



HAL
open science

Comparaison de techniques de calcul de diffraction - I. Application aux réseaux zonés et à leur apodisation longitudinale

Luc Dettwiller, Cédric Mulet-Marquis, Thomas Robin

► **To cite this version:**

Luc Dettwiller, Cédric Mulet-Marquis, Thomas Robin. Comparaison de techniques de calcul de diffraction - I. Application aux réseaux zonés et à leur apodisation longitudinale. *Le Bulletin de l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie*, 2018, 112 (1007 (octobre 2018)), pp.1079-1112. sfo-01930390

HAL Id: sfo-01930390

<https://hal-sfo.ccsd.cnrs.fr/sfo-01930390>

Submitted on 21 Nov 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

Comparaison de techniques de calcul de diffraction

Partie 1 : Application aux réseaux zonés et à leur apodisation longitudinale

par **Luc DETTWILLER**

Lycée Blaise Pascal - 63037 Clermont-Ferrand Cedex
luc.dettwiller@ac-clermont.fr

Cédric MULET-MARQUIS et **Thomas ROBIN**

Département mesures physiques
Institut universitaire de technologie (IUT) - 86100 Châtellerault
cedric.mulet.marquis@univ-poitiers.fr
thomas.robin@etu.univ-poitiers.fr

E^{N PARTANT DE LA PREMIÈRE FORMULE} scalaire de diffraction de Rayleigh-Sommerfeld qui est une des plus rigoureuses (car elle ne fait qu'une approximation de champ donné), nous rappelons que son intégration est aisée sur l'axe Oz de symétrie de révolution d'un obstacle recevant une onde incidente sphérique de centre sur Oz – ou à la limite une onde plane se propageant selon Oz. Cela nous permet d'étudier la diffraction par des réseaux de Soret dans le domaine résonant qui est typique de l'acoustique, de préciser l'anomalie de phase au voisinage d'un point de convergence, de concevoir des réseaux zonés qui apodisent longitudinalement, et de comparer les résultats de la première formule de Rayleigh-Sommerfeld avec ceux de la formule plus approximative de Fresnel.

INTRODUCTION

Les moyens théoriques d'étude de la diffraction sont assez variés, selon les hypothèses sous-jacentes et le degré d'approximation adopté [1-12]. Dans le cas où on considère une onde monochromatique scalaire régie par l'équation d'Helmholtz, une formule féconde donnée dès 1897 par John William Strutt Rayleigh puis Arnold Sommerfeld [1-5] permet d'exprimer en un point quelconque (après l'obstacle diffractant) cette onde en fonction de sa distribution sur le plan (π) de l'obstacle diffractant. Il est rare que cette formule soit utilisée rigoureusement : la plupart du temps, diverses approximations sont introduites, dans le but de faciliter le calcul ; elles sont classiques et légitimes dans la plupart des montages d'optique. Il est bien connu cependant que dans certains cas théoriques, les approximations dites de Fresnel sont inutilisables, notamment lorsque l'obstacle diffractant laisse passer entièrement l'onde (la lumière en optique) sur une portion non bornée de (π) : elles conduisent à des intégrales divergentes.

Cela se produit par exemple avec un réseau de Soret ([13], p. 179-182 ; [14]) non diaphragmé, *i.e.* un ensemble fini d'anneaux concentriques opaques (avec un éventuel disque opaque central en plus) laissant passer la lumière entre eux sur des zones de même aire, et à l'extérieur. Un tel réseau a été présenté pour la première fois par Jacques-Louis Soret en 1875, dont la publication originale [15] a été reprise par les *Poggendorff's Annalen* [16], et par les *Comptes Rendus de l'Académie des sciences* [17]. La diffraction par ces dispositifs leur permet de jouer le rôle de lentilles, malheureusement multifocales (à cause de la multiplicité des ordres de diffraction) et entachées d'une forte aberration chromatique inverse (car l'effet de focalisation dû à la diffraction croît avec la longueur d'onde) ; cela reste très intéressant expérimentalement dans des domaines spectraux, comme par exemple les rayons X, où on ne dispose guère de matériaux permettant de fabriquer des lentilles. Des réseaux de Soret sont donc utilisés pour réaliser des microscopes à rayons X [18], ou pour focaliser des ondes de matière [19], et aussi pour détecter des exoplanètes [20-21] car ils fournissent des images à haute résolution et forte dynamique. La focalisation des ultrasons par de tels réseaux peut faire l'objet de belles séances de travaux pratiques [22].

Le but de notre article est d'appliquer au cas des réseaux zonés (*i.e.* constitués d'anneaux opaques concentriques aussi – mais d'aires *a priori* différentes – et d'un éventuel disque central opaque) une ruse permettant de calculer rigoureusement la première intégrale de Rayleigh-Sommerfeld sur l'axe Oz de symétrie de révolution d'un tel obstacle recevant une onde plane en incidence normale, ou une onde sphérique dont le centre est sur Oz ; vu les applications de cette situation à certaines observations astronomiques [20-21], cela nous paraît intéressant. Malheureusement, les formules rigoureuses obtenues sont assez peu parlantes, et des propriétés physiquement intéressantes, comme l'apparition de maxima d'intensité vibratoire en certains points, sont difficiles à voir sans passer par le tracé numérique d'un graphe ; par contre, dans le cadre classique des approximations de Fresnel, ces propriétés sont analytiquement manifestes. C'est pourquoi nous utiliserons ces deux approches à tour de rôle, et si possible nous comparerons leurs résultats – ce qui est relativement rare dans la littérature.

D'abord, nous rappellerons la première formule de Rayleigh-Sommerfeld dans sa version fondamentale, et nous montrerons sur un cas très simple le danger de diverses approximations classiques, ce qui permettra de mieux savoir quand on peut ou non les utiliser. Ensuite, nous étudierons la diffraction (y compris l'anomalie de phase au voisinage d'un « point de convergence géométrique ») sur l'axe Oz d'un réseau de Soret recevant une onde ayant sa source à l'infini ou à distance finie sur Oz ; si le réseau n'est pas diaphragmé, on ne peut pas directement utiliser les approximations de Fresnel et nous verrons comment contourner cette difficulté, alors que s'il est diaphragmé on peut le cas échéant les utiliser directement et nous trouverons que les positions des annulations de l'onde sur l'axe sont décalées par rapport au cas précédent. Enfin, nous

pourrons même calculer explicitement les caractéristiques d'un réseau zoné qui apodise la distribution d'intensité vibratoire sur Oz – cette quête de l'apodisation longitudinale est inédite à notre connaissance. Toute cette étude théorique sera complétée par un second article plus expérimental présentant diverses situations de diffraction d'ultrasons, étudiables par notre formalisme dans ce cas difficile qu'est le cas dit « résonant », où les distances sont de l'ordre de la longueur d'onde.

1. RAPPEL DE LA PREMIÈRE FORMULE DE DIFFRACTION DE RAYLEIGH-SOMMERFELD

1.1. Énoncé

Cette formule traduit, dans un milieu linéaire local homogène et isotrope, non seulement les propriétés de la diffraction, mais encore celles de la propagation d'une onde scalaire, en exprimant son amplitude complexe A pour une longueur d'onde λ à laquelle le milieu est transparent. Elle découle du théorème de Green [4, 6] et elle donne, sous une forme intégrale faisant intervenir la distribution de A sur les points P d'un plan (π) , la valeur $A(M)$ de l'amplitude complexe (avec la convention $e^{-i\omega t}$) en un point M situé après (π) dans le sens de propagation de l'onde [1-5] :

$$A(M) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{(\pi)} A(P) \cos \theta \frac{1}{ik} \frac{d}{dPM} \left(\frac{e^{ikPM}}{PM} \right) d^2 S(P) \quad (1)$$

où θ désigne l'angle entre \mathbf{PM} et la normale \mathbf{u}_z à (π) dans le sens de propagation (cf. figure 1), et $k := 2\pi/\lambda$. Cette formule (1), dite de Rayleigh-Sommerfeld (avec son facteur d'inclinaison $\cos \theta$), est heureusement auto-consistante⁽¹⁾ [5] ; ce n'est pas le cas de la formule de Kirchhoff [4-6] qui comporte le facteur d'inclinaison $(1 + \cos \theta)/2$ au lieu du facteur $\cos \theta$ et qui découle comme (1) de l'équation d'Helmholtz, mais en adoptant des conditions aux limites indirectement incompatibles entre elles – contrairement à la première formule (1) de Rayleigh-Sommerfeld.

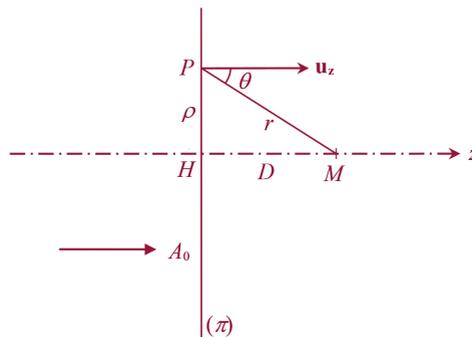


Figure 1 - Notations pour la formule de diffraction de Rayleigh-Sommerfeld.

(1) (i.e. elle redonne bien $A(P)$ quand on prend $M = P$).

Remarque : approximation de champ donné

Cette formule (1) peut sembler inintéressante si la distribution de $A(P)$ sur (π) n'est pas connue. Pour pallier cet inconvénient, on fait presque systématiquement une approximation dite « de champ donné » : on considère qu'on connaît l'onde incidente $A_0(P)$ en tout point de (π) au moins, et qu'on peut y caractériser l'obstacle diffractant par son coefficient de transmission $\tau(P)$, à la longueur d'onde λ ; alors on admet que $A(P) \cong \tau(P) A_0(P)$ juste après l'obstacle, et avec (1) on obtient ainsi la première formule de Rayleigh-Sommerfeld. C'est bien une approximation (on sait que par diffraction on peut avoir $A(P)$ non nul là où $\tau(P)$ est nul !) ; elle est valable pour les calculs où M se trouve à une distance de l'obstacle grande devant λ . Si à la place de la première approximation ci-dessus on avait admis $\frac{\partial A}{\partial z}(P) \cong \tau(P) \frac{\partial A_0}{\partial z}(P)$ – i.e. la « seconde approximation de champ donné » – reliant les dérivées normales à (π) , on aurait alors utilisé une autre fonction de Green dans le théorème du même nom [4, 6] pour obtenir la seconde formule de Rayleigh-Sommerfeld [4-5].

1.2. Tests sur des cas connus et sans obstacle

En l'absence d'obstacle sur (π) , non seulement on a $\tau(P) = 1 \quad \forall P \in (\pi)$, mais encore les formules donnant A et $\partial A / \partial z$ sur (π) en fonction de A_0 sont rigoureuses : les champs donnés ne sont plus approximatifs. Dans ce cas, les résultats des formules de Rayleigh-Sommerfeld doivent être complètement rigoureux.

1.2.1. Cas d'une onde plane incidente normalement sur (π)

On considère une onde incidente plane, et on se restreint au cas où (π) est un de ses plans d'onde ; alors A y est uniforme et vaut A_0 . Ce cas ne satisfait pas la condition de rayonnement de Sommerfeld, qui sous-tend les formules intégrales de Kirchhoff et de Rayleigh-Sommerfeld à titre de condition suffisante [4, 6]. Mais cette condition n'est pas nécessaire, comme nous allons le voir tout de suite en montrant que la première formule de Rayleigh-Sommerfeld donne quand même le bon résultat, ce qui n'est pas le cas avec la formule de Kirchhoff, car la fonction de Green qui lui est associée est moins féconde⁽²⁾.

Puisque $\cos \theta = D/r$ (cf. figure 1), la propagation à la distance $D = HM$ du plan (π) se traduit, selon la première formule de Rayleigh-Sommerfeld (1), par

$$A(M) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty A_0 \frac{D}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) 2\pi \rho \, d\rho \quad (2)$$

(2) Si pour un test plus sophistiqué on considérait une onde incidente évanescente, comme elle satisfait la condition de rayonnement de Sommerfeld les formules de Kirchhoff et de Rayleigh-Sommerfeld donneraient le bon résultat [23].

où $r := PM$ et $\rho := HP$ (cf. figure 1). Or $r^2 = \rho^2 + D^2$ donc $\rho \frac{d\rho}{dr} = r$ et le changement de variable avec r donne

$$\begin{aligned} A(M) &= -A_0 \int_D^\infty \frac{D}{r} \left(\frac{d}{dr} \frac{e^{ikr}}{r} \right) r dr = -A_0 \int_D^\infty D \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) dr \\ &= -A_0 D \left[\frac{e^{ikr}}{r} \right]_D^\infty = A_0 e^{ikD} \end{aligned} \quad (3)$$

comme prévu.

Comparaison avec les approximations classiques

Il est intéressant de noter que si on avait effectué l'approximation traditionnelle (et quasi systématique) de la diffraction aux distances grandes devant λ en remplaçant $\frac{1}{ik} \frac{d}{dPM} \left(\frac{e^{ikPM}}{PM} \right)$ par $\frac{e^{ikPM}}{PM}$, on aurait obtenu un résultat différent (donc erroné) ; et si on avait omis en plus le facteur d'inclinaison $\cos \theta = D/r$, on aurait obtenu une intégrale divergente ! Il en est de même si on passait enfin aux approximations de Fresnel, consistant à remplacer en plus $\frac{e^{ikPM}}{PM}$ par

$$\frac{1}{HM} \exp \left[ik HM \left(1 + \frac{HP^2}{2HM^2} \right) \right] = \frac{e^{ikD}}{D} \exp \left(ik \frac{\rho^2}{2D} \right).$$

Si en plus il y a le coefficient de transmission $\tau(P)$ non-uniforme, dans les approximations de Fresnel on montre facilement [7] qu'elles impliquent l'omission des ondes planes évanescentes dues aux hautes fréquences spatiales de $\tau(P)$; c'est encore le cas [24-25] quand on remplace seulement $\frac{1}{ik} \frac{d}{dPM} \left(\frac{e^{ikPM}}{PM} \right)$ par $\frac{e^{ikPM}}{PM}$, mais pas quand on utilise la formule (1) qui est auto-cohérente – donc qui tient forcément compte des composantes évanescentes de l'amplitude complexe juste après l'obstacle diffractant (cf. aussi la note 1 à ce sujet).

1.2.2. Cas d'une onde sphérique incidente sur (π)

Dans le cas où l'onde incidente sur (π) est sphérique d'origine S à une distance d avant le réseau, on a

$$A(M) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{(\pi)} \frac{A_S e^{ikSP}}{SP} \cos \theta \frac{1}{ik} \frac{d}{dPM} \left(\frac{e^{ikPM}}{PM} \right) d^2 S(P) \quad (4)$$

où A_S est indépendant de P . Quand les points S et M sont sur un axe Oz normal à (π) , il vient

$$A(M) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{A_S e^{ikSP}}{SP} \frac{D}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) 2\pi \rho d\rho = -A_S D \int_D^\infty \frac{e^{ikSP}}{SP} \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) dr \quad (5)$$

$$\text{où} \quad SP = \sqrt{\rho^2 + d^2} = \sqrt{r^2 + d^2 - D^2} \quad (6)$$

donc
$$d SP/dr = r/SP. \quad (7)$$

On peut vérifier qu'une primitive [26] de $\frac{e^{ikSP}}{SP} \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right)$ en tant que fonction de r est $\frac{e^{ik(SP+r)}}{(SP+r)r}$, puisque sa dérivée logarithmique s'écrit

$$ik \left(1 + \frac{dSP}{dr} \right) - \frac{1}{SP+r} \left(1 + \frac{dSP}{dr} \right) - \frac{1}{r} = ik \left(1 + \frac{r}{SP} \right) - \frac{1}{SP} - \frac{1}{r} = \left(\frac{SP+r}{SP} \right) \left(ik - \frac{1}{r} \right) \quad (8)$$

et donc la dérivée de $\frac{e^{ik(SP+r)}}{(SP+r)r}$ est bien

$$\left(\frac{SP+r}{SP} \right) \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ik(SP+r)}}{(SP+r)r} = \frac{e^{ikSP}}{SP} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{e^{ikSP}}{SP} \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right). \quad (9)$$

Comme attendu, l'expression (5) donne ainsi

$$A(M) = -A_s D \left[\frac{e^{ik(SP+r)}}{(SP+r)r} \right]_D^\infty = A_s D \left[\frac{e^{ik(d+D)}}{(d+D)D} \right] = A_s \frac{e^{ik(d+D)}}{d+D}. \quad (10)$$

Pour le cas où l'onde sphérique incidente sur le réseau est convergente au point S de cote d – sur Oz dont l'origine O est sur (π) – dans (4) il faut changer SP en $-SP$, et au lieu du résultat de (10) on trouve naturellement $A_s \frac{e^{ik(D-d)}}{D-d}$.

1.3. Étude sur l'axe de symétrie de révolution d'un obstacle diffractant recevant une onde sphérique d'origine sur l'axe

Nous nous restreignons aux cas où (π) contient un obstacle diffractant à symétrie de révolution d'axe Oz (identique à Hx) et nous n'étudions que sur Oz l'onde diffractée qui se trouve après (π) . Comme le coefficient de transmission en P s'écrit $\tau(\rho)$ à cause de la symétrie, l'expression (1) se simplifie :

$$A(M) = -A_s D \int_D^\infty \frac{e^{ikSP}}{SP} \tau(\rho) \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) dr. \quad (11)$$

À la limite où d tend vers l'infini, on retrouve le cas d'une onde plane incidente normalement, en posant $\lim_{d \rightarrow \infty} A_s e^{ikd}/d = A_0$:

$$A(M) = -A_0 D \int_D^\infty \tau(\rho) \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) dr. \quad (12)$$

Quand $\tau(\rho)$ est une fonction en escalier ayant un assez grand nombre de discontinuités, l'obstacle est appelé un réseau zoné. Mais dans le cas plus simple où $\tau(\rho)$ vaut 1 si ρ est inférieur à ρ_1 et 0 sinon, l'obstacle est une ouverture circulaire d'axe Oz ; il est remarquable qu'on puisse très facilement étudier la diffraction sur Oz , et nous le

ferons dans notre second article⁽³⁾.

2. APPROCHES ANALYTIQUES DE LA DIFFRACTION SUR L'AXE D'UN RÉSEAU DE SORET NON DIAPHRAGMÉ

Précisons les notations pour un réseau de Soret : il est constitué d'un éventuel disque central opaque de centre O (confondu avec H) et de rayon ρ_0 , entouré d'un ensemble de N anneaux opaques concentriques de même aire ; le rayon intérieur de l'anneau numéro n vaut $\sqrt{\rho_0^2 + (2n-1)\rho_1^2}$ (avec $\rho_1 \geq \rho_0 \geq 0$), et son rayon extérieur $\sqrt{\rho_0^2 + 2n\rho_1^2}$, donc leur aire commune vaut $\pi\rho_1^2$. Ce formalisme inclut le cas des réseaux de Soret à centre transparent : pour les étudier il suffit de poser $\rho_0 = 0$.

2.1. Étude rigoureuse à toute distance, dans le cas d'une onde incidente sphérique d'origine sur l'axe ou d'une onde plane d'incidence normale

2.1.1. Expression analytique

Avec un tel réseau, la relation (11) et la primitive $\frac{e^{ik(SP+r)}}{(SP+r)r}$ de $\frac{e^{ikSP}}{SP} \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right)$ donnent immédiatement

$$\frac{A(M)}{A_S D} = - \left[\frac{e^{ik(SP+r)}}{(SP+r)r} \right]_{\sqrt{D^2 + \rho_0^2}}^{\sqrt{D^2 + \rho_0^2 + \rho_1^2}} - \left[\frac{e^{ik(SP+r)}}{(SP+r)r} \right]_{\sqrt{D^2 + \rho_0^2 + \rho_1^2}}^{\sqrt{D^2 + \rho_0^2 + 3\rho_1^2}} - \dots - \left[\frac{e^{ik(SP+r)}}{(SP+r)r} \right]_{\sqrt{D^2 + \rho_0^2 + 2N\rho_1^2}}^{\infty}. \quad (13)$$

C'est une somme de $N+1$ variations, les N premières correspondant aux N parties transparentes du réseau, et la dernière correspondant à l'extérieur du réseau jusqu'à l'infini – car on considère ici le cas où le réseau n'est pas diaphragmé. En développant ces variations, on obtient l'expression plus compacte

$$\frac{A(M)}{D} = \sum_{j=0}^{2N} (-1)^j \frac{A_S e^{ik\sqrt{d^2 + \rho_0^2 + j\rho_1^2}}}{\sqrt{d^2 + \rho_0^2 + j\rho_1^2} + \sqrt{D^2 + \rho_0^2 + j\rho_1^2}} \frac{e^{ik\sqrt{D^2 + \rho_0^2 + j\rho_1^2}}}{\sqrt{D^2 + \rho_0^2 + j\rho_1^2}}. \quad (14)$$

C'est un résultat rigoureux selon la première formule de Rayleigh-Sommerfeld : il ne nécessite même pas de supposer D ou d grand devant $\sqrt{\rho_0^2 + 2N\rho_1^2}$ ni devant λ ! Il recèle seulement la première approximation de champ donné (et l'approximation scalaire dans le cas des ondes électromagnétiques), ainsi que l'hypothèse d'une onde incidente sphérique d'origine sur Oz .

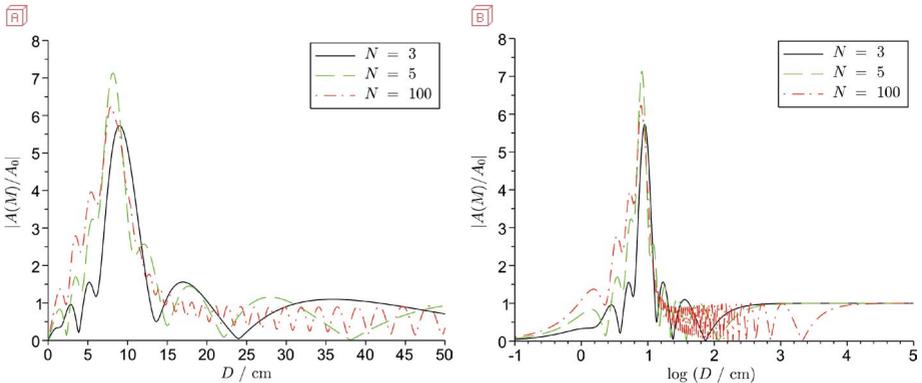
(3) La deuxième partie paraîtra dans *Le Bup* n° 1008 de novembre 2018.

2.1.2. Étude graphique des variations de l'amplitude réelle dans le cas d'une onde incidente plane

C'est le cas où d tend vers l'infini, et

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{A_S e^{i k \sqrt{d^2 + \rho_0^2 + j\rho_1^2}}}{\sqrt{d^2 + \rho_0^2 + j\rho_1^2} + \sqrt{D^2 + \rho_0^2 + j\rho_1^2}} = \lim_{d \rightarrow \infty} A_S e^{i k d} / d = A_0.$$

Illustrons alors l'allure de $|A(M)/A_0|$ en fonction de D pour différentes configurations. Nous commençons par un cas rencontré en acoustique (car dans cette discipline on mesure facilement les variations relatives d'amplitude des ondes) : les valeurs de ρ_0 et ρ_1 ne sont pas très différentes de la longueur d'onde et celles de D ne sont pas nécessairement très grandes devant ρ_0 et ρ_1 . Pour fixer les idées, prenons $\rho_0 = \rho_1 = 3$ cm ($\rho_0 = \rho_1$ donne un réseau de Soret dont les différents rayons varient comme les racines des nombres entiers) et $\lambda = 0,85$ cm (longueur d'onde pour des ultrasons à 40 kHz dans l'air) qui est du même ordre de grandeur – c'est donc un cas dit «résonant», où peu d'approximations sont disponibles. Les figures 2A et 2B illustrent les courbes obtenues pour $|A(M)/A_0|$ avec différentes valeurs du nombre N d'anneaux opaques du réseau (ici $N = 3$ puis $N = 5$ et $N = 100$).



Figures 2A et 2B - Module de $A(M)/A_0$ déduit de l'expression (14) dans un cas typique de l'acoustique ($\rho_0 = \rho_1 = 3$ cm, $\lambda = 0,85$ cm). Les courbes obtenues pour $N = 3$ puis 5 et 100 anneaux opaques sont respectivement en trait plein noir, en pointillé vert et en trait mixte rouge. Pour la figure 2A, l'échelle des abscisses est linéaire ; elle est logarithmique sur la figure 2B.

Dans le domaine où les approximations traditionnelles sont vérifiées (*i.e.* $D^2 \gg \rho_0^2 + 2N\rho_1^2 \gg \lambda^2$), nous voyons que $|A(M)/A_0|$ passe classiquement par des quasi-annulations pour certaines valeurs de D conformément à ce que prédit l'expression (25) au sous-paragraphe 2.2.1. ; notons surtout la profonde altération de cet effet quand D sort de ce domaine traditionnel.

Par ailleurs, nous constatons que l'abscisse et l'ordonnée du maximum principal

varient assez peu avec le nombre d'anneaux.

Enfin, nous observons que *l'augmentation de N ne semble pas affiner le pic principal, et ici il reste unique (au lieu de donner plusieurs pics principaux de hauteurs très voisines comme dans le cas où leur distance au réseau est grande devant λ , ρ_0 et $N\rho_1$ - cf. figure 5, page ci-après).*

La taille des anneaux va bien sûr changer l'abscisse des maxima secondaires et des minima. Plus les valeurs de ρ_0 et ρ_1 sont élevées, et plus le maximum principal est obtenu pour une valeur élevée de D comme on pouvait s'y attendre, et comme le montre la figure 3.

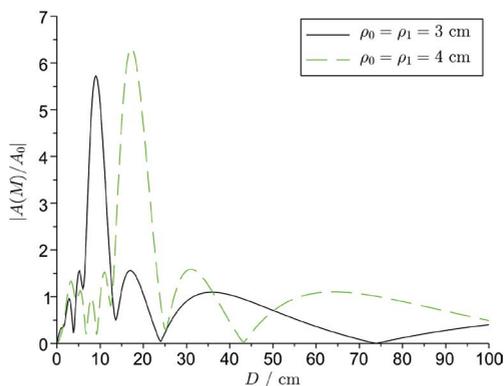


Figure 3 - Effet de la modification des paramètres ρ_0 et ρ_1 . La figure en trait plein noir correspond au cas où $\rho_0 = \rho_1 = 3$ cm, la figure en pointillé vert à celui où $\rho_0 = \rho_1 = 4$ cm. Dans les deux cas on a $\lambda = 0,85$ cm et $N = 3$.

Avoir un disque opaque ou transparent au centre du réseau modifie peu la figure obtenue (maximum principal à la même abscisse et quasiment la même ordonnée), sauf auprès du réseau bien sûr, comme le montre la figure 4 (cf. page ci-après). Pour un réseau à centre opaque $|A(M)/A_0| \rightarrow 0$ pour $D \rightarrow 0^+$, alors que pour un réseau à centre transparent $|A(M)/A_0| \rightarrow 1$ (cf. l'auto-cohérence des formules de Rayleigh-Sommerfeld [5]) avec des oscillations plus nombreuses ; mais pour $\rho_0 \neq 0$

$$\frac{d}{dD} \frac{A}{A_0} (0^+) = \sum_{j=0}^{2N} (-1)^j \frac{e^{i k \sqrt{\rho_0^2 + j\rho_1^2}}}{\sqrt{\rho_0^2 + j\rho_1^2}} \neq 0 \quad (15)$$

contrairement aux conditions aux limites de Kirchoff.

La figure 5 (cf. page ci-après) illustre un cas traditionnel de l'optique, donc où l'on a $D^2 \gg \rho_0^2 + 2N\rho_1^2 \gg \lambda^2$. Nous prenons pour cet exemple $\rho_0 = \rho_1 = 0,05$ cm et $\lambda = 633$ nm avec $N = 3$ anneaux opaques, et nous étudions encore $|A(M)/A_0|$ pour comparer avec le cas acoustique précédent. Contrairement à ce que montrait celui-ci,

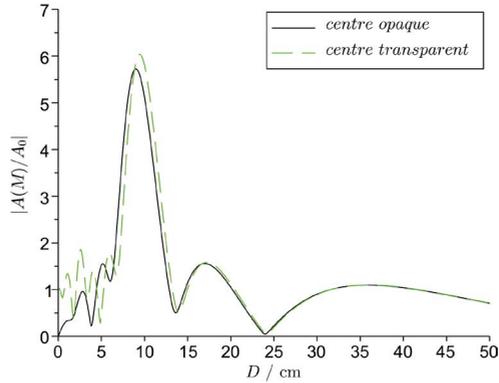


Figure 4 - Comparaison entre un réseau à centre opaque ($\rho_0 = \rho_1 = 3$ cm, trait plein noir) et un réseau à centre transparent ($\rho_0 = 0$ et $\rho_1 = 3$ cm, pointillé vert), pour $\lambda = 0,85$ cm et $N = 3$ anneaux opaques.

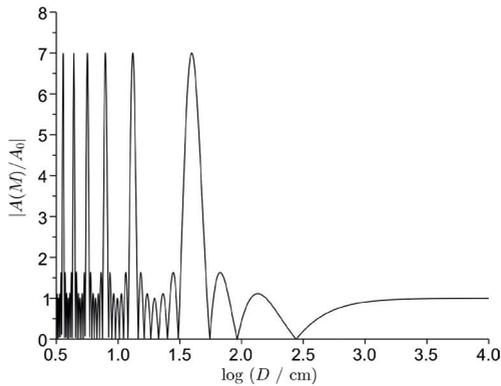


Figure 5 - Module de $A(M)/A_0$ (proportionnel à la racine carrée de l'intensité vibratoire) dans un cas traditionnel de l'optique : $\rho_0 = \rho_1 = 0,05$ cm, $\lambda = 633$ nm et $N = 3$. L'abscisse est en échelle logarithmique pour permettre de mieux visualiser la figure.

de nombreux pics principaux – tous quasiment de même hauteur – sont présents dans ce cas optique. Une figure obtenue pour un nombre d’anneaux différents montrerait que la hauteur des pics principaux dépend fortement de N . Les pics principaux sont de plus en plus resserrés au fur et à mesure que l’on s’approche du réseau, leur écart étant indépendant de N .

2.1.3. Remarque : intensité vibratoire au centre de la tache de Poisson ; conséquences

Dans le cas où $N = 0$, la relation (13) permet de contrôler très facilement la célèbre prédiction – bien antérieure aux formules de Rayleigh-Sommerfeld – faite par Poisson (et considérée par lui comme un argument contre la théorie ondulatoire de la diffraction qu’il devait évaluer, celle proposée par Fresnel dans son illustre mémoire de 1818) : il doit y avoir, centrée dans l’ombre à distance D quelconque d’un disque opaque éclairé par un faisceau collimaté, une tache dont l’intensité vibratoire I_p au centre est la même qu’en l’absence de disque (notée I_0) [24–25] ! Or pour ce cas, notre technique de calcul donne

$$\begin{aligned} \frac{I_p}{I_0} &= \left| \frac{A(M)}{A_s/(d+D)} \right|^2 = \left| - (d+D) D \left[\frac{e^{i k (SP+r)}}{(SP+r) r} \right]_{\sqrt{D^2+\rho_0^2}}^{\infty} \right|^2 \\ &= \left(\frac{d+D}{\sqrt{d^2+\rho_0^2} + \sqrt{D^2+\rho_0^2}} \right)^2 \frac{D^2}{D^2+\rho_0^2} < 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Évidemment, Poisson s’était placé dans le cadre des approximations de Fresnel, où $\rho_0^2 \ll d^2$, D^2 : alors l’intensité vibratoire en tout point de l’axe est quasiment égale à celle de l’onde incidente – plus précisément, sur Oz et pour (d, D) au voisinage de l’infini, l’amplitude complexe est équivalente à celle de l’onde incidente, donc $I_p(d, D)$ est équivalent à $I_0(d, D)$.

Dans le cas d’une onde incidente plane, I_0 est indépendant de D . Mais dans le cas d’une onde incidente sphérique divergente, I_0 est proportionnel à $1/(d+D)^2$, donc I_p tend vers zéro quand D tend vers l’infini.

2.1.4. Anomalie de phase au voisinage du maximum d’intensité vibratoire

Le long de l’axe Oz , la phase de l’onde transmise est $\arg(A)$. Si la diffraction était négligeable, *i.e.* si l’onde transmise était localement plane progressive (parce qu’elle obéirait à l’équation de l’eikonale), sa phase varierait avec D sur Oz comme une fonction affine de D , de pente k . À cause de la diffraction, l’onde émergente n’est ni une onde plane prolongeant l’onde incidente (même en se limitant aux domaines des faisceaux transmis selon l’optique géométrique), ni une onde parfaitement sphérique (même en se limitant à l’ordre de diffraction le plus intense, il n’y a pas convergence en un point au sens strict) ; alors $\arg(A) - kD$ varie avec D et mérite le nom d’« anomalie de phase ». Elle se décline sous différentes formes : le facteur de phase de Gouy [27] dans le mode gaussien fondamental d’un laser, le déphasage de Meslin ([6], p. 445–449 ;

[13], p. 59-61 et p. 95-96) à la traversée d'un point de convergence au sens des lois de l'optique géométrique (effet Gouy exploité dans un modèle de coronographe interférentiel achromatique [28], car il produit un déphasage de π , achromatique – ce qui est difficile à réaliser autrement !)..

Cet effet est maintenant facile à étudier quantitativement le long de l'axe Oz : utilisant l'expression (14), en fonction de D , nous faisons tracer $\arg(A) - kD$ (défini dans $]-\pi, \pi[$) que nous divisons par π pour faciliter la lecture de l'échelle des ordonnées – cf. la figure 6 correspondant à un cas usuel en acoustique avec une onde incidente plane. Nous observons bien sûr des discontinuités de 2π , inintéressantes, car dues à la limitation des valeurs de $\arg(A) - kD$ par l'intervalle $]-\pi, \pi[$. Plus intéressante, car typique de l'effet Gouy, est la décroissance de $\arg(A) - kD$ au voisinage du maximum d'intensité vibratoire (donc du « point de convergence géométrique ») : ce sens de variation fait que l'anomalie de phase donne ici une avance dans le sens de la propagation (*i.e.* celui de D croissant). Annexement, on observe pour l'anomalie une croissance brutale valant environ π au voisinage du point le plus sombre sur l'axe, correspondant au minimum d'intensité le plus accusé ; ce serait une discontinuité de l'anomalie si A s'annulait en changeant de signe, *i.e.* présentait une annulation de nature simple – c'est ce que donnent les approximations de Fresnel (cf. le dernier graphe de la figure 8.47 de [6]).

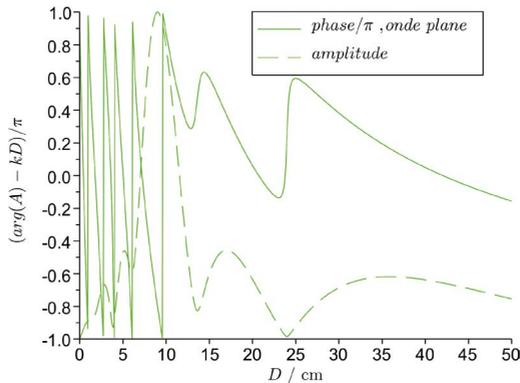
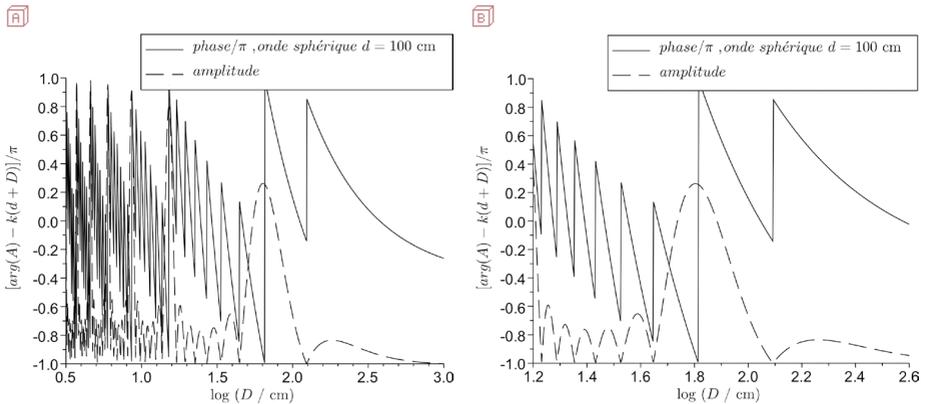


Figure 6 - Anomalie de phase (trait plein) divisée par π et module de $A(M)/A_0$ (pointillé) dans un cas typique de l'acoustique ($\rho_0 = \rho_1 = 3 \text{ cm}$, $\lambda = 0,85 \text{ cm}$, réseau de $N = 3$ anneaux opaques) avec une onde plane incidente. Hormis les discontinuités inintéressantes de $-\pi$ à $+\pi$ de $\arg(A) - kD$, noter sa décroissance au voisinage du maximum d'intensité vibratoire, puis annexement la croissance brutale au voisinage du minimum d'intensité le plus accusé.

Dans un cas typique de l'optique (cf. les figures 7A et 7B, page ci-contre), le changement notable vient de la diminution de λ : les croissances brutales de l'anomalie ont une valeur encore plus proche de π , et ressemblent presque à des discontinuités –

d'ailleurs les franges de diffraction sont axialement plus contrastées que dans le domaine résonant typique de l'acoustique.



Figures 7A et 7B (vue d'ensemble et détail) - Anomalie de phase divisée par π (trait plein) et module de $A(M)/A_0$ (pointillé) dans un cas typique de l'optique ($\rho_0 = \rho_1 = 0,05$ cm, $\lambda = 633$ nm, réseau de $N = 3$ anneaux opaques) avec une source S située à $d = 1,00$ m en avant du réseau et émettant des ondes sphériques. L'abscisse est en échelle logarithmique pour permettre de mieux visualiser la figure. Les croissances brutales de l'anomalie ressemblent plus à des discontinuités que sur la figure 6, et leurs valeurs sont plus proches de π ; les franges de diffraction sont plus contrastées axialement. Un changement de d ne modifie guère la forme du graphe de l'anomalie de phase, mais le déplace.

Les nombreuses croissances brutales et quasi discontinues de l'anomalie de phase sont classiques (cf. le dernier graphe de la figure 8.47 de [6]) sur l'axe d'un système à symétrie de révolution et dont les diaphragmes sont à bords nets – ce qui n'est pas le cas d'un faisceau gaussien [27] puisque ses bords sont flous. Si l'anomalie de phase était étudiée le long d'un axe relativement incliné par rapport à Oz (usuellement quelques degrés suffisent) mais passant quand même par le point de convergence géométrique, l'anomalie de phase se réduirait quasiment à l'avance brutale de phase valant presque π pour une variation de D dépassant légèrement la profondeur de foyer dans son voisinage ; en dehors de ce domaine, l'anomalie de phase varierait fort peu ([6], figure 8.47).

2.2. Approximations de Fresnel avec un réseau de Soret non diaphragmé

2.2.1. Cas d'une onde incidente plane

Même si $\rho_0^2 + 2N\rho_1^2 \ll D^2$, le cas du réseau de Soret est un bel exemple de situation où les approximations de Fresnel ne sont pas directement utilisables, puisque ce réseau laisse passer l'onde partout en dehors de son dernier anneau opaque, et qu'alors il n'est pas légitime de considérer que ρ est petit devant D ni qu'on pourrait rempla-

cer r par $D + \frac{\rho^2}{2D}$. Bien sûr, cette difficulté disparaît pour l'obstacle complémentaire, caractérisé par le coefficient de transmission $\tau_c = 1 - \tau$. Pour en déduire la valeur de

$$A(M) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{(x)} A_0 \tau(P) \cos \theta \frac{1}{ik} \frac{d}{dPM} \left(\frac{e^{ikPM}}{PM} \right) d^2 S(P) \quad (17)$$

en présence de ce réseau, on utilise le fait que

$$-\frac{i}{\lambda} \iint_{(x)} A_0 [\tau(P) + \tau_c(P)] \cos \theta \frac{1}{ik} \frac{d}{dPM} \left(\frac{e^{ikPM}}{PM} \right) d^2 S(P) = A_0 e^{ikD}, \quad (18)$$

donc
$$A(M) = A_0 e^{ikD} + \frac{i}{\lambda} \iint_{(x)} A_0 \tau_c(P) \cos \theta \frac{1}{ik} \frac{d}{dPM} \left(\frac{e^{ikPM}}{PM} \right) d^2 S(P) \quad (19)$$

et cette dernière intégrale peut être estimée dans le cadre des approximations de Fresnel.

À la limite où d tend vers l'infini et avec $\lim_{d \rightarrow \infty} A_S e^{ikd}/d = A_0$, on retrouve ainsi ce que donne la relation (14) dans ce cadre, où on néglige la variation avec j des dénominateurs de (14) et où on se contente d'un développement limité de celle de l'exponentielle complexe ; il vient

$$\begin{aligned} \frac{A(M)}{A_0} &\cong e^{ikD} \sum_{j=0}^{2N} (-1)^j \exp \left(ik \frac{\rho_0^2 + j\rho_1^2}{2D} \right) \\ &= \exp \left[ik \left(D + \frac{\rho_0^2}{2D} \right) \right] \frac{1 + \exp \left(ik \frac{2N+1}{2} \frac{\rho_1^2}{D} \right)}{1 + \exp \left(ik \frac{\rho_1^2}{2D} \right)} \\ &= \exp \left[ik \left(D + \frac{\rho_0^2 + N\rho_1^2}{2D} \right) \right] \frac{\cos \frac{k(2N+1)\rho_1^2}{4D}}{\cos \frac{k\rho_1^2}{4D}}. \end{aligned} \quad (20)$$

On peut aussi appliquer les approximations de Fresnel à l'expression (13), qui est moins maniable ; mais de cette façon on voit mieux que le résultat obtenu tient compte de la diffraction par chacune des N ouvertures ainsi que par le bord extérieur du réseau, et des interférences entre les $N+1$ ondes dues à ces phénomènes. En numérotant les ouvertures de l'intérieur vers l'extérieur, on trouve qu'en M l'amplitude complexe de l'onde passant par l'ouverture numéro n s'écrit

$$\begin{aligned} A_n(M) &= A_0 e^{ikD} \left\{ \exp \left[ik \frac{\rho_0^2 + 2(n-1)\rho_1^2}{2D} \right] - \exp \left[ik \frac{\rho_0^2 + (2n-1)\rho_1^2}{2D} \right] \right\} \\ &= -2i A_0 e^{ikD} \sin \left(k \frac{\rho_1^2}{4D} \right) \exp \left[ik \frac{\rho_0^2 + (2n-1,5)\rho_1^2}{2D} \right] \\ &= \left| 2 A_0 \sin \left(k \frac{\rho_1^2}{4D} \right) \right| \exp [i\varphi_n(M)] \end{aligned} \quad (21)$$

où $\varphi_n(M)$ désigne la phase en M de cette onde :

$$\varphi_n(M) = \arg \left[-i A_0 \sin \left(k \frac{\rho_1^2}{4D} \right) \right] + k \left[D + \frac{\rho_0^2 + (2n-1,5) \rho_1^2}{2D} \right]. \quad (22)$$

La relation (20) s'écrit encore

$$A(M) \cong \sum_{n=1}^N A_n(M) + A_0 \exp \left[i k \left(D + \frac{\rho_0^2 + 2N \rho_1^2}{2D} \right) \right] \quad (23)$$

où le dernier terme est l'amplitude complexe de l'onde passant par l'extérieur du réseau et dont la phase en M vaut

$$\varphi_e(M) = \arg(A_0) + k \left(D + \frac{\rho_0^2 + 2N \rho_1^2}{2D} \right). \quad (24)$$

Les phases $\varphi_n(M)$ sont en progression arithmétique de raison $\varphi = k \rho_1^2 / D$; mais $\varphi_e(M)$ sort de cette progression arithmétique.

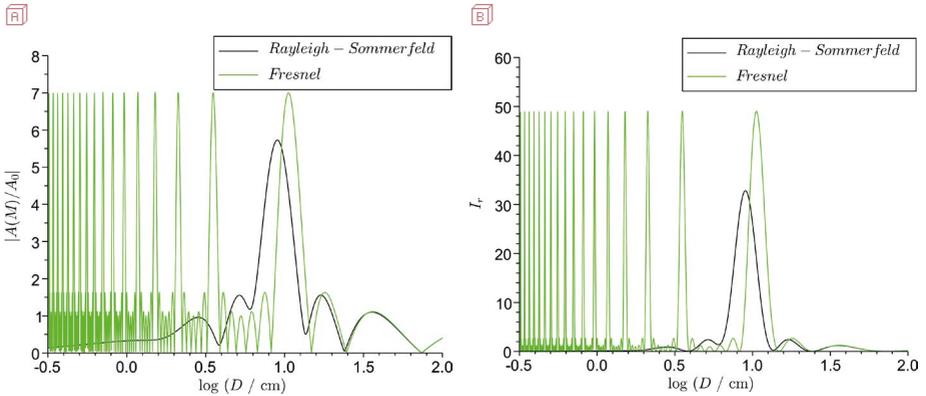
Les approximations de Fresnel permettent donc de donner (même pour des ondes autres que la lumière) l'intensité vibratoire relative I_r en M (i.e. le rapport des intensités vibratoires en M , en présence et en absence de réseau), sous une forme qui ne dépend que de N et du rayon réduit $u_1 := \rho_1 / \sqrt{\lambda D}$:

$$I_r = \left| \frac{A(M)}{A_0} \right|^2 \cong \left[\frac{\cos \frac{\pi (2N+1) u_1^2}{2}}{\cos \frac{\pi u_1^2}{2}} \right]^2 = \left[\frac{\cos \frac{(2N+1) \varphi}{4}}{\cos \frac{\varphi}{4}} \right]^2. \quad (25)$$

Notons que I_r présente un maximum pour $u_1 = 0$, i.e. $D = \infty$. De plus $\lim_{D \rightarrow \infty} I_r = 1$ (cf. figure 2B), car à l'infini tous les $A_n(M)$ sont nuls, et $A(M)$ se réduit à $A_0 \exp \left[i k \left(D + \frac{\rho_0^2 + 2N \rho_1^2}{2D} \right) \right]$; ce phénomène est similaire à celui de la tache de Poisson engendrée par le bord extérieur du $N^{\text{ème}}$ anneau opaque seulement.

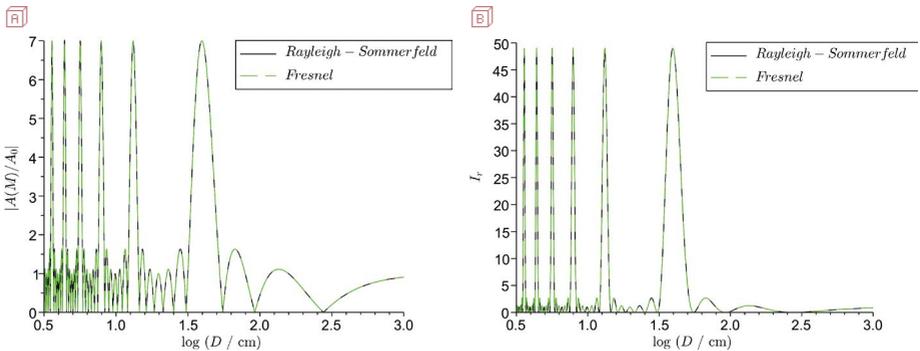
Illustrations graphiques

Comparons pour d infini le rapport $|A(M)/A_0|$, déduit de la formule (14) rigoureuse dans la théorie de Rayleigh-Sommerfeld, et ce même rapport donné dans le cadre des approximations de Fresnel par la formule (20) par exemple. Nous comparerons également les intensités vibratoires qui sont proportionnelles au carré du module des grandeurs précédentes. Un cas typique de l'acoustique est présenté sur les figures 8A (pour l'amplitude) et 8B (pour l'intensité) – cf. page ci-après. Dans cet exemple, $\rho_0 = \rho_1 = 3$ cm, $\lambda = 0,85$ cm, et le réseau comporte $N = 3$ anneaux opaques. Comme les conditions des approximations de Fresnel ne sont pas vérifiées, on constate, sans surprise, une grande différence entre les courbes. Ni le nombre, ni l'ordonnée des maxima principaux et ni leurs abscisses ne sont identiques entre les deux théories.



Figures 8A et 8B - Comparaison des graphes, en fonction de D , de l'amplitude (à gauche) et de l'intensité vibratoire (à droite) relatives prévues par la première formule de Rayleigh-Sommerfeld (courbes en trait plein noir avec $\rho_0 = \rho_1 = 3 \text{ cm}$, $\lambda = 0,85 \text{ cm}$ et $N = 3$) et dans le cadre des approximations de Fresnel (courbes en vert). L'abscisse est en échelle logarithmique pour permettre de mieux visualiser la figure.

La situation change si l'on adopte pour ρ_0 , ρ_1 et λ des valeurs d'une expérience d'optique traditionnelle au sens où $D^2 \gg \rho_0^2 + 2N\rho_1^2 \gg \lambda^2$. Comme pour la figure 5, prenons par exemple $\rho_0 = \rho_1 = 0,05 \text{ cm}$ et $\lambda = 633 \text{ nm}$, pour $N = 3$ anneaux opaques. Les figures 9A (pour l'amplitude) et 9B (pour l'intensité vibratoire) ne montrent cette fois-ci aucune différence perceptible entre les résultats des théories de Rayleigh-Sommerfeld et de Fresnel.



Figures 9A et 9B - Comparaison des graphes, en fonction de D , de l'amplitude (à gauche) et de l'intensité vibratoire (à droite) relatives prévues par la première formule de Rayleigh-Sommerfeld (courbes en trait plein noir) et dans le cadre des approximations de Fresnel (courbes en pointillé vert) avec $\rho_0 = \rho_1 = 0,05 \text{ cm}$, $\lambda = 633 \text{ nm}$ et $N = 3$. L'abscisse est en échelle logarithmique pour permettre de mieux visualiser la figure.

2.2.2. Cas d'une onde incidente sphérique

La méthode de l'obstacle complémentaire utilisée ci-dessus se transpose facilement au cas d'une onde incidente sphérique d'amplitude proportionnelle à A_S , dont l'origine S est sur l'axe du réseau, à une distance d avant celui-ci ; car dans ce cas, on sait que la relation (18) doit être remplacée par

$$-\frac{i}{\lambda} \iint_{(\pi)} \frac{A_S e^{ikSP}}{SP} [\tau(P) + \tau_c(P)] \cos \theta \frac{1}{ik} \frac{d}{dPM} \left(\frac{e^{ikPM}}{PM} \right) d^2 S(P) = \frac{A_S e^{ik(d+D)}}{d+D}. \quad (26)$$

Pour en déduire la valeur de

$$A(M) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{(\pi)} \frac{A_S e^{ikSP}}{SP} \tau(P) \cos \theta \frac{1}{ik} \frac{d}{dPM} \left(\frac{e^{ikPM}}{PM} \right) d^2 S(P) \quad (27)$$

il suffit de noter que

$$\frac{A(M)}{A_S} = \frac{e^{ik(d+D)}}{d+D} + \frac{i}{\lambda} \iint_{(\pi)} \frac{e^{ikSP}}{SP} \tau_c(P) \cos \theta \frac{1}{ik} \frac{d}{dPM} \left(\frac{e^{ikPM}}{PM} \right) d^2 S(P) \quad (28)$$

et la dernière intégrale peut être estimée dans le cadre des approximations de Fresnel :

$$\begin{aligned} \iint_{(\pi)} \frac{e^{ikSP}}{SP} \tau_c(P) \cos \theta \frac{1}{ik} \frac{d}{dPM} \left(\frac{e^{ikPM}}{PM} \right) d^2 S(P) &\cong \iint_{(\pi)} \frac{e^{ikSP}}{SP} \tau_c(P) \frac{e^{ikPM}}{PM} d^2 S(P) \\ &\cong \frac{e^{ikd}}{d} \frac{e^{ikD}}{D} \int_0^\infty \tau_c(\rho) \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right) \frac{\rho^2}{2} \right] 2\pi \rho d\rho \\ &= \frac{\lambda}{i} \frac{e^{ik(d+D)}}{d+D} \left\{ \left[e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right) \frac{\rho_0^2}{2}} \right]_0^{\rho_0} + \dots + \left[e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right) \frac{\rho^2}{2}} \right]_{\sqrt{\rho_0^2 + 2N\rho_1^2}}^{\sqrt{\rho_0^2 + 2N\rho_1^2}} \right\} \\ &= i\lambda \frac{e^{ik(d+D)}}{d+D} \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{2N} (-1)^j \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right) \frac{\rho_0^2 + j\rho_1^2}{2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

donc

$$A(M) = A_S \frac{\exp \left\{ i \frac{2\pi}{\lambda} \left[d + D + \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right) \frac{\rho_0^2}{2} \right] \right\}}{d+D} \sum_{j=0}^{2N} (-1)^j \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right) \frac{j\rho_1^2}{2} \right]. \quad (30)$$

La somme s'exprime de manière plus concise à l'aide du nouveau rayon réduit

$v_1 := \left[\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right) \frac{\rho_1^2}{\lambda} \right]^{1/2}$, et comme en l'absence de réseau l'amplitude complexe en M s'écrit $\frac{A_S e^{ik(d+D)}}{d+D}$, on en déduit facilement le rapport⁽⁴⁾ des intensités vibratoires en M , (4) qui élimine le facteur de dilution $1/(d+D)^2$ typique des ondes sphériques !

en présence et en absence de réseau :

$$I_r = \left| \sum_{j=0}^{2N} (-1)^j \exp(i \pi j \nu_1^2) \right|^2 = \left| \frac{1 + \exp[i \pi (2N+1) \nu_1^2]}{1 + \exp(i \pi \nu_1^2)} \right|^2$$

$$= \left| \frac{\cos \left[\frac{\pi (2N+1)}{2} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right) \frac{\rho_1^2}{\lambda} \right]}{\cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right) \frac{\rho_1^2}{\lambda} \right]} \right|^2. \quad (31)$$

Bien sûr, à la limite où d tend vers l'infini, $|A_s/d| \rightarrow |A_0|$ et $\nu_1 \rightarrow u_1$, alors on retrouve le résultat (25) obtenu pour une onde incidente plane.

Maxima principaux de I_r sur Oz

Dans le cadre des approximations de Fresnel ci-dessus, les maxima principaux de I_r (supérieurs à 1 si $N \neq 0$, donc en excluant la tache de Poisson de cette discussion) se produisent pour des distances D telles que $\nu_1^2 = 2l + 1$ avec $l \in \mathbf{Z}$, i.e.

$\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right) \frac{\rho_1^2}{\lambda} = 2l + 1$ (il est normal que les entiers pairs n'apparaissent pas, vu le rapport cyclique $1/2$ de la fonction $\tau(\rho^2)$), d'où la relation valable pour l'ordre $2l + 1$:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{D} = (2l + 1) \frac{\lambda}{\rho_1^2} := \frac{1}{f'_{2l+1}}. \quad (32)$$

Elle est semblable à celle de conjugaison (de position) de Descartes pour une lentille mince (de distance focale image f'_{2l+1}). Dans l'approximation de l'optique géométrique pour l'onde émergente d'ordre $2l + 1$, le point sur l'axe caractérisé par D obéissant à la relation (32) est un point de convergence des rayons émergeant du réseau. Comme l peut prendre n'importe quelle valeur entière, on comprend pourquoi le réseau se comporte comme une lentille multifocale ; et comme $|f'_{2l+1}|$ décroît si λ augmente, on constate que l'aberration chromatique est inversée.

La valeur des maxima principaux de I_r est obtenue aisément, en considérant le carré du module de la somme dans la relation (30) lorsque $\nu_1^2 = 2l + 1$; on trouve $(2N + 1)^2$. Le fait que ce soit supérieur à 1 n'est pas choquant : les interférences entre les ondes diffractées par les divers anneaux augmentent l'intensité vibratoire à certains endroits, et la diminuent (voire l'annulent – cf. *infra*) en d'autres, aussi les maxima principaux de I_r n'ont aucune raison d'être proportionnels à l'aire transparente dans le plan du réseau – celle-ci étant d'ailleurs infinie. Dans les approximations de Fresnel, tout se passe comme si tous les bords circulaires étaient responsables d'amplitudes complexes de mêmes modules que celle de l'onde incidente, et aussi de mêmes arguments là où il y a un maximum principal de I_r . Notons que dans le cas où $N = 0$ il n'y a pas d'anneau opaque, mais il y a éventuellement un disque central et alors un seul bord ; on retrouve ainsi, dans le cadre des approximations de Fresnel, le résultat correspondant

au centre de la tache de Poisson : I_r est indépendant de D , donc I_r est partout sur Oz égal à $\lim_{D \rightarrow \infty} I_r = 1$ pour $N = 0$. Enfin, notons que la valeur du maximum principal de I_r est indépendante de celle de son ordre $2l + 1$ (contrairement à ce qui se passe pour un réseau plan de traits à rapport cyclique $1/2$) ; ce résultat très particulier tient à la conjonction remarquable de trois facteurs : la symétrie de révolution du réseau de Soret, la variation de distance entre le réseau et le point de convergence géométrique en fonction de l , et le rapport cyclique $1/2$ de la fonction $\tau(\rho^2)$.

Annulations de l'intensité vibratoire sur Oz

Avec les mêmes approximations, on trouve que les annulations d'intensité vibratoire I se produisent pour des distances D telles que $(2N + 1)v_1^2 = 2m + 1$ avec $m \in \mathbf{Z}$ (mais avec $2m + 1$ qui n'est pas un multiple impair de $2N + 1$), i.e. $\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D}\right) \frac{\rho_1^2}{\lambda} = \frac{2m + 1}{2N + 1}$, soit

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{D} = \frac{2m + 1}{2N + 1} \frac{\lambda}{\rho_1^2} = \frac{2m + 1}{2N + 1} \frac{1}{f_1'} = \frac{1}{(2N + 1)f_{2m+1}'} \quad (33)$$

sans être un multiple impair de $1/f_1'$.

Dans l'utilisation des réseaux de Soret pour l'imagerie, l'écart entre les annulations de I situées juste de part et d'autre d'un maximum principal détermine un paramètre important : la profondeur de foyer. À λ , d et f_{2l+1}' fixés, elle est d'autant plus petite que la largeur transversale de la tache image de S est petite, donc l'augmentation de N améliore la résolution dans l'image d'un objet étendu. Pour l'imagerie, on utilise donc des réseaux ayant un grand nombre d'anneaux.

Illustration graphique

Observons, dans le cadre des approximations de Fresnel, l'effet du plus ou moins grand éloignement d de la source, en nous plaçant dans le cas où $\rho_0 = \rho_1 = 0,05$ cm et $\lambda = 633$ nm, pour $N = 3$ anneaux opaques. La figure 10, obtenue pour l'intensité relative I_r , donnée par la formule (31), montre bien que la position de la source influe sur celle des maxima de $I_r(D)$: ils sont d'autant plus proches du réseau que la source en est lointaine. Aussi, on voit que les valeurs de ses maxima principaux sont $(2N + 1)^2$ indépendamment de leur ordre et de la position de la source. Enfin, on note que

$$\lim_{D \rightarrow \infty} I_r = \left[\frac{\cos \frac{\pi(2N+1)\rho_1^2}{2\lambda d}}{\cos \frac{\pi\rho_1^2}{2\lambda d}} \right]^2$$

dépend de d et peut prendre toute valeur dans $[0, (2N + 1)^2]$, dont 1 à la limite où d est infini – par un effet similaire, dans cette double limite, à celui de la tache de Poisson engendrée par le bord extérieur du $N^{\text{ème}}$ anneau opaque seulement. Cette limite n'est

donc pas systématiquement nulle : cela provient de l'influence de l'onde passant au-delà du dernier anneau, sans laquelle d'après (30) l'expression de $(d + D)A(D)$ serait proportionnelle à une somme géométrique d'un nombre pair de termes, qui tendraient à se compenser deux à deux pour d et D infinis – tout comme les deux termes de la différence intervenant dans la définition de $A_n(M)$ donnée par la relation (21) tendent à se compenser. Mais grâce à l'onde passant au-delà du dernier anneau, il reste dans l'expression de $(d + D)A(D)$ d'après (30) un terme qui ne tend pas vers 0 quand d et D tendent vers l'infini – tout comme dans l'expression (23) il reste après $\sum_{n=1}^N A_n(M)$ le dernier terme, ainsi que dans le cas de la tache de Poisson (cf. sous-paragraphe 2.1.3).

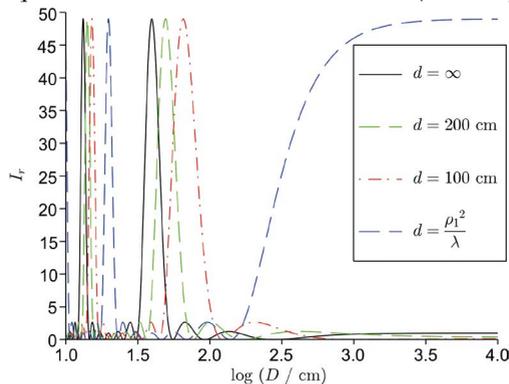


Figure 10 - Effet du plus ou moins grand éloignement de la source par rapport au réseau dans le cadre des approximations de Fresnel avec $\rho_0 = \rho_1 = 0,05$ cm, $\lambda = 633$ nm et $N = 3$. Ne pas oublier que si au lieu de I_r on étudiait I en fonction de la distance, le graphe montrerait que la hauteur des pics principaux est décroissante à cause du facteur de dilution de l'onde sphérique. On note que $\lim_{D \rightarrow \infty} I_r = (2N + 1)^2$ pour toutes les valeurs de $1/d$ multiples impairs de λ/ρ_1^2 – ce qui correspond aux cas où S est sur un foyer principal objet du réseau non diaphragmé !

3. APPROXIMATIONS DE FRESNEL AVEC UN RÉSEAU ZONÉ DIAPHRAGMÉ

Dans un montage d'optique par exemple, pour diminuer la lumière parasite arrivant sur le récepteur d'image situé après le réseau, on place souvent celui-ci à l'entrée d'un tube opaque qui le diaphragme ; ainsi la lumière ne peut plus passer par l'extérieur du réseau, et cela supprime la difficulté que nous avons affrontée de diverses façons dans tout le paragraphe 2. Dans cette situation, N désigne le nombre total d'ouvertures par lesquelles passe la lumière ; elles sont toutes d'extension finie. Pour simplifier, nous revenons au cas où le réseau reçoit une onde plane en incidence normale, sauf mention contraire.

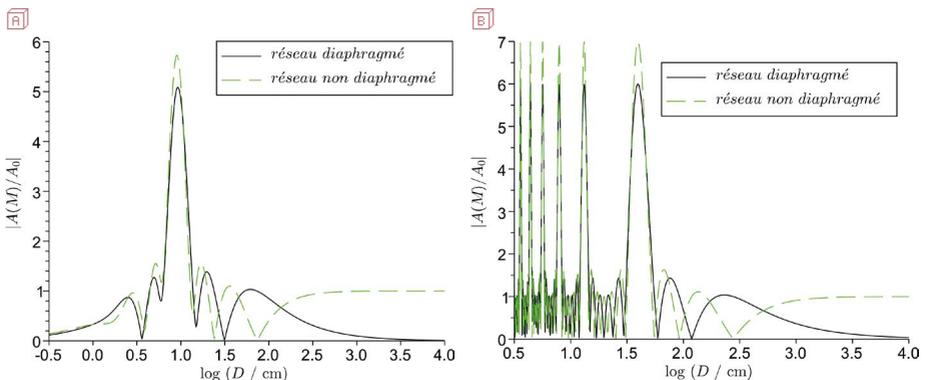
3.1. Nouvelles positions des annulations de l'intensité vibratoire sur Oz

L'amplitude complexe en M se calcule en supprimant le dernier terme de expressions (13)-(14), et en passant à la limite où d tend vers l'infini avec $\lim_{d \rightarrow \infty} A_S e^{ikd}/d = A_0$:

$$\begin{aligned} \frac{A(M)}{A_0 D} &= - \left[\frac{e^{ikr}}{r} \right]_{\sqrt{D^2 + \rho_0^2 + \rho_1^2}} - \left[\frac{e^{ikr}}{r} \right]_{\sqrt{D^2 + \rho_0^2 + 3\rho_1^2}} - \dots - \left[\frac{e^{ikr}}{r} \right]_{\sqrt{D^2 + \rho_0^2 + (2N-1)\rho_1^2}} \\ &= \sum_{j=0}^{2N-1} (-1)^j \frac{e^{ik\sqrt{D^2 + \rho_0^2 + j\rho_1^2}}}{\sqrt{D^2 + \rho_0^2 + j\rho_1^2}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Ici encore, observons le rapport $|A(M)/A_0|$ pour un cas typique de l'acoustique (avec $\rho_0 = \rho_1 = 3$ cm, $\lambda = 0,85$ cm et $N = 3$ anneaux opaques), et pour un cas traditionnel de l'optique (avec $\rho_0 = \rho_1 = 0,05$ cm, $\lambda = 633$ nm et toujours trois anneaux opaques), respectivement sur les figures 11A et 11B. Les abscisses des maxima principaux sont très peu affectées par la présence du diaphragme ; dans les approximations de Fresnel, l'ordonnée de ces maxima est $2N$ pour un réseau diaphragmé, alors que c'était $2N + 1$ pour un réseau non diaphragmé. Quant aux positions des quasi-annulations d'intensité, leur changement dû à l'ajout du diaphragme est net par rapport à leur écart entre voisins.

À grande distance du réseau par contre les comportements diffèrent beaucoup plus. Dans le cas du réseau diaphragmé, il laisse passer une onde de flux énergétique fini, car sur un domaine borné, d'où la parité du nombre de termes dans la somme donnant $A(M)$ d'après l'expression (34), ce qui permet à ces termes de se compenser deux à deux lorsque D tend vers l'infini, et de rendre $A(M)$ équivalent à une constante multipliée par e^{ikD}/D pour D au voisinage de l'infini : l'onde plane incidente donne, à cause de la finitude de l'aire transparente, une onde diffractée équivalente sur Oz à une onde



Figures 11A et 11B - Comparaison entre un réseau diaphragmé (trait plein en noir) et un réseau non diaphragmé (pointillé en vert) dans les cas où $\rho_0 = \rho_1 = 3$ cm, $\lambda = 0,85$ cm (à gauche) et $\rho_0 = \rho_1 = 0,05$ cm, $\lambda = 633$ nm (à droite) avec $N = 3$ pour chacun.

sphérique au voisinage de l'infini, dont l'amplitude tend forcément vers 0 – voir les figures 11A et 11B (cf. page précédente). Mais pour le cas d'un réseau non diaphragmé, la lumière passe avec un flux énergétique infini sur le domaine extérieur d'aire infinie aussi, donc il y a un nombre impair de termes dans la somme (14) donnant $A(M)$, et nous avons expliqué à la fin du sous-paragraphe 2.2.1. comment pour D tendant vers l'infini il reste un terme ne tendant pas vers 0 : c'est le dernier terme de l'expression (23), faisant que $\lim_{D \rightarrow \infty} |A(M)/A_0| = 1$ comme dans le cas de la tache de Poisson – voir les figures 11A et 11B (cf. page précédente).

Si $D^2 \gg \rho_0^2 + 2N\rho_1^2 \gg \lambda^2$, les approximations de Fresnel sont directement utilisables pour calculer l'amplitude complexe en M :

$$\begin{aligned} \frac{A(M)}{A_0} &\cong e^{ikD} \sum_{j=0}^{2N-1} (-1)^j \exp\left(ik \frac{\rho_0^2 + j\rho_1^2}{2D}\right) \\ &= \exp\left[ik \left(D + \frac{\rho_0^2}{2D}\right)\right] \frac{1 - \exp(iN\varphi)}{1 + \exp(i\varphi/2)} \\ &= -i \exp\left\{ik \left[D + \frac{\rho_0^2 + (2N-1)\rho_1^2}{4D}\right]\right\} \frac{\sin(N\varphi/2)}{\cos(\varphi/4)}. \end{aligned} \quad (35)$$

$$\text{On en déduit } I_r = \left[\frac{\sin(N\varphi/2)}{\cos(\varphi/4)}\right]^2 = (2N)^2 \sin^2(\varphi/4) \left[\frac{\sin(N\varphi/2)}{N \sin(\varphi/2)}\right]^2 \quad (36)$$

donc les maxima principaux de I_r se produisent quand φ est un multiple impair de 2π . Si on considérait de nouveau que le réseau est éclairé par une onde sphérique dont le centre S est sur Oz à la cote $-d$, il suffirait de remplacer $\frac{1}{D}$ par $\frac{1}{d} + \frac{1}{D}$ dans l'expression (35).

Évidemment, les maxima principaux de $I_r(D)$ ont des abscisses inchangées par rapport au cas du réseau non diaphragmé : la seule caractéristique du réseau qui les fixe est ρ_1 dans les approximations de Fresnel (et cela reste relativement vrai pour la figure 11A (cf. page précédente) bien qu'elle sorte du cadre de ces approximations). Par contre, les annulations d'intensité vibratoire se produisent pour des distances D telles que $Nu_1^2 = m$ (mais avec m qui n'est pas un multiple impair de N), soit

$$\frac{1}{D} = \frac{m}{N} \frac{\lambda}{\rho_1^2} = \frac{m}{N} \frac{1}{f_1'} = \frac{1}{Nf_m'} \quad (37)$$

sans être un multiple impair de $1/f_1'$.

La comparaison des expressions (25) et (36) montre que, dans les approximations de Fresnel et pour $N \gg 1$, les annulations de I_r pour un réseau diaphragmé sont quasiment à la place des maxima secondaires de I_r pour un réseau non diaphragmé (sauf ceux qui sont juste de part et d'autre d'un pic principal, car ils sont relativement plus près de lui que ne le dit cette règle approximative). Cette quasi-interversion vient de la contribution de l'onde passant à l'extérieur du réseau non diaphragmé ; certes, elle

est petite par rapport à la contribution de l'ensemble des N autres ouvertures, mais l'écart de position entre un maximum secondaire de I_r et ses plus proches annulations est petit aussi. L'interversion prédite n'est pas bien réalisée sur la figure 11A ; ce n'est pas surprenant puisque dans son cas on sort du cadre des approximations de Fresnel, et que $N = 3$ seulement.

3.2. Apodisation longitudinale

3.2.1. Expressions analytiques dans un cas particulier

Un bel exemple de calcul rigoureux d'apodisation longitudinale (*i.e.* pour l'intensité vibratoire sur Oz), dans le cas d'un réseau diaphragmé laissant passer la lumière par $N = 2Q - 1$ parties transparentes, est donné par la fonction

$$\tau(\rho) = \sum_{j=-Q}^Q f(j) \operatorname{rect} \left\{ \frac{\rho^2 - \rho_0^2 - 2 \left[Q + j - (3/4) \right] \rho_1^2}{\rho_1^2} \right\} \quad (38)$$

où $f(j) := 1 - \frac{|j|}{Q}$ et où la fonction rectangle, notée rect , donne $\operatorname{rect} x = 1$ si $|x| < 1/2$ et $\operatorname{rect} x = 0$ sinon. Une telle expression de τ correspond à un réseau zoné diaphragmé dont tous les anneaux opaques ont la même aire $\pi \rho_1^2$ (comme dans tous les réseaux considérés jusqu'ici), mais où, grâce à des densités optiques par exemple, les parties transparentes indicées par j voient leur coefficient de transmission respectif multiplié par le terme $f(j)$ – qui est nul pour $j = \pm Q$, d'où le fait que le nombre de parties transparentes est $N = (2Q + 1) - 2$. Cependant les densités posent des problèmes matériels ; nous verrons (sous-paragraphe 3.2.3.) comment nous en passer. En attendant, on estime l'intégrale de (12) directement dans le cadre des approximations de Fresnel, en posant $u_0 := \left(\frac{\rho_0^2}{\lambda D} \right)^{1/2}$; on trouve

$$\begin{aligned} A(M) &\cong -i A_0 \frac{e^{ikD}}{\lambda D} \int_0^\infty \tau(\rho) \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\rho^2}{2D} \right) 2\pi \rho \, d\rho \\ &= -A_0 e^{ikD} \left\{ \sum_{j=-Q}^Q \left(1 - \frac{|j|}{Q} \right) \left[e^{i2\pi \frac{u_0^2 + 2(Q+j-0,5)u_1^2}{2}} - e^{i2\pi \frac{u_0^2 + 2(Q+j-1)u_1^2}{2}} \right] \right\} \\ &= -2i A_0 e^{ikD} \sin \left(\pi \frac{u_1^2}{2} \right) \left[\sum_{j=-Q}^Q \left(1 - \frac{|j|}{Q} \right) e^{i2\pi \frac{u_0^2 + 2(Q+j-0,75)u_1^2}{2}} \right] \\ &= -2i A_0 e^{ik \left[D + \frac{\rho_0^2 + 2(Q-0,75)\rho_1^2}{2D} \right]} \sin \left(\frac{\varphi}{4} \right) \left[\sum_{j=-Q}^Q \left(1 - \frac{|j|}{Q} \right) e^{ij\varphi} \right] \end{aligned} \quad (39)$$

car $\varphi = 2\pi u_1^2$. Ainsi

$$\sum_{j=-Q}^Q \left(1 - \frac{|j|}{Q} \right) e^{ij\varphi} = S - \sum_{j=1}^Q \frac{j}{Q} \exp(ij\varphi) - \sum_{j=-Q}^{-1} \frac{-j}{Q} \exp(ij\varphi) \quad (40)$$

où
$$S := \sum_{j=-Q}^Q e^{ij\varphi} = \frac{e^{-iQ\varphi} - e^{i(Q+1)\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} = \frac{\sin \frac{(2Q+1)\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}. \quad (41)$$

Posons
$$s := \sum_{j=1}^Q \exp(ij\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{i(Q+1)\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}; \quad (42)$$

alors,
$$\sum_{j=-Q}^Q \left(1 - \frac{|j|}{Q}\right) e^{ij\varphi} = S - \frac{1}{iQ} \left(\frac{ds}{d\varphi} - \frac{ds^*}{d\varphi} \right) = S - \frac{2}{Q} \Im m \left(\frac{ds}{d\varphi} \right) \quad (43)$$

où
$$\frac{ds}{d\varphi} = i \frac{[e^{i\varphi} - (Q+1)e^{i(Q+1)\varphi}](1 - e^{i\varphi}) + [e^{i\varphi} - e^{i(Q+1)\varphi}]e^{i\varphi}}{(1 - e^{i\varphi})^2} \quad (44)$$

puis, en multipliant haut et bas par $e^{-i\varphi}$,

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\varphi} &= i \frac{[1 - (Q+1)e^{iQ\varphi}](1 - e^{i\varphi}) + e^{i\varphi} - e^{i(Q+1)\varphi}}{(-2i \sin \frac{\varphi}{2})^2} \\ &= i \frac{1 - (Q+1)e^{iQ\varphi} + Qe^{i(Q+1)\varphi}}{-4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \end{aligned} \quad (45)$$

donc

$$\begin{aligned} \Im m \left(\frac{ds}{d\varphi} \right) &= \frac{\Re e [1 - (Q+1)e^{iQ\varphi} + Qe^{i(Q+1)\varphi}]}{-4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \\ &= \frac{Q \{ \cos [(Q+1)\varphi] - \cos (Q\varphi) \} + 1 - \cos (Q\varphi)}{-4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \\ &= \frac{-2Q \sin \frac{(2Q+1)\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} + 2 \sin^2 \frac{Q\varphi}{2}}{-4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{2} \left(QS - \frac{\sin^2 \frac{Q\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} \right). \end{aligned} \quad (46)$$

En reportant dans l'expression (43), S s'élimine et il reste

$$\sum_{j=-Q}^Q \left(1 - \frac{|j|}{Q}\right) e^{ij\varphi} = \frac{\sin^2(Q\varphi/2)}{Q \sin^2(\varphi/2)}. \quad (47)$$

On en déduit

$$\frac{A(M)}{-iA_0} e^{-ik \left[D + \frac{\rho_0^2 + 2(Q-0,75)\rho_1^2}{2D} \right]} = 2 \sin(\varphi/4) \frac{\sin^2(Q\varphi/2)}{Q \sin^2(\varphi/2)} = \frac{\sin^2 \frac{Q\varphi}{2}}{2Q \sin \frac{\varphi}{4} \cos^2 \frac{\varphi}{4}} \quad (48)$$

puis

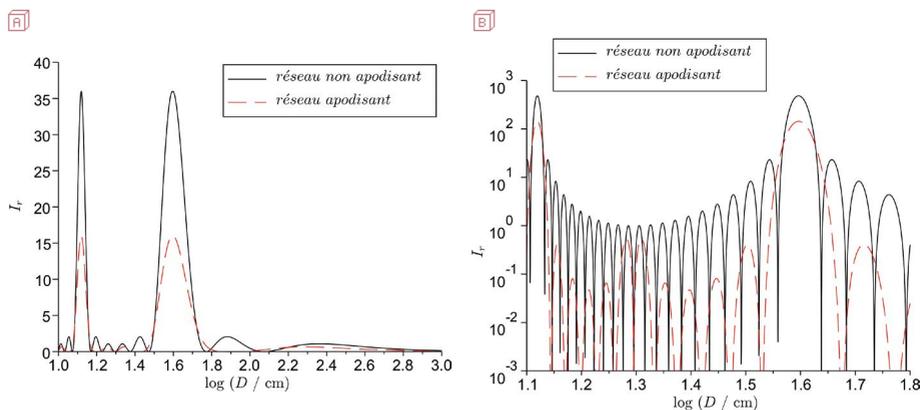
$$I_r = (2Q)^2 \sin^2(\varphi/4) \frac{\sin^4(Q\varphi/2)}{Q^4 \sin^4(\varphi/2)} = \left[\frac{\sin^2(Q\varphi/2)}{2Q \sin(\varphi/4) \cos^2(\varphi/4)} \right]^2 \quad (49)$$

$$= \left[\frac{\sin^2(Q\varphi/2)}{Q \sin(\varphi/2) \cos(\varphi/4)} \right]^2.$$

Naturellement, les maxima principaux de I_r ont encore des positions inchangées par rapport au cas du réseau précédent : ils se produisent toujours quand φ est un multiple impair de 2π . Nous allons présenter graphiquement les autres propriétés notables de cette nouvelle fonction I_r .

3.2.2. Illustrations graphiques

Dans le cadre des approximations de Fresnel, observons graphiquement le comportement de l'intensité relative donnée par l'expression (49) pour un cas typique de l'optique (avec $\rho_0 = \rho_1 = 0,05$ cm, $\lambda = 633$ nm) et comparons au résultat donné par un réseau non apodisant. Les figures 12A et 12B représentent respectivement les cas $N = 3$ (i.e. $Q = 2$) et $N = 11$ ($Q = 6$).

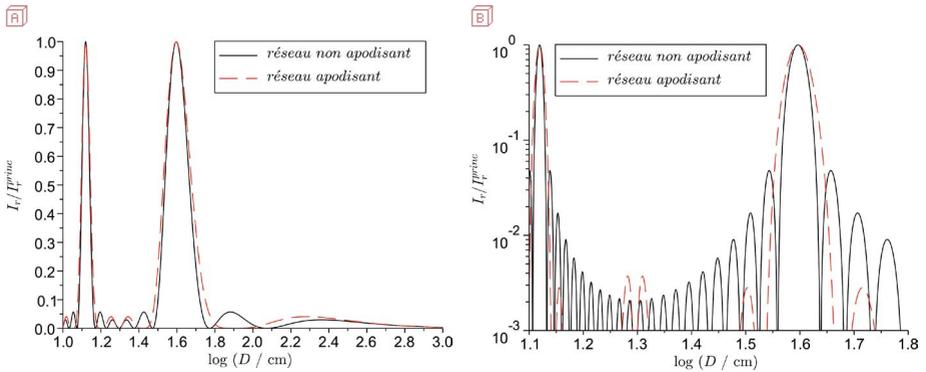


Figures 12A et 12B - Comparaison des intensités relatives données par un réseau apodisant (pointillé rouge) et par un réseau non apodisant (trait plein noir) dans les cas $N = 3$ ($Q = 2$) et $N = 11$ ($Q = 6$). Pour plus de lisibilité, l'échelle en ordonnées de la figure 12B est logarithmique.

Comme annoncé, les pics principaux apparaissent bien aux mêmes endroits pour les deux réseaux. Sans surprise aussi, nous notons que leur hauteur est plus faible dans le cas du réseau apodisant : c'est normal, car ce réseau, en raison des termes $\left(1 - \frac{|j|}{Q}\right)$ de la formule (38), transmet un flux énergétique plus faible et tous ses pics sont un peu plus larges que dans le cas du réseau de Soret – la décroissance de $\left(1 - \frac{|j|}{Q}\right)$ en fonction de $|j|$ diminuant la largeur effective du réseau zoné – quasiment d'un facteur 2 si

$Q \cong N/2$. Mais pour l'apodisation, ces effets concernant la hauteur et la largeur des pics sont des épiphénomènes.

L'intérêt de l'apodisation réside dans l'effet essentiel que voici, plus clairement visible si on représente les intensités relatives normalisées par leur maximum principal respectif I_r/I_r^{princ} ; c'est l'objet des figures 13A et 13B. Nous voyons alors que, si N est assez grand, la hauteur des pics secondaires *normalisée par celle des pics principaux* est nettement plus petite avec le réseau apodisant – sauf au voisinage du milieu entre deux pics principaux consécutifs ou pour certaines valeurs de D grandes devant ρ_1^2/λ (ce qui n'est pas gênant en imagerie, aucune de ces positions n'étant utile). Pour $N = 3$ ($Q = 2$) cet effet essentiel n'est pas encore effectif ; il devient manifeste pour $N = 11$ ($Q = 6$), et s'accroîtrait encore si N augmentait – or quand on utilise des réseaux zonés pour l'imagerie, on prend N grand afin d'avoir une bonne résolution (voir la fin du sous-graphique 2.2.2.).



Figures 13A et 13B - Comparaison des intensités relatives (rapportées à leur maximum principal respectif I_r/I_r^{princ}) données par un réseau apodisant (pointillé rouge) et par un réseau non apodisant (trait plein noir) avec $N = 3$ ($Q = 2$) à gauche et $N = 11$ ($Q = 6$) à droite pour un cas typique de l'optique ($\rho_0 = \rho_1 = 0,05$ cm, $\lambda = 633$ nm). Pour plus de lisibilité, l'échelle en ordonnées de la figure 13B est logarithmique aussi.

Bien que la formule (38) ait été conçue pour être utilisée dans le cadre des approximations de Fresnel, on peut à titre d'exercice l'appliquer à un cas où ces approximations ne sont pas valables (par exemple $\rho_0 = \rho_1 = 3$ cm et $\lambda = 0,85$ cm). La propriété d'apodisation est conservée : les maxima secondaires ont des intensités plus faibles – et le maximum principal s'élargit.

3.2.3. Réalisation simple avec des anneaux opaques seulement

Pour réaliser ces termes $f(j)$ – qui concernent les ouvertures du réseau zoné d'après l'expression (38) – il serait dommage de couvrir chacune d'elles par une densité

optique : car les problèmes d'homogénéité de la densité, de parallélisme de ses faces et de leur rugosité (qui engendre de la lumière parasite) nuiraient à la qualité de l'onde émergente, notamment à la finesse de sa focalisation pour les différents ordres.

Mais il y a une autre façon de produire, pour les points de Oz , la même distribution d'amplitude complexe que celle donnée par le réseau apodisant, sans mettre de densité. En effet, avec des ouvertures de largeur variable avec j , de rayon intérieur ρ_{ji} et extérieur ρ_{je} tels que

$$2if(j) e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\rho_0^2 + 2(Q+j-0,75)\rho_1^2}{2D}} \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{\rho_1^2}{2D}\right) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\rho_{je}^2}{2D}} - e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\rho_{ji}^2}{2D}}, \quad (50)$$

on obtient la même apodisation d'après les expressions de (39). Comme $f(j) \in \mathbf{R}_+$ et

$$e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\rho_{je}^2}{2D}} - e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\rho_{ji}^2}{2D}} = 2ie^{i\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\rho_{je}^2 + \rho_{ji}^2}{4D}} \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{\rho_{je}^2 - \rho_{ji}^2}{2D}\right), \quad (51)$$

pour réaliser cette apodisation il suffit que

$$\frac{\rho_{je}^2 + \rho_{ji}^2}{2} = \rho_0^2 + 2(Q+j-0,75)\rho_1^2 \quad (52)$$

et
$$\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{\rho_{je}^2 - \rho_{ji}^2}{2D}\right) = f(j) \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{\rho_1^2}{2D}\right). \quad (53)$$

Ces conditions sont analogues à celles utilisées en holographie synthétique (ou CGH, "Computer generated holography") par le codage de Lohmann [29-30]. Les rayons les moins encombrants les satisfaisant sont

$$\rho_{j,i} = \sqrt{\rho_0^2 + 2(Q+j-0,75)\rho_1^2 - \left\{ \arcsin\left[f(j) \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{\rho_1^2}{2D}\right)\right] / \frac{\pi}{\lambda D} \right\}} \quad (54)$$

et
$$\rho_{j,e} = \sqrt{\rho_0^2 + 2(Q+j-0,75)\rho_1^2 + \left\{ \arcsin\left[f(j) \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{\rho_1^2}{2D}\right)\right] / \frac{\pi}{\lambda D} \right\}} \quad (55)$$

où en fait j décrit tous les entiers de $-Q+1$ à $Q-1$ seulement, puisque pour $j = \pm Q$ on a $f(j) = 0$ et $\rho_{ji} = \rho_{je}$. L'ouverture correspondant à j pour un tel réseau est donc identique à celle correspondant à j pour un réseau de Soret (de mêmes paramètres ρ_0 et ρ_1) si et seulement si $f(j) = 1$; toute autre ouverture, telle que $f(j) \in [0, 1[$, est moins large que sa correspondante dans le réseau ordinaire. C'est ce genre de technique d'apodisation qui, par son très bas niveau de lumière parasite, fait l'intérêt des réseaux zonés en optique astronomique [20-21], notamment pour la détection des exoplanètes. Si une autre forme d'apodisation nécessitait $f(j)$ complexe comme avec une lame de phase $\arg f(j)$, pour la synthétiser selon le codage de Lohmann il suffirait de remplacer les relations (52)-(53) par

$$\frac{\rho_{je}^2 + \rho_{ji}^2}{2} = \rho_0^2 + 2(Q+j-0,75)\rho_1^2 + \frac{\arg f(j)}{\pi} \lambda D \quad (56)$$

et
$$\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{\rho_{je}^2 - \rho_{ji}^2}{2D}\right) = |f(j)| \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{\rho_1^2}{2D}\right). \quad (57)$$

Dans l'absolu cependant, une difficulté apparaît avec cette technique d'apodisation longitudinale, contrairement à la technique correspondante d'apodisation transversale pour les réseaux zonés diaphragmés [20–21] : on veut réduire les pieds de la distribution d'intensité vibratoire I sur l'axe (donc ceux de la variation de I en fonction de la variable D), or les rayons des anneaux donnés pour cela par les expressions (54)–(55) dépendent de D !

Une difficulté similaire se rencontre en spectroscopie dans l'utilisation de l'effet de miroitement (ou de "blaze") avec les « réseaux échelle » par exemple [31], permettant de limiter à un seul ordre de diffraction p l'essentiel de la lumière renvoyée par de tels réseaux par réflexion. Leur profil est en « dents de scie » avec un côté non-réfléchissant – toujours le même pour chaque dent. Pour un réseau échelle donné, l'obtention de l'effet de miroitement nécessite trois conditions ([13], p. 272–276) reliant l'angle d'incidence i du faisceau, l'angle d'émergence r de l'ordre unique (p , qui n'est pas une variable continue) et la longueur d'onde λ : d'abord, la condition d'interférences parfaitement constructives entre les ondes diffractées par les différents motifs, avec un ordre de diffraction p ; ensuite, le fait que les autres ordres de diffraction coïncident avec les annulations d'intensité diffractée par un motif unique ; enfin, la direction d'émergence pour p doit être celle correspondant au maximum principal de la figure de diffraction par un motif unique du réseau échelle, d'où une relation entre i et r qui correspond aux lois de Descartes pour la réflexion sur les facettes réfléchissantes de l'échelle. Les deux dernières conditions fixent à r_b et i_b les valeurs de r et i , indépendamment de p : on trouve que, dans la direction donnée par r_b , les faces non réfléchissantes du réseau sont observées de manière rasante (et donc ne se voient pas dans la projection du réseau échelle sur un plan normal à cette direction de diffraction), alors les surfaces d'onde de l'optique géométrique, réfléchies sur chaque facette, se mettent continûment dans le prolongement les unes des autres ! La première condition fait qu'elles sont en phase les unes avec les autres, ce qui restreint à un ensemble discret de (λ_b, p_b) les couples (λ, p) satisfaisant les trois conditions de miroitement pour un réseau échelle donné. Dans l'absolu, le fait que seul un ensemble discret de λ_b (imposés par le réseau échelle) conviennent est une difficulté pour la spectroscopie ; alors dans la pratique, on n'utilise le miroitement du réseau que pour observer un fin domaine spectral centré sur l'une des valeurs de λ_b , de façon à bien profiter du blaze qui est quasiment réalisé sur tout ce domaine. Inversement, on peut choisir λ_b compte tenu du fin domaine qu'on veut analyser, puis calculer les caractéristiques de l'échelle permettant d'obtenir le blaze pour λ_b : on réalise ainsi dans la pratique un effet de miroitement local, au voisinage de λ_b .

Nous procédons de même pour l'apodisation longitudinale : nous calculons les caractéristiques d'un réseau zoné de façon à la réaliser localement, au voisinage d'un

point intéressant de l'axe du réseau. Pour l'observation astronomique, un tel point est forcément un foyer d'ordre $2l + 1$ du réseau, donc tel que

$$D = f'_{2l+1} = \frac{\rho_1^2}{(2l+1)\lambda}; \quad (58)$$

alors les expressions (54)-(55) deviennent

$$\rho_{j,i,e} = \sqrt{\rho_0^2 + 2 \left\{ Q + j - \frac{3}{4} \mp \frac{\arcsin \left[\frac{f(j) \sin((2l+1)\pi/2)}{(2l+1)2\pi} \right]}{(2l+1)2\pi} \right\} \rho_1^2} \quad (59)$$

qui est encore plus simple pour le voisinage du foyer d'ordre 1 ($l = 0$)⁽⁵⁾ :

$$\rho_{j,i,e} = \sqrt{\rho_0^2 + 2 \left\{ Q + j - \frac{3}{4} \mp \frac{1}{2\pi} \arcsin \left(1 - \frac{|j|}{Q} \right) \right\} \rho_1^2}. \quad (60)$$

Pour l'observation d'un objet à distance d finie, donnant l'amplitude complexe $A_s e^{ikd}/d$ juste avant le réseau, il suffit de remplacer dans la relation (39)

$$A_0 \text{ par } A_s e^{ikd}/d,$$

$$\frac{\rho^2}{2D} \text{ par } \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right) \frac{\rho^2}{2},$$

$$u_0 \text{ et } u_1 \text{ par } v_0 := \left[\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right) \frac{\rho_0^2}{\lambda} \right]^{1/2} \text{ et } v_1,$$

donc à la fin $A_0 e^{ik} \left[D + \frac{\rho_0^2 + 2(Q-0,75)\rho_1^2}{2D} \right]$ par $\frac{A_s}{d+D} e^{ik} \left[d+D + \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right) \frac{\rho_0^2 + 2(Q-0,75)\rho_1^2}{2} \right]$

avec $\varphi = 2\pi v_1^2$ maintenant ; la relation (49) est alors inchangée, et dans les relations (50)-(55) il suffit de remplacer

$$\frac{1}{D} \text{ par } \frac{1}{d} + \frac{1}{D}.$$

Alors les valeurs des rayons des ouvertures donnant une apodisation longitudinale locale, au voisinage de l'image d'ordre $2l + 1$ – qui obéit donc à la relation (32) – sont encore données par l'expression (59) intacte ; on note que cette condition d'apodisation locale ne fait donc pas intervenir d quand elle est écrite pour le voisinage d'une image.

Anomalie de phase au voisinage du pic principal d'intensité vibratoire apodisé

Comme au sous-paragraphe 2.1.4., pour terminer on s'intéresse à l'anomalie

(5) Dans ce cas particulier, la synthèse d'une valeur négative de $f(j)$ en utilisant les relations (56)-

(57) nécessite de changer de $\pm \lambda D = \pm \rho_1^2$ la valeur de $\frac{\rho_{j_e}^2 + \rho_{j_i}^2}{2}$, ce qui fait correspondre

cette nouvelle valeur (de $\frac{\rho_{j_e}^2 + \rho_{j_i}^2}{2}$ pour une ouverture) à celle calculée pour le réseau de Soret (de mêmes paramètres ρ_0 et ρ_1) avec les rayons d'un des deux anneaux opaques voisins de l'ouverture associée à j . Pour le voisinage des foyers d'ordre $2l + 1 > 1$, le changement de $\frac{\rho_{j_e}^2 + \rho_{j_i}^2}{2}$ doit être moins important (à ρ_1 fixé) car avec eux $\pm \lambda D = \pm \rho_1^2 / (2l + 1)$.

de phase $\arg(A) - k(d + D)$ produite dans le cas d'une onde sphérique incidente sur un tel réseau apodisant, et calculée en adaptant l'expression (14) à un cas typique de l'acoustique où $N = 3$, $\rho_0 = \rho_1 = 3 \text{ cm}$, $\lambda = 0,85 \text{ cm}$ et $d = 1,00 \text{ m}$. De même que sur les figures 6-7, on voit apparaître sur la figure 14 l'avance de phase, typique de l'effet Gouy, due à la décroissance de $\arg(A) - k(d + D)$ au voisinage du maximum d'intensité vibratoire. La nouveauté, due au changement de nature des quasi-annulations de l'amplitude complexe avec un réseau apodisant, est que la variation de l'anomalie en leur voisinage n'est plus brutale ni proche de π .

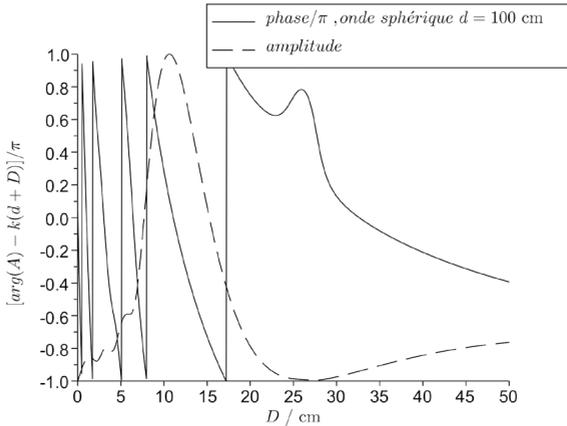


Figure 14 - Anomalie de phase divisée par π (trait plein) et module de $A(M)/A_0$ (pointillé) dans un cas typique de l'acoustique ($\rho_0 = \rho_1 = 3 \text{ cm}$, $\lambda = 0,85 \text{ cm}$) avec une source située à $1,00 \text{ m}$ en avant du réseau et émettant des ondes sphériques. Le réseau est apodisant et comporte $N = 3$ anneaux opaques. Comme d'habitude, au voisinage du maximum d'intensité vibratoire l'anomalie de phase décroît dans le sens de la propagation ; par contre, contrairement à ce qu'on observe sur la figure 6, au voisinage de la quasi-annulation de l'amplitude complexe la variation de l'anomalie est très inférieure à π et pas brutale.

CONCLUSION

Notre étude présente l'avantage, relativement rare, de traiter de la diffraction au-delà des approximations de Fresnel, et de tester celles-ci. Dans le domaine paraxial, l'approximation scalaire de l'optique est utilisable ; c'est dans ce cadre que sont utilisés les réseaux zonés en optique, d'où l'intérêt de leurs propriétés vues avec les approximations de Fresnel. Nous avons même pu étudier l'anomalie de phase (effet Gouy) sur l'axe Oz de symétrie de révolution, en évitant les discontinuités de phase qui apparaissent au niveau des minima d'intensité vibratoire – et nous avons vu qu'avec notre apodisation il n'y a pas la brutale augmentation d'environ π pour l'anomalie de phase à la traversée d'un point sombre sur Oz dans le sens de la propagation, contrairement à ce qui se passe avec un point sombre sans l'apodisation. Mais hors du domaine paraxial,

l'approximation scalaire de l'optique n'est plus valable ; c'est pourquoi la confrontation avec des expériences de diffraction d'ondes de pression acoustique est plus intéressante, puisqu'il s'agit d'ondes scalaires.

Rappelons cependant que les formules scalaires de diffraction de Rayleigh-Sommerfeld ne sont pas complètement rigoureuses, puisqu'elles font intervenir une approximation de champ donné : la plus naturelle est la première, $A(P) \cong \tau(P) A_0(P)$ qui donne la formule (1) exploitée dans cet article, mais *a priori* rien ne dit que ses résultats sont forcément meilleurs que ceux de la seconde formule de diffraction de Rayleigh-Sommerfeld – découlant de la seconde approximation de champ donné : $\frac{\partial A}{\partial z}(P) \cong \tau(P) \frac{\partial A_0}{\partial z}(P)$. Il faut garder ce fait présent à l'esprit, si on constate un désaccord entre des résultats expérimentaux et des prédictions tirées de la première formule de diffraction de Rayleigh-Sommerfeld.

Dans le cas des réseaux zonés (ainsi que d'une ouverture circulaire ou de l'obstacle complémentaire) les calculs analytiques d'intégrales s'avèrent possibles facilement pour les points M situés sur Oz . Ce n'est évidemment plus le cas hors de Oz , or c'est cela qui est intéressant pour l'imagerie ; on peut alors faire intervenir des fonctions spéciales comme celles de Bessel [4, 6] si M est dans le plan de front contenant le point de convergence géométrique de l'onde quasi sphérique incidente convergente sur Oz , ou celles de Lommel [6] sinon. Il n'empêche que les calculs de diffraction sur l'axe de symétrie de révolution restent très intéressants, car ils servent de banc d'essai des diverses théories de la diffraction, pour comparer notamment les performances des formules de Rayleigh-Sommerfeld, de Kirchhoff, de Fresnel, etc. [24–25, 32–35].

Muni de cet outillage théorique, nous pouvons aborder efficacement le second volet de notre travail, qui fera l'objet d'un article ultérieur : la confrontation à l'expérience dans le difficile domaine résonant qui est typiquement celui de l'acoustique, non seulement avec des réseaux zonés, mais aussi avec des ouvertures circulaires, ou des disques produisant la tache de Poisson, ou encore un réseau apodisant.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Lord Rayleigh, "On the passage of waves through apertures in plane screens and allied problems", *Phil. Mag.*, **43**, p. 259–272, 1897
- [2] Lord Rayleigh, *Scientific Papers*, vol. IV, Cambridge : Cambridge University Press, p. 283, 1903.
- [3] A. Sommerfeld, *Lectures on theoretical Physics*, vol. IV, New York : Optics, Academic Press, p. 199, 1954.

- [4] J. W. Goodman, *Introduction à l'optique de Fourier et à l'holographie*, Paris : Masson, chap. 3, p. 29-42, 1972.
- [5] N. Mukunda, "Consistency of Rayleigh's Diffraction Formulas with Kirchhoff's Boundary Conditions", *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, p. 336-337, 1962.
- [6] M. Born and E. Wolf, *Principles of optics – Electromagnetic theory of propagation interference and diffraction of light*, Oxford : Pergamon, chap. 8, 1980.
- [7] L. Dettwiller, Agrégation externe de physique 1998 – Épreuve C (problème de physique) : microscopies à champ proche.
Énoncé : *Bull. Un. Phys.*, mars 1999, vol. 93, n° 812 (2), p. 35-50 ; voir la partie I.C sur la diffraction, p. 41 notamment.
Corrigé : *Bull. Un. Phys.*, mars 1999, vol. 93, n° 812 (3), p. 33-56 ; voir p. 43-44.
- [8] A. Boussié, «La diffraction pour les nuls... et pour les forts», *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 100, n° 889 (2), p. 7-27, décembre 2006.
- [9] L. Dettwiller, «Théorie et analyse numérique de quelques processus de diffraction multiple : I – Configuration de Fraunhofer, avec deux fentes simples centrées», *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 106, n° 947, p. 917-942, octobre 2012.
- [10] L. Dettwiller, «Théorie et analyse numérique de quelques processus de diffraction multiple : II – Configuration de Fraunhofer avec deux fentes simples décentrées, et théorie ondulatoire du champ de contour», *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 106, n° 948, p. 1007-1020, novembre 2012.
- [11] L. Dettwiller, «Théorie et analyse numérique de quelques processus de diffraction multiple : III – Observation d'une fente derrière une autre en éclairage cohérent», *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 106, n° 949, p. 1155-1179, décembre 2012.
- [12] C. Simon, «Des franges de Grimaldi à la télémétrie laser : réflexions sur la diffraction de la lumière et son enseignement au lycée», *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 112, n° 1003, p. 621-653, avril 2018.
- [13] G. Bruhat, *Cours de physique générale – Optique*, Paris : Masson, 1992.
- [14] M. Chapelet, «Le réseau de Soret», *Bull. Un. Phys.*, vol. 85, n° 737 (1), p. 1215-1220, octobre 1991.
- [15] J.-L. Soret, «Sur les phénomènes de diffraction produits par les réseaux circulaires», *Arch. d. sciences physiq. et nat.*, **52**, p. 320-337, 1875.
- [16] J.-L. Soret, "Ueber die durch Kreisgitter erzeugten Diffractionsphänomene", *Poggendorff's Ann. Phys. Chem.*, **156**, p. 99-113, 1875.

- [17] J.-L. Soret, « Sur les phénomènes de diffraction produits par les réseaux circulaires », *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, **80**, p. 483-487, 1875.
- [18] M. J. Simpson and A. G. Michette, “Imaging properties of modified Fresnel zone plates”, *Opt. Acta*, **31**, p. 404-413, 1984.
- [19] O. Carnal, M. Sigel, T. Sleator, H. Takuma et J. Mlynek, “Imaging and focusing of atoms by a Fresnel zone plate”, *Phys. Rev. Lett.*, **67**, p. 3231-3234, 1991.
- [20] L. Koechlin, D. Serre and P. Duchon, “High resolution imaging with Fresnel interferometric arrays: suitability for exoplanet detection”, *A & A*, **443**, p. 709-720, 2005.
- [21] L. Koechlin et al., “First high dynamic range and high resolution images of the sky obtained with a diffractive Fresnel array telescope”, *Exp. Astron.*, **33**, p. 129-140, 2012.
- [22] C. Mulet-Marquis, U. Repinski, T. Robin, R. Tian et N. Vallantin, « Étude d’une lentille à ultrasons », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 112, n° 1002, p. 505-516, mars 2018.
- [23] K. G. Makris and D. Psaltis, “Huygens-Fresnel diffraction and evanescent waves”, *Opt. Commun.*, **284**, p. 1686-1689, 2011
- [24] R. L. Lucke, “Rayleigh-Sommerfeld diffraction and Poisson’s spot”, *Eur. J. Phys.*, **27**, p. 193-204, 2006.
- [25] G. S. Smith, “Comment on ‘Rayleigh-Sommerfeld diffraction and Poisson’s spot’”, *Eur. J. Phys.*, **27**, L 21-23, 2006.
- [26] H. Osterberg et L. W. Smith, “Closed Solutions of Rayleigh’s Diffraction Integral for Axial Points”, *J. Opt. Soc. Am.*, **51**, p. 1050-1054, 1961.
- [27] J.-P. Jorre, « Faisceaux LASER et optique gaussienne », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 105, n° 938 (2), p. 39-72, novembre 2011.
Voir les explications associées à la figure 4, en prenant garde au fait que les représentations complexes sont écrites avec $e^{i\omega t}$ dans cette référence, contrairement à notre présent travail qui utilise $e^{-i\omega t}$.
- [28] J. Gay et Y. Rabbia, « Principe d’un coronographe interférentiel », *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, **322**, Série II b, p. 265-271, 1996.
- [29] A. W. Lohmann and D. P. Paris, “Variable Fresnel Zone Pattern”, *Appl. Opt.*, **6**, p. 1567-1570, 1967.
- [30] A. W. Lohmann and D. P. Paris, “Binary Fraunhofer holograms generated by computer”, *Appl. Opt.*, **6**, p. 1739-1748, 1967.

- [31] P. Bousquet, *Spectroscopie instrumentale*, Paris : Dunod Université, p. 44-46, 1969.
- [32] J. C. Heurtley, “Scalar Rayleigh–Sommerfeld and Kirchhoff diffraction integrals: A comparison of exact evaluations for axial points”, *J. Opt. Soc. Am.*, **63**, p. 1003-1008, 1973.
- [33] C. J. R. Sheppard and M. Hrynevych, “Diffraction by a circular aperture: a generalization of Fresnel diffraction theory”, *J. Opt. Soc. Am. A*, **9**, p. 274-281, 1992.
- [34] I. J. Cooper, C. J. R. Sheppard and M. Sharma, “Numerical integration of diffraction integrals for a circular aperture”, *Optik*, **113**, p. 293-298, 2002.
- [35] Y. Li, “Predictions of Rayleigh’s diffraction theory for the effect of focal shift in high-aperture systems”, *J. Opt. Soc. Am. A*, **25**, p. 1835-1842, 2008.



Luc DETWILLER

*Professeur en PC**

Lycée Blaise Pascal
Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme)



Cédric MULET-MARQUIS

Agrégé de physique

Institut universitaire de technologie (IUT)
Département mesures physiques
Châtelleraut (Vienne)



Thomas ROBIN

Étudiant en DUT

Institut universitaire de technologie (IUT)
Département mesures physiques
Châtelleraut (Vienne)