sur l'évolution de la polarisation dans de tels milieux. Elles utilisent des méthodes d'analyse différentes, plus ou moins approximatives ; deux d'entre elles sont devenues classiques. La première [3-4], dite « dynamique », est basée sur la même idée que l'approximation de Brillouin-Kramers-Wentzel (BKW), célèbre en mécanique quantique [5], et aboutit à la formule classique de Gooch-Tarry [6] ; la seconde [7-12], plus rigoureuse, utilise l'équation d'Helmholtz généralisée au cas d'un milieu inhomogène biréfringent. Bien sûr, si leurs conclusions sont identiques dans l'approximation de Mauguin, elles diffèrent néanmoins légèrement en dehors de ce cadre. La plupart des études sur ce sujet occultent cette différence, en adoptant sans discussion l'une des méthodes d'analyse. Alors il nous a semblé intéressant de comparer certains résultats de ces études, et d'examiner leurs différences afin de savoir quel degré de précision peut être attendu de l'approximation BKW.

Pour cela, nous commencerons par redonner la méthode d'analyse la plus simple, celle qui utilise l'approximation BKW. Puis nous rappellerons que les équations différentielles de cette analyse peuvent être évitées si on exploite judicieusement un outil géométrique très puissant pour étudier la polarisation : la sphère de Poincaré (1892), bien connue de Mauguin. Enfin, nous traiterons le même problème, mais de façon plus rigoureuse, en partant des équations de propagation issues des équations de Maxwell dans la matière : les formules finales montreront à l'évidence la simplification due à l'approximation BKW, ce qui nous permettra d'en préciser la portée.

## 1. ÉTUDE DYNAMIQUE PAR LES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION BKW

Dans la situation où la tension est nulle aux bornes d'un afficheur à nématique torsadé, le milieu occupant l'espace entre le polariseur d'entrée (d'axe parallèle à  $Ox$ ) en  $z = 0$  et l'analyseur de sortie (d'axe parallèle à  $Oy$  du repère orthonormé direct  $Oxyz$ ) en  $z = |h|$  est inhomogène, biréfringent uniaxe. Ses indices ordinaire et extraordinaire sont  $n_o$  et  $n_e$  respectivement, uniformes ; son axe optique est de direction variable – celle de  $\mathbf{v}(z)$  unitaire perpendiculaire à la direction de propagation  $Oz$  normale aux faces de l'afficheur. De la face d'entrée à celle de sortie, *i.e.* quand  $z$  varie de 0 à  $|h|$ ,  $\mathbf{v}(z)$  exécute un quart de tour de manière uniforme – et on convient que  $h$  est positif (resp. négatif) dans le cas où le sens de rotation de  $\mathbf{v}(z)$  est droit (resp. gauche) par rapport au sens de  $Oz$ , selon la règle du tire-bouchon de Maxwell. Nous nous restreindrons au cas où  $\mathbf{v}(0)$  est colinéaire à  $\mathbf{u}_x$  (unitaire dirigeant  $Ox$ ) et  $\mathbf{v}(|h|)$  à  $\mathbf{u}_y$  (unitaire dirigeant  $Oy$ ), donc au cas où l'axe optique d'entrée est parallèle à l'axe du polariseur ; mais celui où  $\mathbf{v}(0)$  est colinéaire à  $\mathbf{u}_y$  et  $\mathbf{v}(|h|)$  à  $\mathbf{u}_x$  (donc le cas où l'axe optique d'entrée est parallèle à l'axe de l'analyseur) serait envisageable aussi et conduirait à des conclusions similaires.

On décompose sur la base locale orthonormée directe  $(\mathbf{v}, \mathbf{u}_z \times \mathbf{v}, \mathbf{u}_z)$  le champ électrique complexe d'une composante spectrale (de pulsation  $\omega$ ) de l'onde considérée, qui se propage dans le milieu nématique torsadé :

$$\underline{\mathbf{E}}(z, t) = [E_{//}(z) \mathbf{v}(z) + E_{\perp}(z) \mathbf{u}_z \times \mathbf{v}(z)] e^{-i\omega t} \quad (1)$$

avec  $i^2 = -1$ . L'analyse par la méthode du milieu stratifié, où on considère l'effet de la traversée d'une lame élémentaire d'épaisseur  $dz$  (agissant comme une lame retardatrice puisque  $n_e \neq n_o$ ), donne immédiatement ([13], p. 102-105)

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}(z + dz, t) &= [E_{//}(z) e^{i k_o n_e dz} \mathbf{v}(z) + E_{\perp}(z) e^{i k_o n_o dz} \mathbf{u}_z \times \mathbf{v}(z)] e^{-i\omega t} \\ &= [E_{//}(z + dz) \mathbf{v}(z + dz) + E_{\perp}(z + dz) \mathbf{u}_z \times \mathbf{v}(z + dz)] e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (2)$$

où  $k_o := 2\pi/\lambda_o$  avec  $\lambda_o$  qui désigne la longueur d'onde, dans le vide, de la composante spectrale. Ces relations permettent d'exprimer la dérivée

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial z} &= (i k_o n_e E_{//} \mathbf{v} + i k_o n_o E_{\perp} \mathbf{u}_z \times \mathbf{v}) e^{-i\omega t} \\ &= \frac{d}{dz} (E_{//} \mathbf{v} + E_{\perp} \mathbf{u}_z \times \mathbf{v}) e^{-i\omega t} \\ &= \left[ \frac{dE_{//}}{dz} \mathbf{v} + E_{//} \frac{\pi}{2} \frac{\mathbf{u}_z}{h} \times \mathbf{v} + \frac{dE_{\perp}}{dz} \mathbf{u}_z \times \mathbf{v} + E_{\perp} \frac{\pi}{2} \frac{\mathbf{u}_z}{h} \times (\mathbf{u}_z \times \mathbf{v}) \right] e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (3)$$

En projetant sur  $(\mathbf{v}, \mathbf{u}_z \times \mathbf{v})$  on obtient un système différentiel du premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{dE_{//}}{dz} - i n_e k_o E_{//} = \frac{\pi}{2h} E_{\perp} \\ \frac{dE_{\perp}}{dz} - i n_o k_o E_{\perp} = -\frac{\pi}{2h} E_{//} \end{cases}. \quad (4)$$

On cherche les solutions correspondant à des polarisations invariantes (modulo la rotation de l'axe optique) par propagation dans le milieu, *i.e.* telles que les fonctions  $E_{//}$  et  $E_{\perp}$  sont proportionnelles à  $\exp(ink_0z)$  où  $n$  est une inconnue (nommée « indice associé à la polarisation invariante »).

En posant  $K := \frac{\pi}{2h} := k_0 \frac{\Delta n}{2\kappa}$  où  $\Delta n := n_e - n_o$ , le système (4) devient

$$\begin{cases} i(n - n_e)k_0 E_{//} - K E_{\perp} = 0 \\ K E_{//} + i(n - n_o)k_0 E_{\perp} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

La solution triviale  $(E_{//}, E_{\perp}) = (0, 0)$  étant exclue, le déterminant du système doit être nul, donc, en posant  $\gamma := K/k_0 = \frac{\lambda_0}{4h} = \frac{\Delta n}{2\kappa}$  :

$$(n - n_e)(n - n_o) - \gamma^2 = 0. \quad (6)$$

C'est une équation du second degré en  $n$ , qui donne

$$n = \frac{n_e + n_o}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta n}{2}\right)^2 + \gamma^2} = \frac{n_e + n_o}{2} \pm \frac{|\Delta n|}{2} \sqrt{1 + \kappa^{-2}} \quad (7)$$

et, en injectant ces racines dans (5),

$$\frac{E_{\perp}}{E_{//}} = i \frac{\gamma}{n - n_o} = i \frac{2\gamma}{\Delta n \pm \sqrt{(\Delta n)^2 + (2\gamma)^2}} = \frac{i}{\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 + 1}} = i(-\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 + 1}) \quad (8)$$

qui est imaginaire pur si le milieu est transparent, *i.e.* si  $n_o$  et  $n_e$  sont réels – ce que nous supposons dès maintenant. On voit donc que les deux polarisations associées chacune à une valeur de  $n$  sont elliptiques d'axes dirigés par  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{u}_z \times \mathbf{v}$ , et qu'elles sont orthogonales car

$$1^2 + i(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 + 1})[i(-\kappa - \sqrt{\kappa^2 + 1})]^* = 1 + (\kappa^2 - \sqrt{\kappa^2 + 1}^2) = 0. \quad (9)$$

Et on vérifie que, à  $\Delta n$  fixé, si  $\gamma$  tend vers 0, alors l'une des valeurs de  $iE_{\perp}/E_{//}$  tend aussi vers 0 mais l'autre tend vers  $\pm \infty$  : les deux polarisations invariantes sont rectilignes, respectivement parallèle ou perpendiculaire à  $\mathbf{v}$ .

## 2. ÉTUDE DYNAMIQUE AVEC LA SPHÈRE DE POINCARÉ

### 2.1. Rappel des propriétés utiles des paramètres de Stokes et de la sphère de Poincaré

Pour notre propos, il sera très avantageux d'utiliser la sphère de Poincaré ([14], p. 30-32 ; [15], p. 26-29 ; [16], p. 214-216 ; [17], p. 124-128) : cette représentation géométrique de l'ensemble des états de polarisation jouit de propriétés qui raccourcissent bien des calculs [18-22]. À toute lumière, de paramètres de Stokes réduits  $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_3$  ([14], p. 554-555 ; [17], p. 102) caractérisant sa polarisation, est associé un point  $M$  de la sphère de Poincaré (de centre  $C$ ), de coordonnées  $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_3$  (dans un repère orthonormé direct  $Cs_1s_2s_3$ ).

### 2.1.1. Facteur de transmission d'un analyseur, à l'aide des paramètres de Stokes

Pour une lumière incidente d'intensité vibratoire  $I$  et de polarisation quelconque décrite par  $M$ , l'intensité vibratoire  $I'$  de la lumière transmise par une lame d'un milieu quelconque – du moment qu'il n'est pas non linéaire et que les réflexions partielles sont négligeables – s'exprime simplement [23] à l'aide de diverses caractéristiques de la lame, et des paramètres  $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_3$  de la lumière incidente normalement. Nous considérons le cas où cette lame est un polariseur parfait, non absorbant ; alors la seule caractéristique utile est la direction de l'axe du polariseur, et s'il est parallèle à  $Ox$  on trouve

$$I' = I(1 + s_1)/2. \quad (10)$$

Cette lame peut donc être considérée comme un analyseur, dont le facteur de transmission  $T_x$  pour la lumière incidente considérée s'exprime en fonction de son premier paramètre de Stokes réduit :

$$T_x = (1 + s_1)/2. \quad (11)$$

### 2.1.2. Théorème de Poincaré

Une lumière incidente de polarisation décrite par  $M_i$   $\begin{vmatrix} s_{1i} \\ s_{2i} \\ s_{3i} \end{vmatrix}$  dans la sphère de Poincaré donne, après traversée d'une lame retardatrice (produisant le déphasage retard  $\varphi$  pour une de ses vibrations propres  $V_2$  par rapport à son orthogonale  $V_1$ ), une lumière émergente dont la polarisation est décrite par  $M_e$   $\begin{vmatrix} s_{1e} \\ s_{2e} \\ s_{3e} \end{vmatrix}$ , image de  $M_i$  par une rotation d'angle  $\varphi$  autour de l'axe  $(C, \mathbf{u})$  traversant la surface de la sphère de Poincaré aux points  $M_1$  et  $M_2$  correspondant aux polarisations de  $V_1$  et  $V_2$  ([22] ; [15], p. 124–126) – le sens conventionnel de rotation pour  $\varphi$  positif étant le sens direct, *i.e.* celui associé à  $\mathbf{u} := \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 / \|\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2\|$  par la règle du tire-bouchon de Maxwell. Tel est le théorème de Poincaré.

Cette rotation peut s'exprimer de façon intrinsèque : puisque la composante selon  $\mathbf{u}$  du vecteur  $\mathbf{CM}_i$  est  $(\mathbf{CM}_i \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$  et qu'elle ne varie pas lors de cette rotation, tandis que la composante normale à  $\mathbf{u}$  est  $\mathbf{u} \times (\mathbf{CM}_i \times \mathbf{u})$  et qu'elle tourne de l'angle  $\varphi$  autour de  $\mathbf{u}$  dans le sens direct, alors  $M_e$  a pour vecteur position

$$\mathbf{CM}_e = (\mathbf{CM}_i \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} + \cos \varphi \mathbf{u} \times (\mathbf{CM}_i \times \mathbf{u}) + \sin \varphi \mathbf{u} \times [\mathbf{u} \times (\mathbf{CM}_i \times \mathbf{u})]. \quad (12)$$

En utilisant deux fois la formule du double produit vectoriel, on trouve

$$\mathbf{CM}_e = (1 - \cos \varphi) (\mathbf{CM}_i \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} + \cos \varphi \mathbf{CM}_i + \sin \varphi \mathbf{u} \times \mathbf{CM}_i. \quad (13)$$

## 2.2. Utilisation dans le cas d'un afficheur à nématique torsadé ; vecteur rotation sur la sphère de Poincaré

Dans le modèle d'un milieu stratifié, le changement de polarisation en fonction de  $z$  dû à la propagation est caractérisé, dans la sphère de Poincaré, par un « mouvement » de rotation  $\mathcal{R}$  (dans le référentiel de  $Cs'_1s'_2s'_3$  défini ci-dessous) de centre  $C$  et de vecteur rotation  $\mathbf{\Omega}$  dont les composantes sont indépendantes de  $z$  sur la base orthonormée directe  $(B')$  du repère  $Cs'_1s'_2s'_3$  de la sphère de Poincaré, si on considère d'une part que ce repère dépend de  $z$  de sorte que  $s'_1 = 1$  caractérise la polarisation parfaite dirigée par  $\mathbf{v}(z)$  quel que soit  $z$ , et d'autre part que les axes  $Cs'_3$  et  $Cs_3$  restent confondus quel que soit  $z$ . Alors les composantes de  $\mathbf{\Omega}$  sur  $(B')$  sont

$$\Omega'_1 = k_0 \Delta n \quad ; \quad \Omega'_2 = 0 \quad \text{et} \quad \Omega'_3 = -2(\pi/2)(1/h) = -k_0 \Delta n / \kappa = -\Omega'_1 \kappa^{-1} \quad (14)$$

où le préfacteur 2 dans  $\Omega'_3$  est dû aux propriétés de la latitude et de la longitude sur la sphère de Poincaré [14-17]. Comme attendu,  $\mathbf{\Omega}$  est proportionnel à la différence des deux indices donnés par l'expression (7), car

$$\|\mathbf{\Omega}\| = \sqrt{\Omega_1'^2 + \Omega_3'^2} = k_0 |\Delta n| \sqrt{1 + \kappa^{-2}}. \quad (15)$$

L'angle  $\chi$  de  $\mathcal{R}$  dans  $Cs'_1s'_2s'_3$ , pour  $z$  variant de 0 à  $|h|$ , est donc

$$\chi = |h| \|\mathbf{\Omega}\| = |h| k_0 |\Delta n| \sqrt{1 + \kappa^{-2}} = \pi |\kappa| \sqrt{1 + \kappa^{-2}} = \pi \sqrt{1 + \kappa^2}. \quad (16)$$

La polarisation à l'entrée de la lame ( $z = 0$ ) étant rectiligne parallèle à  $Ox$ , donc représentée sur la sphère de Poincaré par le point  $A_i$  de coordonnées  $(1, 0, 0)$  dans le repère tournant  $Cs'_1s'_2s'_3$  (confondu pour  $z = 0$  avec le repère absolu  $Cs_1s_2s_3$  de la sphère) on peut en déduire facilement la polarisation à la sortie de la lame ( $z = |h|$ ) grâce à l'angle  $2\alpha$  caractérisant  $\mathbf{u} = \mathbf{\Omega} / \|\mathbf{\Omega}\|$  tel que

$$\cos(2\alpha) := \Omega'_1 / \|\mathbf{\Omega}\| \quad \text{d'où} \quad |\cos(2\alpha)| = |\kappa| / \sqrt{1 + \kappa^2}, \quad \text{et} \quad \sin(2\alpha) := \Omega'_3 / \|\mathbf{\Omega}\|; \quad (17)$$

cette polarisation est donnée par le point  $A_e$  (image de  $A_i$  par  $\mathcal{R}$ ) dont la première coordonnée  $s'_{1e}$  dans le repère tournant  $Cs'_1s'_2s'_3$  s'exprime grâce à la relation (13) où on remplace  $M_i$  par  $A_i$ ,  $M_e$  par  $A_e$  et  $\varphi$  par  $\chi$  :

$$\begin{aligned} s'_{1e} &= (1 - \cos \chi) (\mathbf{CA}_i \cdot \mathbf{u}) \cos(2\alpha) + \cos \chi \\ &= (1 - \cos \chi) \cos^2(2\alpha) + \cos \chi \\ &= \frac{1 - \cos \chi}{1 + \kappa^2} \kappa^2 + \cos \chi = \frac{\kappa^2 + \cos \chi}{1 + \kappa^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Or quand  $z$  passe de 0 à  $|h|$ ,  $\mathbf{v}$  a tourné de  $90^\circ$  dans  $xOy$  et donc  $Cs'_1s'_2s'_3$  a tourné de  $180^\circ$  autour de  $Cs_3$  dans le repère  $Cs_1s_2s_3$ , ainsi la première coordonnée de  $A_e$  dans ce repère absolu est

$$s_{1e} = -s'_{1e}. \quad (19)$$

Donc pour la lumière émergente, le facteur de transmission au travers d'un analy-

seur parfait d'axe parallèle à  $Ox$  s'écrit

$$T_x = (1 + s_{1e})/2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \cos \chi}{1 + \kappa^2} \right) = \frac{\sin^2(\chi/2)}{1 + \kappa^2} = \frac{1}{1 + \kappa^2} \sin^2 \left( \sqrt{1 + \kappa^2} \frac{\pi}{2} \right). \quad (20)$$

On a ainsi retrouvé la formule de Gooch-Tarry. Bien sûr, le facteur de transmission au travers d'un analyseur parfait d'axe parallèle à  $Oy$  s'écrit  $T_y = (1 - s_{1e})/2 = 1 - T_x$ .

Dans l'approximation dite de Mauguin, où  $|h| \gg \lambda_0/|\Delta n|$ , on a  $|\kappa| \gg 1$ , donc  $T_x \ll 1$  et  $T_y \cong 1$  : c'est le résultat escompté pour le bon fonctionnement d'un afficheur à nématique torsadé où la polarisation est quasi invariante modulo la rotation de  $\mathbf{v}(z)$ , vu que l'axe  $Cs'_1$  (et donc  $A_i$ ) est très proche de l'axe  $(C, \mathbf{\Omega})$  dans le référentiel tournant où ces axes sont fixes – et donc de  $A_e$  aussi – car  $|\mathbf{\Omega}'_3| = |\mathbf{\Omega}'_1|/|\kappa| \ll |\mathbf{\Omega}'_1|$ .

Mais la condition  $|h| \gg \lambda_0/|\Delta n|$  n'est guère compatible avec un afficheur extra-plat. Comme la polarisation n'est pas vraiment invariante modulo la rotation de  $\mathbf{v}(z)$  – à cause de la différence des deux indices donnés par l'expression (7), et du fait que la polarisation en  $z = 0$  est rectiligne donc ne satisfait pas (8) – pour avoir  $T_x = 0$  il faut qu'en  $z = |h|$  elle soit redevenue exactement rectiligne, et parallèle à  $Oy$ , donc ce n'est possible que pour un ensemble discret de valeurs de  $|\kappa|$ . La plus petite possible est  $\sqrt{3}$ , d'où l'épaisseur minimale  $\sqrt{3} \lambda_0/(2|\Delta n|)$ .

Les deux polarisations invariantes (modulo la rotation de l'axe optique) par propagation dans le milieu sont celles correspondant aux points fixes, dans le repère  $Cs'_1s'_2s'_3$ , de la sphère de Poincaré coupée par l'axe  $(C, \mathbf{\Omega})$ , donc des elliptiques orthogonales dont le grand axe est perpendiculaire ou parallèle à l'axe optique (modes ordinaire ou extraordinaire respectivement) et dont l'ellipticité est

$$\begin{aligned} \inf(|\tan \alpha|, |\cot \alpha|) &= \inf(\sqrt{1 + \kappa^2} - \kappa, \sqrt{1 + \kappa^2} + \kappa) = \sqrt{1 + \kappa^2} - |\kappa| \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2} + |\kappa|} \end{aligned} \quad (21)$$

car  $\kappa = \cot(2\alpha)$  ; on retrouve ainsi les polarisations déjà caractérisées par la relation (8).

Notons bien que les équations différentielles de base (4), obtenues avec cette méthode dite du milieu stratifié et qui justifient aussi l'introduction de  $\mathbf{\Omega}$ , étant du premier ordre, relèvent d'une approximation similaire à celle de Brillouin-Kramers-Wentzel utilisée aussi bien en électromagnétisme qu'en mécanique quantique [5]. Elles ne sont donc pas rigoureuses ; pour une analyse plus exacte, il faut revenir aux équations de propagation, qui sont du second ordre. Il sera intéressant de comparer l'expression de  $n^2$  obtenue dans cette ultime analyse, avec celle déduite de l'expression (7) ci-dessus :

$$n^2 = \frac{n_e^2 + n_o^2}{2} + \gamma^2 \pm \sqrt{\left( \frac{n_e^2 - n_o^2}{2} \right)^2 + \gamma^2 (n_e + n_o)^2}. \quad (22)$$



### 3. RÉOLUTION RIGOUREUSE DE L'ÉQUATION DE PROPAGATION SELON Oz

Bien que le milieu soit inhomogène, on peut trouver des solutions rigoureuses de l'équation de propagation, soit par une méthode directe [7-8], soit en utilisant des inconnues intermédiaires [9-12] que nous éviterons ici.

Pour une onde se propageant selon Oz dans le nématique torsadé, avec  $\underline{E}_z = 0$  qui assure  $\text{div } \underline{\mathbf{D}} = 0$  ( $\underline{\mathbf{D}}$  étant le vecteur déplacement ou induction électrique), on a aussi  $\text{div } \underline{\mathbf{E}} = 0$  donc  $\text{rot}(\text{rot } \underline{\mathbf{E}}) = -\Delta \underline{\mathbf{E}} = k_0^2(\epsilon_r) \underline{\mathbf{E}}$  où  $(\epsilon_r)$  désigne le tenseur permittivité électrique relatif, et avec l'expression (1) de  $\underline{\mathbf{E}}(z, t)$  ci-dessus il vient

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} [E_{//}(z) \mathbf{v}(z) + E_{\perp}(z) \mathbf{u}_z \times \mathbf{v}(z)] \\ + k_0^2 [n_e^2 E_{//}(z) \mathbf{v}(z) + n_o^2 E_{\perp}(z) \mathbf{u}_z \times \mathbf{v}(z)] = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (23)$$

– et dans le cas d'un milieu isotrope ( $n_e = n_o$ ) on reconnaît là l'équation d'Helmholtz. Or

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} (E_{//} \mathbf{v}) &= \frac{d^2 E_{//}}{dz^2} \mathbf{v} + 2 \frac{dE_{//}}{dz} \frac{d\mathbf{v}}{dz} + E_{//} \frac{d^2 \mathbf{v}}{dz^2} \\ &= \left( \frac{d^2 E_{//}}{dz^2} - K^2 E_{//} \right) \mathbf{v} + 2 \frac{dE_{//}}{dz} K \mathbf{u}_z \times \mathbf{v} \end{aligned} \quad (24)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_z \times \frac{d^2}{dz^2} (E_{\perp} \mathbf{v}) &= \mathbf{u}_z \times \left[ \left( \frac{d^2 E_{\perp}}{dz^2} - K^2 E_{\perp} \right) \mathbf{v} + 2 \frac{dE_{\perp}}{dz} K \mathbf{u}_z \times \mathbf{v} \right] \\ &= \left( \frac{d^2 E_{\perp}}{dz^2} - K^2 E_{\perp} \right) \mathbf{u}_z \times \mathbf{v} - 2 \frac{dE_{\perp}}{dz} K \mathbf{v} \end{aligned} \quad (25)$$

donc on obtient le système différentiel du second ordre

$$\begin{cases} \frac{d^2 E_{//}}{dz^2} - K^2 E_{//} - 2K \frac{dE_{\perp}}{dz} + k_0^2 n_e^2 E_{//} = 0 \\ \frac{d^2 E_{\perp}}{dz^2} - K^2 E_{\perp} + 2K \frac{dE_{//}}{dz} + k_0^2 n_o^2 E_{\perp} = 0. \end{cases} \quad (26)$$

En cherchant les solutions sous la même forme qu'au paragraphe 1 il vient

$$\begin{cases} (n_e^2 - \gamma^2 - n^2) E_{//} - i 2\gamma n E_{\perp} = 0 \\ i 2\gamma n E_{//} + (n_o^2 - \gamma^2 - n^2) E_{\perp} = 0. \end{cases} \quad (27)$$

La solution triviale  $(E_{//}, E_{\perp}) = (0, 0)$  étant exclue, le déterminant du système doit être nul, donc :

$$n^4 - 2 \left( \frac{n_e^2 + n_o^2}{2} + \gamma^2 \right) n^2 + (n_e^2 - \gamma^2)(n_o^2 - \gamma^2) = 0. \quad (28)$$

C'est une équation du second degré en  $n^2$ , dont la somme des racines est positive, mais

l'une seule des deux est négative si et seulement si  $|\gamma|$  est compris entre  $n_o$  et  $n_e - c'$  est le seul cas où il n'existe qu'un seul mode propagatif dans le nématique torsadé ; sinon

$$\begin{aligned} n &= \left[ \frac{n_e^2 + n_o^2}{2} + \gamma^2 \pm \sqrt{\left( \frac{n_e^2 + n_o^2}{2} + \gamma^2 \right)^2 - (n_e^2 - \gamma^2)(n_o^2 - \gamma^2)} \right]^{1/2} \\ &= \left[ \frac{n_e^2 + n_o^2}{2} + \gamma^2 \pm \sqrt{\left( \frac{n_e^2 - n_o^2}{2} \right)^2 + 2\gamma^2(n_e^2 + n_o^2)} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (29)$$

et, en injectant ces racines dans (27),

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = i \frac{2\gamma n}{\frac{n_e^2 - n_o^2}{2} + 2\gamma^2 \pm \sqrt{\left( \frac{n_e^2 - n_o^2}{2} \right)^2 + 2\gamma^2(n_e^2 + n_o^2)}} \quad (30)$$

qui est imaginaire pur. Donc ces solutions correspondent toujours à deux polarisations elliptiques E1 et E2 (de sens contraires si  $|\gamma| < n_o$ , d'après le produit  $P$  des deux valeurs de  $E_{\perp}/E_{\parallel}$  calculé ci-dessous) dont le grand axe est perpendiculaire ou parallèle à l'axe optique (modes ordinaire ou extraordinaire respectivement), mais elles n'ont plus la même ellipticité, car le produit des deux indices vaut  $\sqrt{(n_e^2 - \gamma^2)(n_o^2 - \gamma^2)}$ , d'où

$$P = - \frac{4\gamma^2 \sqrt{(n_e^2 - \gamma^2)(n_o^2 - \gamma^2)}}{\left( \frac{n_e^2 - n_o^2}{2} + 2\gamma^2 \right)^2 - \left( \frac{n_e^2 - n_o^2}{2} \right)^2 - 2\gamma^2(n_e^2 + n_o^2)} = \frac{\sqrt{(n_e^2 - \gamma^2)(n_o^2 - \gamma^2)}}{n_o^2 - \gamma^2} \neq 1. \quad (31)$$

On vérifie encore que, à  $\Delta n$  fixé, si  $\gamma$  tend vers 0, alors l'une des valeurs de  $i E_{\perp}/E_{\parallel}$  tend aussi vers 0 mais l'autre tend vers  $\pm \infty$  : les deux polarisations invariantes E1 et E2 tendent à devenir rectilignes, respectivement parallèle ou perpendiculaire à  $\mathbf{v}$ .

Il est remarquable aussi que pour passer de l'expression approchée (22) de  $n^2$  à l'expression rigoureuse déduite de (29), il suffit de remplacer sous la racine  $\gamma^2(n_e + n_o)^2$  par  $2\gamma^2(n_e^2 + n_o^2) = \gamma^2(n_e + n_o)^2 + (\gamma \Delta n)^2$  ; donc l'erreur commise, sur la différence des deux valeurs de  $n^2$ , par l'approximation des milieux stratifiés, n'est que d'ordre total 4 en  $(\gamma, \Delta n)$ .

De même, il est intéressant de comparer les expressions approchées et rigoureuses de  $E_{\perp}/E_{\parallel}$ . À  $\Delta n$  fixé, pour  $\gamma$  au voisinage de 0 (*i.e.*  $|\kappa|$  au voisinage de l'infini), les deux valeurs approchées (8) de  $E_{\perp}/E_{\parallel}$  sont équivalentes à  $i\gamma/\Delta n = i/(2\kappa)$  ou  $-i\Delta n/\gamma = -2i\kappa$  respectivement (d'où les limites données ci-dessus), tandis que les valeurs rigoureuses (30) sont équivalentes à  $i \frac{2\gamma n_e}{n_e^2 - n_o^2}$  ou  $-i \frac{n_e^2 - n_o^2}{2\gamma n_o}$  respectivement. Or pour  $\Delta n$  au voisinage de 0,

$$\frac{2n_e}{n_e^2 - n_o^2} \sim \frac{1}{\Delta n} \quad \text{et} \quad \frac{n_e^2 - n_o^2}{2n_o} \sim \Delta n \quad (32)$$

donc la différence entre les valeurs de  $E_{\perp}/E_{\parallel}$  données par les expressions approchées (8) et rigoureuses (30) ne sont sensibles que si on examine ces expressions avec des

approximations plus fines. Ainsi, quand la précision des approximations ci-dessus est suffisante, on peut se contenter de l'approche dynamique (approximation BKW) et dire que E1 et E2 sont orthogonales.

## CONCLUSION

Au terme de notre comparaison de l'étude dynamique (BKW) et de l'étude rigoureuse de la propagation dans un milieu uniaxe nématique torsadé, nous pouvons retenir deux conclusions importantes sur les écarts à l'approximation BKW concernant les propriétés des polarisations invariantes E1 et E2 : ils sont sensibles quant à leur ellipticité si on veut l'exprimer mieux qu'à l'ordre 1 en  $\gamma$  (composé ensuite avec un ordre 1 en  $\Delta n$ ) ; quant à la différence des carrés des indices associés à E1 et E2, des écarts sont sensibles si on veut l'exprimer mieux qu'à l'ordre total 3 en  $(\gamma, \Delta n)$ . La disparité entre les niveaux de ces écarts nous semble remarquable.

De plus, une connaissance précise de E1 ou E2 nous permet de concevoir une variante d'afficheur avec une lame de nématique torsadé aussi fine que l'on veut (tant qu'elle reste assez épaisse pour autoriser une étude macroscopique où la notion de tenseur permittivité est pertinente), donc sans être contraint par la limite inférieure tirée de la formule approximative de Gooch-Tarry ! Il nous suffit d'adapter précisément à l'épaisseur de lame voulue le polariseur et l'analyseur, qui ne sont plus rectilignes dans notre variante ; contrairement à ce qui se passe dans le calcul des épaisseurs de lame acceptables pour les afficheurs classiques d'après la formule de Gooch-Tarry, la valeur de la différence des indices associés à E1 et E2 est inutile pour calculer notre variante d'afficheur – donc la bonne performance que nous révélons pour l'approximation BKW quant à cette différence d'indices ne sera pas exploitée ici.

Bien sûr, si on veut profiter de la connaissance précise de E1 ou E2 pour amincir encore les afficheurs, il faudra que le gain d'épaisseur de nématique réalisé ne soit pas complètement annulé par l'ajout de lames quart d'onde intervenant dans la constitution traditionnelle d'un polariseur et d'un analyseur elliptiques. De nouveaux modèles de polariseurs et analyseurs seront alors bienvenus.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. Yeh and C. Gu, *Optics of Liquid Crystal Display*, New York : Wiley, 1999.
- [2] C. Mauguin, « Sur la représentation géométrique de Poincaré relative aux propriétés optiques des piles de lames », *Bull. Soc. Fr. Minéral.*, **34**, p. 6-15, 1911.

- [3] R. M. A. Azzam and N. M. Bashara, "Simplified Approach to the Propagation of Polarized Light in Anisotropic Media – Application to Liquid Crystals", *J. Opt. Soc. Am.*, **62**, p. 1252-1257, 1972.
- [4] R. M. A. Azzam and N. M. Bashara, "The Effect of an Optical System in the Complex-Plane and the Poincaré-Sphere Representations", *Opt. Commun.*, **5**, p. 319-322, 1972.
- [5] Par exemple : A. Messiah, *Mécanique quantique*, tome 1, Paris : Dunod, 1962, chapitre 6.
- [6] C. H. Gooch and H. A. Tarry, "The optical properties of twisted nematic liquid crystal structures with twist angles  $\leq 90$  degrees", *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **8**, p. 1575-1584, 1975.
- [7] H. de Vries, "Rotatory power and other optical properties of certain liquid crystals", *Acta Crystallogr.*, **4**, p. 219-226, 1951.
- [8] E. B. Priestley, "Introduction to the Optical Properties of Cholesteric and Chiral Nematic Liquid Crystals", in E. B. Priestley, P. J. Wojtowicz and P. Sheng (éd.), *Introduction To Liquid Crystals*, New York : Springer / Plenum Press, 1974.
- [9] P.-G. de Gennes, *The Physics of Liquid Crystals*, Londres : Oxford U. Press, 1974, chapitre 6.
- [10] V. A. Belyakov and *al.*, "Optics of cholesteric liquid crystals", *Sov. Phys. Usp.*, **22**, p. 64-88, 1979.
- [11] R. H. Good Jr. and A. Karali, "Transmission of light through a slab of cholesteric liquid crystal", *J. Opt. Soc. Am. A*, **11**, p. 2145-2155, 1994.
- [12] S. M. Feng, Y. H. Shan and F. Zhang, "The ultra slow light in a cholesteric liquid crystal given by similar Schrödinger equation", *Optik*, **125**, p. 536-539, 2014.
- [13] P. Oswald et P. Pieranski, *Les cristaux liquides – Concepts et propriétés physiques illustrés par des expériences*, tome 1, Paris : Gordon and Breach, 2000.
- [14] M. Born and E. Wolf, *Principles of optics – Electromagnetic theory of propagation interference and diffraction of light*, Oxford : Pergamon, 1980.
- [15] S. Huard, *Polarisation de la lumière*, Paris : Masson, 1994.
- [16] J.-Ph. Pérez, *Optique géométrique et ondulatoire avec 200 exercices et problèmes résolus*, Paris : Masson, 1994.
- [17] C. Brosseau, *Fundamentals of Polarized Light – A Statistical Optics Approach*, New York : Wiley Interscience, 1998.

- [18] P. Chavel, L. Dettwiller and J. Taboury, “Coherence in polarised light interferometers”, *ICO Satellite Conf. on Education and Training in Optics (Pécs, Hungary, August 1993)*.
- [19] L. Dettwiller, « Franges d’interférence de visibilité parfaite avec une lame cristalline sans polariseur ni analyseur ; étude de la cohérence de polarisation », *J. Opt. (Paris)*, **24**, p. 165-171, 1993.
- [20] L. Dettwiller, « Théorie de la cohérence de polarisation avec les matrices de Jones et la sphère de Poincaré – Applications », *Ann. Phys. Fr.*, **24**, p. 51-84, 1999.
- [21] L. Dettwiller, « Interférences d’états de polarisation : étude générale », *Pure Appl. Opt.*, **6**, p. 41-53, 1997.
- [22] H. G. Jerrard, “Transmission of Light through Birefringent and Optically Active Media : the Poincaré Sphere”, *J. Opt. Soc. Am.*, **44**, p. 634-640, 1954.
- [23] L. Dettwiller, “General expression of light intensity emerging from a linear anisotropic device using Stokes parameters”, *J. Mod. Opt.*, **42**, p. 841-848, 1995.



**Luc DETTWILLER**

*Professeur en PC\**

Lycée Blaise Pascal

Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme)