



**HAL**  
open science

**THÉORIE ET ANALYSE NUMÉRIQUE DE  
QUELQUES PROCESSUS DE DIFFRACTION  
MULTIPLE III - Observation d'une fente derrière une  
autre en éclairage cohérent**

Luc Dettwiller

► **To cite this version:**

Luc Dettwiller. THÉORIE ET ANALYSE NUMÉRIQUE DE QUELQUES PROCESSUS DE DIFFRACTION MULTIPLE III - Observation d'une fente derrière une autre en éclairage cohérent. Doctorat. 2012. sfo-00768684

**HAL Id: sfo-00768684**

**<https://hal-sfo.ccsd.cnrs.fr/sfo-00768684v1>**

Submitted on 22 Dec 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Théorie et analyse numérique de quelques processus de diffraction multiple

par **Luc DETTWILLER**

Lycée Blaise Pascal - 63037 Clermont-Ferrand Cedex

luc.dettwiller@ac-clermont.fr

## III - Observation d'une fente derrière une autre en éclairage cohérent

### RÉSUMÉ

*Nous voulons étudier théoriquement et généraliser une expérience historique due à NEWTON, de type strioscopique, mais différente de la strioscopie au sens strict des classiques expériences d'ABBE ; donc son étude est relativement délicate : il s'agit, sous l'éclairage d'une source  $S$  quasi ponctuelle, de l'observation d'un bord diffractant d'un objet opaque, avec un instrument dont la pupille d'entrée n'est pas dans le plan de FOURIER associé à  $S$ . Alors qu'une approche mathématique radicale conduirait à composer deux transformations de FRESNEL, nous présentons une méthode alternative permettant de remplacer une transformation de FRESNEL par la transformation de FOURIER d'un coefficient de transmission, ce qui est plus simple et nous permet de prouver quatre théorèmes généraux. Puis nous traçons numériquement des graphes de l'intensité pour des montages où les deux obstacles diffractants sont des fentes ; nous discutons ces résultats en fonction de divers paramètres, comme l'écartement  $d$  des fentes, leur décentrement, etc. Cette discussion nous amène à conjecturer, si la seconde fente est plus (resp. moins) large que la première, une convergence uniforme (resp. simple seulement) vers le graphe correspondant à la situation où  $d = 0$ , pour des fentes mutuellement centrées. Enfin, l'analyse de l'observation de NEWTON avec nos résultats révèle quelques subtilités concernant, entre autres, l'effet de la cohérence partielle de l'éclairage du premier obstacle diffractant.*

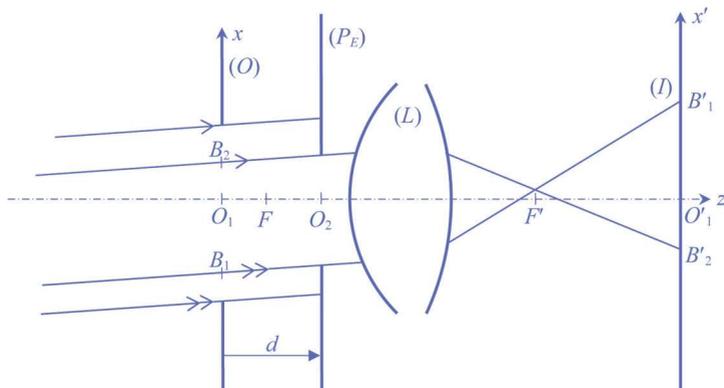
### INTRODUCTION

Dans les deux premiers articles de cette série [1-2], nous avons défini le processus de diffraction multiple, et nous l'avons étudié dans une configuration de FRAUNHOFER ; elle présente, parmi diverses propriétés remarquables ([1], § 1.2.), celle-ci qui lui est propre : la distribution finale d'intensité est inchangée lors d'une translation transversale ajustée de chaque obstacle (cf. [1], § 1.2.1. et annexe). Par de nombreuses simulations numé-

riques, nous avons aussi illustré la richesse phénoménologique de cette diffraction multiple de FRAUNHOFER qui a révélé des effets inattendus ou des figures de diffraction complexes, déjà avec deux fentes successives [1-2].

Maintenant, nous étudions des effets de diffraction multiple dans une configuration qui n'est plus de FRAUNHOFER. Nous reprenons cependant les notations, les hypothèses générales et les approximations présentées au paragraphe 1 du premier article [1], mais nous changeons la conjugaison produite par le système optique ( $L$ ) – voir figure 1 : l'écran de front ne passe plus par l'image du point source éclairant le dispositif, mais se trouve sur l'image ( $I$ ), par ( $L$ ), du premier obstacle diffractant ( $O$ ) uniformément éclairé.

D'après l'optique géométrique, si ( $O$ ) est une fente disposée comme sur la figure 1, sur l'axe  $O'_1x'$  on ne verra que  $B'_1B'_2$ , image de la portion  $B_1B_2$  de la fente ( $O$ ) ; sera intéressant de comprendre en quoi l'optique ondulatoire rejoint cette prédiction.



**Figure 1 :** Formation de l'image cohérente ( $I$ ) d'un premier obstacle diffractant ( $O$ ) dans le champ de pleine lumière d'un instrument ( $L$ ), éclairé par un faisceau collimaté, compte tenu de la diffraction par sa pupille d'entrée ( $P_E$ ).

Et surtout, nous voulons analyser (quantitativement par un modèle) une observation effectuée par Isaac NEWTON, inexpliquée par lui, et dont Thomas YOUNG cherchait à rendre compte qualitativement par la PROPOSITION III de sa dissertation [3] lue devant la *Royal Society* le 12 novembre 1801 : quand on regarde une ouverture<sup>(1)</sup> éclairée, depuis un point d'observation situé dans son ombre (expérience de type strioscopique), on voit de la lumière provenir de son bord<sup>(2)</sup>. YOUNG écrivait : « [...] with light [...] some faint

- (1) *i.e.* un obstacle diffractant binaire : opaque sur un domaine, uniformément transparent ailleurs.
- (2) À propos des idées historiques fécondes concernant la théorie de la diffraction, rappelons quelques dates : le célèbre mémoire d'Augustin FRESNEL, déposé par lui le 29 juillet 1818 à l'Académie des sciences (pour son concours sur la diffraction lancé le 17 mars 1817), fut primé le 15 mars 1819. Il contient le principe dit d'HUYGENS-FRESNEL, qui est donc postérieur à la dissertation de YOUNG, et rend compte de la diffrac-

*radiations do actually diverge beyond any probable limits of inflection, rendering the margin of the aperture distinctly visible in all directions ; these are attributed by NEWTON to some unknown cause, distinct from inflection ; (Optics, Third Book, Obs. 5) » [3], p. 26). Plus précisément et en termes modernes, NEWTON a observé la figure de diffraction de FRESNEL par un bord d'objet opaque, en plaçant un couteau sur le faisceau de lumière solaire entrant par un trou dans une pièce sombre ; alors, d'abord pour mieux voir la lumière diffractée (« *streams of faint Light [...] into the shadow, like the Tails of Comets* » [4]) qui est faible par rapport à la lumière directe, NEWTON a isolé une partie de celle-là par un trou explorateur ; puis il eut la curiosité de regarder le couteau au travers de ce trou explorateur – ce qui est une observation de type strioscopique. Il écrit : « *For placing my Eye in that Light beyond the end of that stream which was behind the Knife, and looking towards the Knife, I could see a line of Light upon its edge, and that not only when my Eye was in the line of the Streams, but also when it was without that line either towards the point of the Knife, or towards the handle. This line of Light appear'd contiguous to the edge of the Knife, and was narrower than the Light of the innermost Fringe, and narrowest when my Eye was farthest from the direct Light, and therefore seem'd to pass between the Light of that Fringe and the edge of the Knife, and that which passed nearest the edge to be most bent, though not all of it.* » [4].*

Cette expérience peut être modélisée comme sur la figure 1 : le premier obstacle ( $O$ ) (le couteau de NEWTON) est figuré par une fente, ( $P_E$ ) correspond au trou explorateur<sup>(3)</sup>, le système ( $L$ ) remplace l'ensemble des dioptries oculaires, l'écran joue le rôle de la partie centrale de la rétine.

*A priori*, il s'agit là d'un problème de double diffraction de FRESNEL : de ( $O$ ) à la pupille d'entrée ( $P_E$ ), puis de ( $P_E$ ) à l'écran<sup>(4)</sup>. Mais nous verrons qu'il est avantageux d'aborder ce problème autrement : car dans la configuration présente, on peut reconnaître un problème de formation des images en éclairage cohérent [5-6]. Aussi commencerons nous par rappeler comment le formalisme de l'optique de FOURIER, appliqué à la formation des images, permet d'exprimer l'amplitude complexe sur l'axe  $O_1x'$ . Puis nous nous

---

tion par une ouverture en termes d'interférences dues à la superposition d'ondelettes fictives émises par tous les points éclairés de la surface de l'ouverture (ce qui correspond approximativement à une propriété mathématique des solutions de l'équation d'HELMHOLTZ, comme le prouva Gustav KIRCHHOFF en 1882). Les idées qualitatives de YOUNG ont reçu une confirmation mathématique à partir du moment où G. A. MAGGI (en 1888) puis Adalbert RUBINOWICZ (indépendamment en 1917) ont montré, dans le cas d'une ouverture bornée (opaque à l'extérieur) éclairée par une source ponctuelle, que la somme (au sens d'une intégrale) des ondelettes d'HUYGENS-FRESNEL est égale à l'onde transmise prévue par l'optique géométrique, plus une somme d'autres ondelettes fictives émises par tous les points du *pourtour* de l'ouverture.

- (3) s'il est circulaire et de même axe de révolution que la pupille d'entrée de l'œil mais de plus petit diamètre, sinon, dans notre modèle, ( $P_E$ ) correspond à celle-ci – on ne sait pas avec certitude lequel des deux est le plus grand, NEWTON disant seulement à ce propos que le trou explorateur est « *a little hole* » [4].
- (4) Ce n'est pas une strioscopie au sens strict des expériences d'ABBE, car ( $P_E$ ) n'est pas dans un plan de FOURIER – *i.e.* de la figure de diffraction de FRAUNHOFER par ( $O$ ).

placerons, pour toute la suite, dans le cas simple où le faisceau incident est collimaté. Nous montrerons alors quatre théorèmes généraux concernant la distribution d'intensité  $I_2$  dans  $(I)$  sur l'axe  $O_1'x'$  – dont le dernier est similaire à un de ceux démontrés pour une configuration de FRAUNHOFER ([1], § 1.2.4.). Enfin, nous ferons tracer numériquement les graphes de cette distribution pour des situations où  $(O)$  et  $(P_E)$  sont des fentes ; nous discuterons ces résultats en fonction de différents paramètres, comme la largeur relative des fentes, leur décentrement et leur écartement  $d$  – ce dernier paramètre nous laissant conjecturer une jolie distinction entre diverses formes de convergence du graphe vers celui du cas où  $d=0$ , avec des fentes mutuellement centrées. Nous serons alors armés pour l'analyse de l'observation de NEWTON [4], qui nous révélera quelques subtilités.

### 1. RAPPEL SUR LA FORMATION DES IMAGES EN ÉCLAIRAGE COHÉRENT

De façon générale, nous considérons ici le premier obstacle diffractant comme un objet  $(O)$  émettant une onde monochromatique d'amplitude complexe  $A(x, 0_+)$  en  $P \Big|_0^x$  (le point  $O_1$  est pris comme origine de même que dans [1-2]), et nous considérons que le second obstacle diffractant équivaut à la pupille d'entrée  $(P_E)$  de  $(L)$  – dont l'image par  $(L)$  est la pupille de sortie  $(P_S)$ . En accord avec les hypothèses des articles précédents [1-2], nous négligeons la diffraction par les autres diaphragmes de  $(L)$  que celui associé à  $(P_E)$  ; ceci est légitime tant que tous les points lumineux de  $(O)$  sont dans le champ de pleine lumière de  $(L)$  compte tenu de sa pupille d'entrée  $(P_E)$ .

Étudions l'amplitude complexe produite sur l'axe  $O_1'x'$  par le point  $M$  d'abscisse  $u$  (cf. figure 2, page ci-contre) – qui a pour image paraxiale, par  $(L)$ , le point  $M'$  d'abscisse  $u'$ . En tant que source d'une première ondelette sphérique d'HUYGENS-FRESNEL,  $M$  éclaire toute la pupille d'entrée, dont le point  $Q$  réémet alors une autre ondelette sphérique arrivant entre autres en  $P'$  d'abscisse  $x' = \gamma_1 x$  (où  $\gamma_1$  désigne le grandissement transversal entre  $O_1 x$  et  $O_1' x'$ ) – cf. figure 2.

Ce processus provoque, entre l'émission en  $M$  et la réception en  $P'$ , un déphasage retard  $k [(MQ') + \overline{Q'P'}]$  – où  $(MQ')$  désigne le chemin optique (relatif au milieu ambiant supposé linéaire quant à ses propriétés électromagnétiques) sur le rayon considéré de  $M$  à l'image  $Q'$  dans  $(P_S)$  du point  $Q$  de  $(P_E)$ , et  $\overline{Q'P'}$  la longueur algébrique du segment  $Q'P'$  (comptée positivement dans le sens de propagation de la lumière). On a

$$(MQ') + \overline{Q'P'} = (MM') + \overline{Q'P'} - \overline{Q'M'}$$

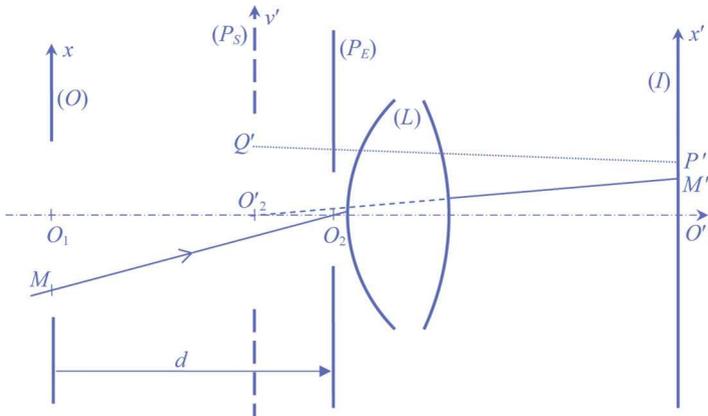


Figure 2 : Rayons, éventuellement fictifs, utilisés pour le calcul de la phase des ondelettes d'HUYGENS-FRESNEL.

Or dans l'approximation de GAUSS il y a stigmatisme entre  $M$  et  $M'$  (ainsi qu'entre  $O_2$  et  $O'_2$ ,  $O_1$  et  $O'_1$ ) ; alors les chemins optiques relatifs, de  $M$  à  $M'$  sur tous les rayons qui y passent (eux ou leurs prolongements), sont les mêmes pour tous ces rayons, et peuvent donc s'écrire

$$\begin{aligned} (MM') &= \overline{MO_2} + (O_2O'_2) + \overline{O'_2M'} \\ &= \overline{MO_2} - \overline{O_1O_2} + \overline{O_1O_2} + (O_2O'_2) + \overline{O'_2O'_1} - \overline{O_2O'_1} + \overline{O'_2M'} \\ &= \overline{MO_2} - \overline{O_1O_2} + (O_1O'_1) + \overline{O'_2M'} - \overline{O_2O'_1} \end{aligned}$$

Dans l'approximation de FRESNEL, en notant  $v'$  l'abscisse de  $Q'$ , on a

$$\overline{Q'P'} - \overline{Q'M'} \cong \frac{(x' - v') - (u' - v')^2}{2 O'_2O'_1} = \frac{x'^2 - u'^2}{2 O'_2O'_1} - \frac{x' - u'}{O'_2O'_1} v'$$

$$\overline{O'_2M'} - \overline{O_2O'_1} \cong \frac{u'^2}{2 O'_2O'_1}, \quad \overline{MO_2} - \overline{O_1O_2} \cong \frac{u^2}{2 O_1O_2}$$

donc 
$$(MQ') + \overline{Q'P'} \cong \frac{u^2}{2 O_1O_2} + (O_1O'_1) + \frac{x'^2}{2 O'_2O'_1} - \frac{x' - u'}{O'_2O'_1} v'.$$

On obtient l'amplitude complexe produite par  $M$  en  $P'$  par sommation de toutes les contributions correspondantes dues à tous les points  $Q$  de la pupille d'entrée ; cela revient à sommer sur toutes les valeurs de  $v'$  correspondant à la pupille de sortie. Il ne faut pas oublier le grandissement transversal pupillaire  $\gamma_2$ , faisant que le coefficient de transmission associé à  $v'$  est  $\tau_2(v'/\gamma_2)$ , et que la transformée de FOURIER de cette fonction de  $v'$  est contractée d'un facteur  $\gamma_2$  par rapport à  $\tilde{\tau}_2$  ; on trouve ainsi que l'amplitude

complexe produite en  $P'$  par le point  $M$  est proportionnelle à

$$\tilde{\tau}_2 \left( \gamma_2 \frac{x' - u'}{\lambda \frac{O_2' O_1'}{O_1 O_2}} \right) \exp \left[ \frac{ik}{2} \left( \frac{u^2}{O_1 O_2} + \frac{x'^2}{O_2 O_1'} \right) \right].$$

Comme l'amplitude complexe de l'onde émise en  $M$  est  $A(u, 0_+)$ , l'amplitude complexe (totale) en  $P'$  s'écrit :

$$A_2(x') \cong C \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} A(u, 0_+) \tilde{\tau}_2 \left( \gamma_2 \frac{x' - \gamma_1 u}{\lambda \frac{O_2' O_1'}{O_1 O_2}} \right) \exp \left( ik \frac{u^2}{2d} \right) du \right] \exp \left( ik \frac{x'^2}{2 \frac{O_2' O_1'}{O_1 O_2}} \right)$$

où  $C$  est une constante de proportionnalité qui dépend de la distance  $d$  entre  $(O)$  et  $(P_E)$ , du facteur de transmission de  $(L)$ , etc. Ceci est la formule fondamentale de la formation des images en éclairage cohérent dans les approximations de FRESNEL – voir [5-6] pour une démonstration plus détaillée. L'intégrale peut se ramener à une convolution de fonctions de la position ; cette formule fait donc intervenir un filtrage spatial.

## 2. CAS D'UN FAISCEAU INCIDENT COLLIMATÉ

### 2.1. Expression générale de l'intensité

On considère maintenant le cas simple où le premier obstacle diffractant  $(O)$  est éclairé par une onde plane monochromatique incidente ; donc son amplitude complexe sur  $(O)$  est  $A(u, 0_-) = A_0 \exp(ik \theta_0 u)$ , et celle de l'onde émergente de  $(O)$  s'écrit

$$A(u, 0_+) = \tau_1(u) A_0 \exp(ik \theta_0 u).$$

L'intensité (vibratoire) en  $P'$  sur l'axe  $O_1'x'$  est  $I_2(x') = K |A_2(x')|^2$  (où  $K$  est une constante réelle positive). En l'exprimant en fonction de l'abscisse  $x = x'/\gamma_1$  de l'antécédent  $P$  du point  $P'$  – i.e. en ramenant cette distribution d'intensité à l'échelle de l'objet  $(O)$  – et en posant  $I_0 := K |C A_0|^2$ , il vient

$$I_2(x) \cong I_0 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [\tau_1(u) \exp(ik \theta_0 u)] \tilde{\tau}_2 \left( \gamma_2 \frac{\gamma_1(x-u)}{\lambda \frac{O_2' O_1'}{O_1 O_2}} \right) \exp \left( ik \frac{u^2}{2d} \right) du \right|^2$$

Le grandissement angulaire pupillaire étant  $1/\gamma_2$  d'après la relation de LAGRANGE-HELM-

HOLTZ, le grandissement transversal de l'image s'en déduit sous la forme  $\gamma_1 = \frac{1}{\gamma_2} \frac{O_2' O_1'}{O_2 O_1}$ ,

donc

$$\gamma_2 \frac{\gamma_1(x-u)}{\lambda \frac{O_2' O_1'}{O_1 O_2}} = \frac{x-u}{\lambda \frac{O_2 O_1}{O_2 O_1}} = \frac{x-u}{-\lambda d}.$$

Cela permet d'écrire l'expression simplifiée

$$I_2(x) \cong I_0 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_1(u) \tilde{\tau}_2\left(\frac{x-u}{-\lambda d}\right) \exp\left[ik\left(\theta_0 u + \frac{u^2}{2d}\right)\right] du \right|^2 \quad (1).$$

Remarques importantes

- ◆ Si  $d$  tend vers l'infini, alors le terme gaussien complexe  $\exp\left(ik \frac{u^2}{2d}\right)$  tend vers 1, et on se trouve ainsi dans un cas particulier de l'expérience d'ABBE [7] – où l'objet est éclairé par un faisceau collimaté, donc il faut mettre la pupille de sortie dans le plan focal image de ( $L$ ), de façon que la pupille d'entrée soit à l'infini (avec des dimensions linéaires infinies). Dans ce cas, vis-à-vis de  $\tau_1$  il y a invariance de

$$A_2(x') \exp\left(-ik \frac{x'^2}{2 \frac{O_2 O_1}{O_1}}\right)$$

par translation si  $\theta_0 = 0$  – et de  $I_2$  de toute façon.

- ◆ Avec des formules un peu plus lourdes (du style de celles de l'annexe du premier article de cette série [1]), on peut généraliser notre étude au cas d'un éclairage divergent ou convergent ; comme cela n'enrichit pas les résultats physiques discutés ci-dessous, nous nous passerons de cette généralisation. Le critère permettant toujours de reconnaître une des configurations de l'expérience d'ABBE est le fait que dans l'expression de l'intensité, similaire à (1), le terme gaussien complexe vaut 1.
- ◆ Dans l'approximation de FRESNEL, pour un système centré ne limitant pas les faisceaux, on sait que (à des facteurs de phase sphérique et à une constante multiplicative près) la distribution d'amplitude complexe dans un plan de front est homothétique de celle dans son plan conjugué par ce système, conformément aux propriétés géométriques de l'imagerie paraxiale – donc il y a une relation point à point entre ces deux distributions [6]. Compte tenu de cette correspondance très simple, une méthode radicale pour déterminer (aux mêmes facteurs près mentionnés ci-dessus) la fonction  $A_2$  à partir de  $A(x, 0_-) = A_0 \exp(ik \theta_0 x)$  consiste à exprimer, en termes d'amplitudes complexes, la transmission par ( $O$ ) et diffraction de FRESNEL jusqu'à ( $P_E$ ), puis la transmission par ( $P_E$ ) et diffraction de FRESNEL inverse jusqu'à ( $O$ ) : cela nous ramène à une composition de deux intégrales.

Tel est le cas de notre expression (1), mais la composition d'intégrales qui y figure est dans l'ordre inverse de celui donné par le raisonnement radical ci-dessus : pour

(1), on doit effectuer d'abord l'intégrale sous-jacente à  $\tilde{\tau}_2\left(\frac{x-u}{-\lambda d}\right)$  d'après sa définition, puis l'intégrale visible sur la formule (1). Car au paragraphe 1 nous avons préféré utiliser une méthode de raisonnement alternative (qui profite fortement de la linéarité des équations de propagation – due à la linéarité supposée du milieu ambiant, etc.) : elle revient à écrire l'amplitude complexe finale sur ( $O$ ), évoquée ci-dessus, sous la forme

d’une intégrale faisant intervenir une fonction de GREEN qui est la réponse, en amplitude complexe sur  $(O)$ , de ce processus de transmission-diffraction de FRESNEL direct puis inverse appliqué à l’ondelette émise par un point étalon et source secondaire de  $(O)$ . Pour cela il faut exprimer d’abord cette fonction de GREEN, qui est l’amplitude complexe résultant de la transmission-diffraction de FRESNEL inverse – par  $(P_E)$  jusqu’à  $(O)$  – appliquée à l’ondelette sphérique émise par un point étalon de  $(O)$  jusqu’à  $(P_E)$  ; le calcul montre une compensation entre le facteur de phase sphérique dans l’intégrale de la formule de diffraction de FRESNEL inverse, et le facteur de phase sphérique de l’ondelette transmise au niveau de  $(P_E)$ , d’où finalement le fait que la fonction de GREEN s’exprime simplement avec  $\tilde{\tau}_2$  au lieu d’une transformée de FRESNEL de  $\tau_2$  – ce qui serait plus lourd. L’avantage de raisonner (en termes d’amplitude complexe) d’emblée dans le plan image de  $(O)$  par  $(L)$ , comme nous l’avons fait dans le paragraphe 1, est de voir aussitôt et sans calcul que la contribution d’un point  $M$  de  $(O)$  résulte d’un processus de transmission-diffraction de FRAUNHOFER par  $(P_E)$ , dont on sait bien que le résultat s’exprime classiquement avec  $\tilde{\tau}_2$ .

Alors que la méthode radicale conduit à composer deux transformations de FRESNEL (et intercaler une multiplication par  $\tau_2$ ), notre méthode alternative donne un résultat plus simple : elle fait composer la transformation de FOURIER de  $\tau_2$  avec une transformation de FRESNEL impliquant  $\tau_1$  (à cause de la sommation des amplitudes complexes dues à tous les points  $M$  en tenant compte de la variation de leur argument en fonction de l’abscisse de  $M$  au second ordre), selon l’approximation de FRESNEL.

## 2.2. Propriétés

### 2.2.1. Effet d’une translation

Considérons une autre paire d’obstacles diffractants, translétés de  $x_0$  dans le sens de  $O_1x$  par rapport à l’ancienne paire – donc caractérisées par les nouveaux coefficients de transmission  $\tau'_1(x) := \tau_1(x - x_0)$  et  $\tau'_2(x) := \tau_2(x - x_0)$  ; alors, compte tenu de la relation bien connue entre les transformées de FOURIER des fonctions  $\tau_1$  (resp.  $\tau_2$ ) et  $\tau'_1$  (resp.  $\tau'_2$ ), l’intensité sur l’axe  $O'_1x'$  mais ramenée à l’échelle de l’objet  $(O)$  devient

$$I'_2(x) \cong I_0 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [\tau_1(u - x_0) \exp(ik \theta_0 u)] \tilde{\tau}_2\left(\frac{x-u}{-\lambda d}\right) \exp\left(ik \frac{x-u}{d} x_0\right) \exp\left(ik \frac{u^2}{2d}\right) du \right|^2$$

Effectuons dans l’intégrale ci-dessus le changement de variable  $U := u - x_0$  ; cela donne

$$I'_2(x) \cong I_0 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \tau_1(U) \exp\left[ik \theta_0 (x_0 + U)\right] \right\} \tilde{\tau}_2\left(\frac{x - x_0 - U}{-\lambda d}\right) \exp\left\{i \frac{k}{d} \left[ (x - x_0 - U) x_0 + \frac{(x_0 + U)^2}{2} \right] \right\} dU \right|^2$$

Certains termes indépendants de  $U$  peuvent être mis en facteur de l'intégrale, et comme ils sont unitaires, ils ne contribuent pas à la nouvelle intensité ; elle s'écrit donc de manière plus concise, après simplification des produits  $x_0 U$  dans la dernière exponentielle :

$$I'_2(x) \cong I_0 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [\tau_1(U) \exp(ik \theta_0 U)] \tilde{\tau}_2 \left( \frac{(x-x_0)-U}{-\lambda d} \right) \exp \left( ik \frac{U^2}{2d} \right) dU \right|^2 = I_2(x-x_0)$$

**Donc une translation d'ensemble des obstacles diffractants parallèlement à leurs plans entraîne pour l'intensité de la figure observée sur (I), quantitativement, le même effet que celui prédit par l'optique géométrique : toujours cette translation.**

### 2.2.2. Loi de similitude

Considérons une nouvelle paire de fentes, de dimensions *transversales* rétrécies d'un facteur  $\kappa > 0$  par rapport à celles de la première paire – donc ces nouvelles fentes sont caractérisées par les nouveaux coefficients de transmission  $\tau'_1(x) := \tau_1(\kappa x)$  et  $\tau'_2(x) := \tau_2(\kappa x)$  – et changeons l'inclinaison de l'onde incidente en  $\theta'_0 := \kappa \theta_0$ , ainsi que l'écart *longitudinal* entre les fentes en  $d'' := d/\kappa^2$  (ce qui change la constante  $C$  en  $C''$ ) ; alors, compte tenu de la relation bien connue entre les transformées de FOURIER des fonctions  $\tau_1$  (resp.  $\tau_2$ ) et  $\tau'_1$  (resp.  $\tau'_2$ ), la nouvelle intensité sur  $O'_1 x'$  mais ramenée à l'échelle de l'objet ( $O$ ) s'écrit

$$I''_2(x) \cong I_0'' \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \tau_1(\kappa u) \exp(ik \kappa \theta_0 u) \right] \frac{1}{\kappa} \tilde{\tau}_2 \left( \frac{x-u}{-\kappa \lambda d/\kappa^2} \right) \exp \left( ik \frac{u^2}{2d/\kappa^2} \right) du \right|^2$$

(où  $I_0'' := K |C'' A_0|^2$ ) et le changement de variable  $u'' := \kappa u$  montre que

$$\begin{aligned} I''_2(x) &\cong \frac{1}{\kappa^4} I_0'' \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \tau_1(u'') \exp(ik \theta_0 u'') \right] \tilde{\tau}_2 \left( \frac{\kappa x - u''}{-\lambda d} \right) \exp \left( ik \frac{u''^2}{2d} \right) du'' \right|^2 \\ &= \frac{I_0''}{\kappa^4 I_0} I_2(\kappa x) \end{aligned}$$

Alors **la nouvelle figure de diffraction est l'homothétique de la première figure, d'un facteur  $1/\kappa$  et par rapport à  $O$ .**

### 2.2.3. Lien entre changement d'incidence et translations transversales différentielles

En notant  $\tilde{\tau}_2^{\theta_0 d}$  la transformée de FOURIER de

$$\tau_2^{\theta_0 d}(x) := \tau_2(x - \theta_0 \overline{O_2 O_1}) = \tau_2(x + \theta_0 d),$$

on obtient pour  $I_2(x)$  une expression encore plus compacte :

$$I_2(x) \cong I_0 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_1(u) \tilde{\tau}_2^{\theta_0 d} \left( \frac{x-u}{-\lambda d} \right) \exp \left( ik \frac{u^2}{2d} \right) du \right|^2$$

Elle montre que, en ce qui concerne l'intensité, **le résultat d'une translation du second obstacle de  $x_0$  dans le sens de  $\mathbf{u}_x$  est identique à celui d'une variation d'incidence valant  $\Delta\theta_0 = -x_0/d$** . Bien sûr, cela ne correspond pas à une translation de la figure observée sur l'écran ! Et dans l'approximation de l'optique géométrique, cela peut changer la distribution d'intensité sur  $O'_1x'$ .

### 2.2.4. Effet d'une modulation du premier obstacle

Considérons maintenant que, par rapport au premier montage, le premier obstacle est modulé avec une fréquence spatiale  $\nu \mathbf{u}_x$ , *i.e.* que  $\tau_1(x)$  est changé en  $\tau_1(x) e^{i2\pi\nu x}$ . Alors l'intensité sur  $O'_1x'$  mais ramenée à l'échelle de l'objet ( $O$ ) devient

$$I_0 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_1(u) e^{i2\pi\nu u} \tilde{\tau}_2 \left( \frac{x-u}{-\lambda d} \right) \exp \left[ ik \left( \theta_0 u + \frac{u^2}{2d} \right) \right] du \right|^2 = I_0 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_1(u) \tilde{\tau}_2 \left( \frac{x-u}{-\lambda d} \right) \exp \left\{ ik \left[ (\theta_0 + \lambda\nu) u + \frac{u^2}{2d} \right] \right\} du \right|^2$$

**En ce qui concerne l'intensité sur l'axe  $O'_1x'$ , l'effet de la modulation du premier obstacle avec une fréquence spatiale  $\nu \mathbf{u}_x$  est le même que celui d'une variation de  $\theta_0$  égale à  $\lambda\nu$  – donc, d'après le théorème précédent, cet effet est le même que celui d'une translation du second obstacle de  $-\lambda\nu d$  dans le sens de  $\mathbf{u}_x$ .**

## 3. IMAGE D'UNE FENTE DERRIÈRE UNE AUTRE CENTRÉE, EN INCIDENCE NORMALE

Comme convenu, nous nous limitons au cas simple où les obstacles diffractants sont formés de fentes parallèles infiniment longues ; alors les fonctions  $\tau_1$  et  $\tau_2$  pourront être écrites facilement à l'aide de la fonction *rect*, définie par

$$\text{rect } x := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1/2, +1/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et dont la transformée de FOURIER est la fonction *sinc*, définie par

$$\text{sinc } x := \begin{cases} (\sin \pi x) / (\pi x) & \text{si } x \in \mathbf{R}^* \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

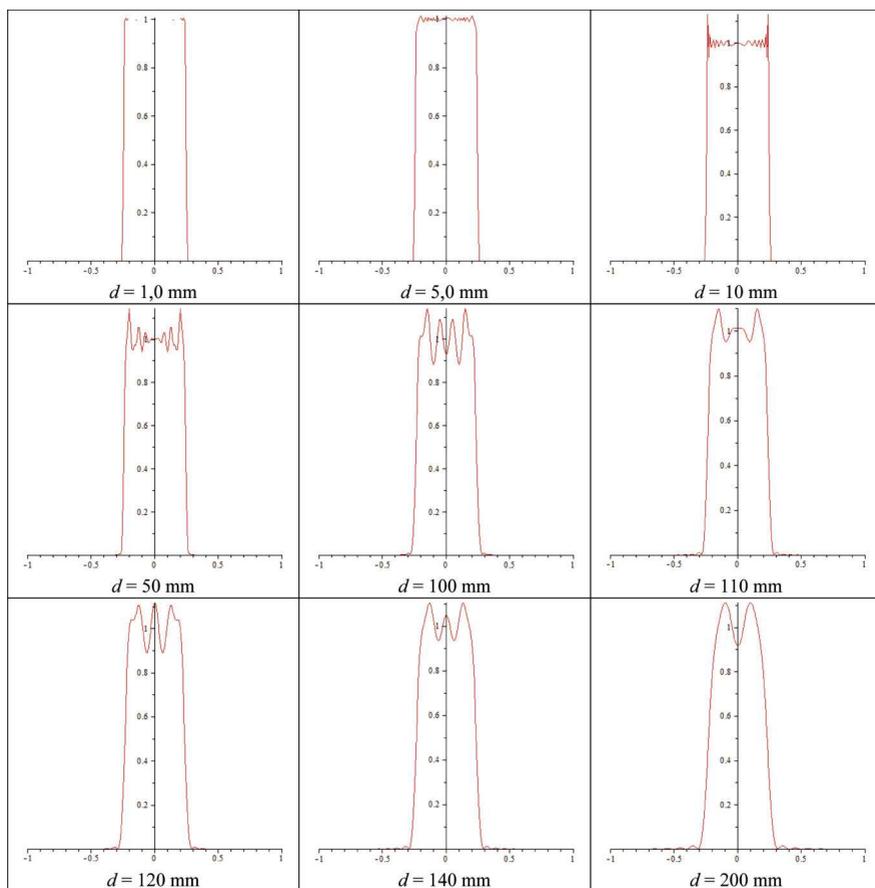
Pour tous les calculs numériques et les graphes de cet article nous prenons  $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ , et pour tout ce paragraphe nous considérons  $\tau_1(x) = \text{rect}(x/a_1)$ ,  $\tau_2(x) = \text{rect}(x/a_2)$  et  $\theta_0 = 0$ . Comme dans les articles précédents [1-2] de cette série, les simulations ont été faites par *Maple*<sup>TM</sup>.

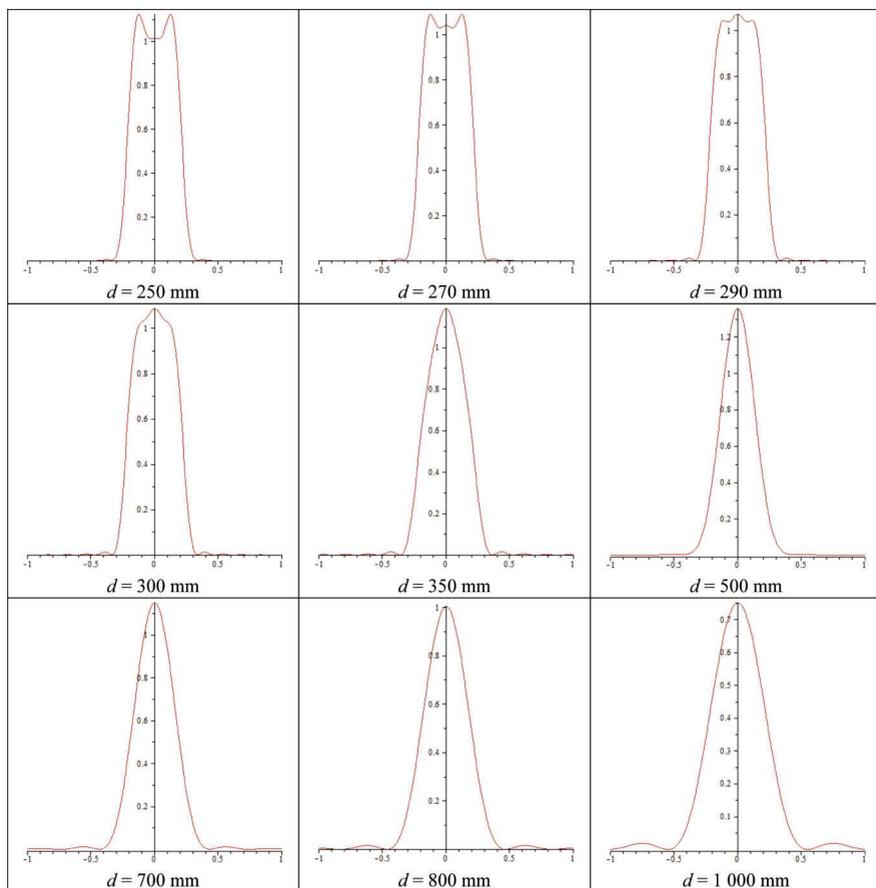
### 3.1. Seconde fente plus large que la première

Ici, nous choisissons  $a_1 = 0,5$  mm et  $a_2 = 1,0$  mm (largeurs des deux fentes).

**N.B. :** Pour tous les graphes, les abscisses sont exprimées en millimètres et représentent la coordonnée de l'antécédent du point courant de l'écran observé sur l'axe  $O_1'x'$ , l'origine étant au centre de la première fente. Les ordonnées représentent les intensités, avec une unité arbitraire, mais inchangée pour tous les graphes d'un même tableau.

Nous regroupons dans le tableau ci-dessous les graphes de l'intensité obtenue sur  $O_1'x'$  avec deux fentes toujours centrées, mais pour diverses valeurs de  $d$ .





**Tableau 1 :** Fentes centrées,  $\theta_0 = 0$ ,  $a_1 = 0,5$  mm et  $a_2 = 1,0$  mm.

### Commentaires des graphes

Lorsque les fentes sont superposées centrées et que la seconde est plus large que la première, la diffraction par celle-là n'intervient plus dans la formation de l'image de celle-ci. Lorsque  $d$  tend vers zéro, le graphe de l'intensité converge vers un rectangle de largeur  $a_1$ .

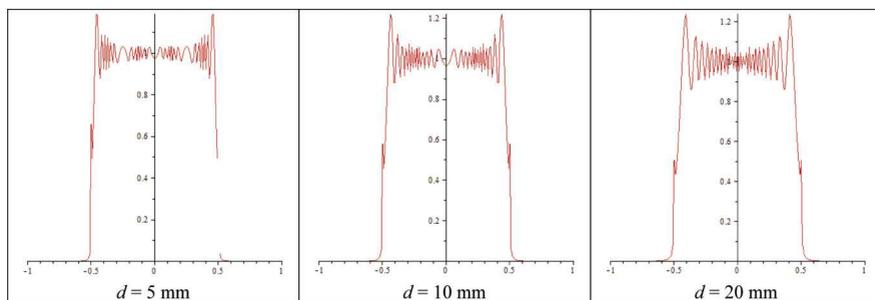
- ◆  $d = 1,0$  mm : situation très proche de la limite décrite ci-dessus.
- ◆  $d = 5,0$  mm à 10 mm : l'accroissement de l'amplitude des oscillations fait apparaître des franges visibles, et suggère que la convergence évoquée ci-dessus est uniforme.
- ◆  $d = 50$  mm à 110 mm : l'interfrange augmente, car il est de l'ordre de  $\sqrt{\lambda d}$ , et le nombre de franges diminue. Un arrondi devient perceptible au bord de l'image de la pre-

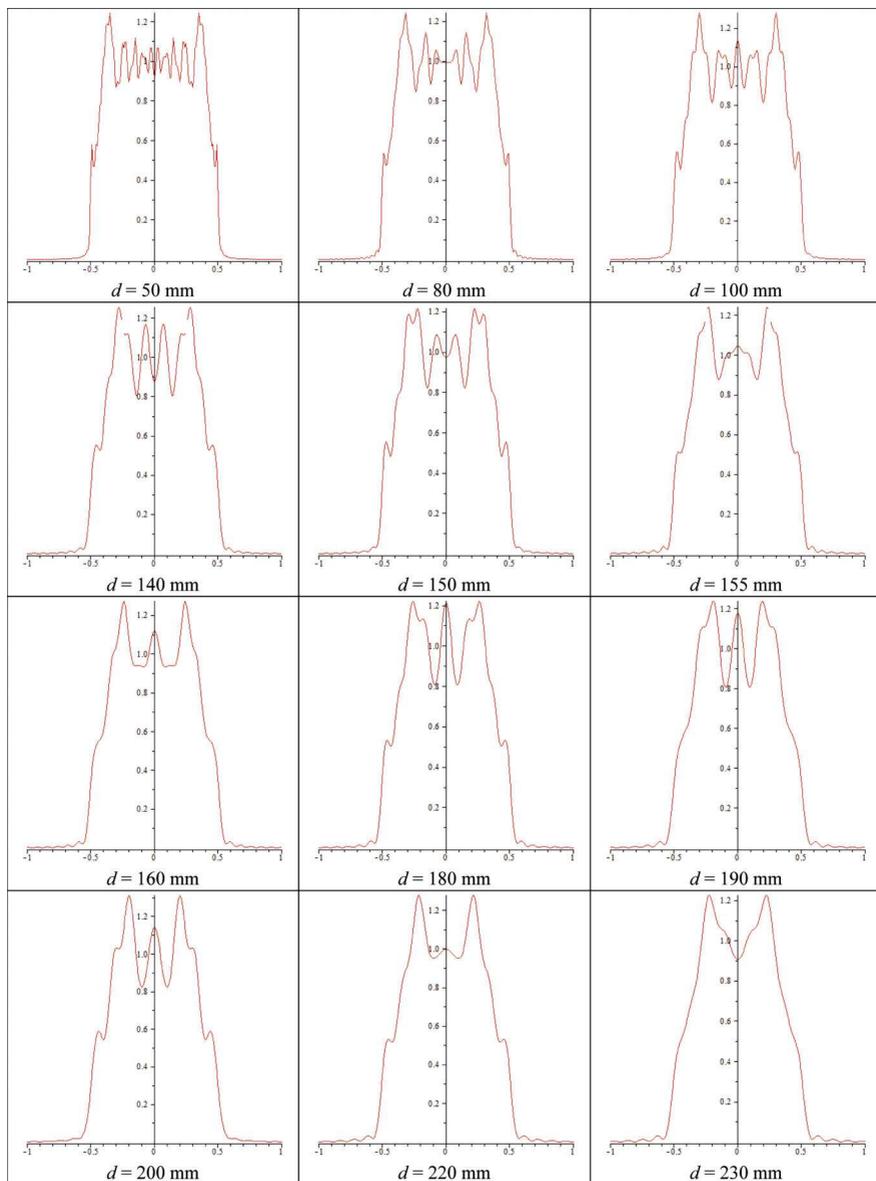
mière fente ; puis des pieds de diffraction, de largeur plus petite que l'interfrange, deviennent plus ou moins visibles.

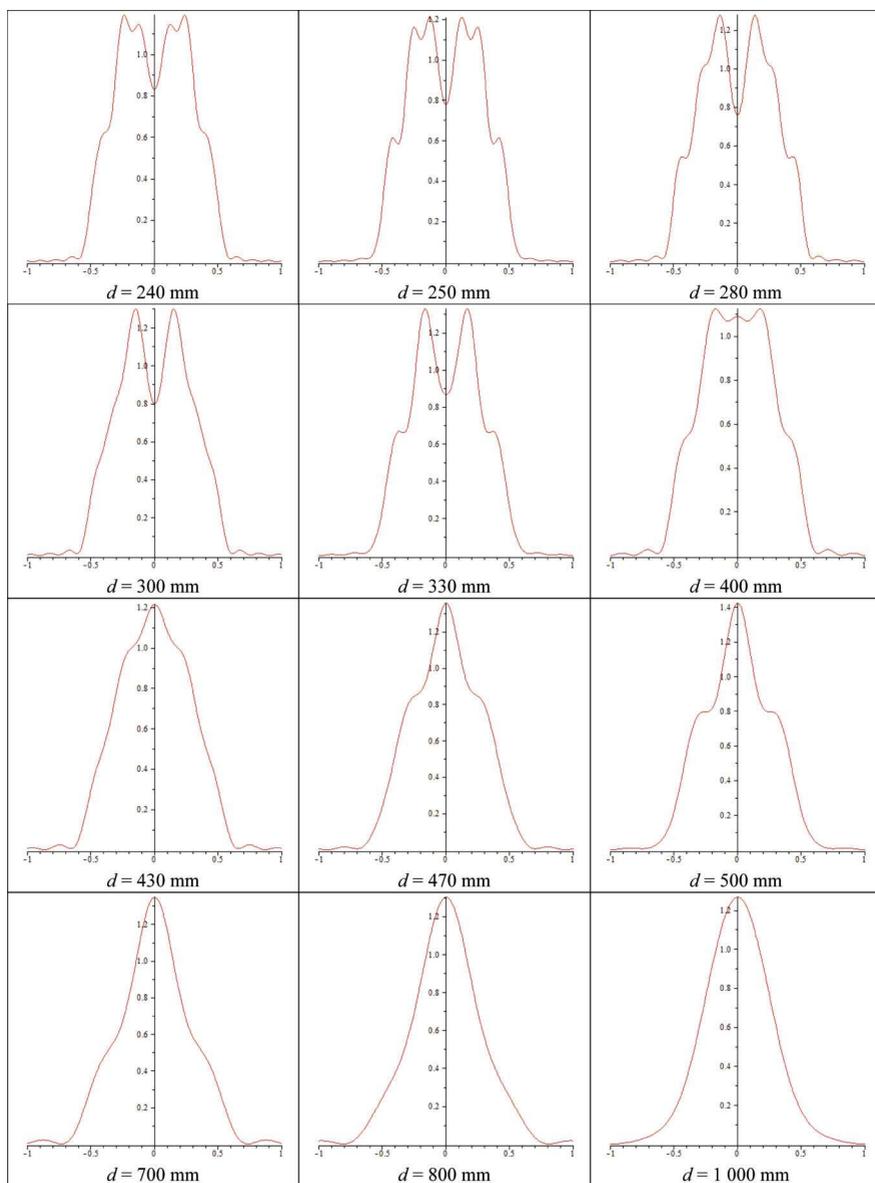
- ◆  $d = 110 \text{ mm}$  : noter le méplat central, transition naturelle entre les graphes des fonctions ayant un minimum central (comme pour  $d = 100 \text{ mm}$ ) et celles ayant un maximum central (comme pour  $d = 120 \text{ mm}$ ).
- ◆  $d = 200 \text{ mm}$  : la largeur des pieds a augmenté plus vite que l'interfrange.
- ◆  $d = 290 \text{ mm}$  : les dernières franges sont en train de disparaître. À partir de maintenant, la figure ressemble de plus en plus à la figure de diffraction de FRAUNHOFER par une fente seule, et cette ressemblance sera quasi parfaite si  $\lambda d/a_2 \gg a_1$  et  $d \gg a_2^2/\lambda = 2 \text{ m}$  ; alors l'échelle de la figure sera quasi proportionnelle à  $d$ .
- ◆  $d = 500 \text{ mm}$  : noter le brouillage des pieds de diffraction, à cause de la largeur de la première fente.
- ◆ Quand  $d$  continue à augmenter, le contraste des pieds oscille.
- ◆ Si  $d$  tend vers l'infini, la largeur du profil d'intensité observé devient de plus en plus grande, et sa hauteur de plus en plus faible ; on tend vers un cas particulier d'expérience d'ABBE qui est ici un filtrage passe-bas très sélectif (visualisation du carré du module de la moyenne de  $\tau_1$ , nulle sur  $]-\infty, +\infty[$  puisque  $\tau_1$  est à support borné).

### 3.2. Fentes de même largeur

Maintenant, nous prenons  $a_1 = a_2 = 1,0 \text{ mm}$  ; donc la longueur de RAYLEIGH associée à la seconde fente est  $a_2^2/\lambda = 2 \text{ m}$ , comme au sous-paragraphe 3.1.







**Tableau 2 :** Fentes centrées,  $\theta_0 = 0$ ,  $a_1 = a_2 = 1,0$  mm.

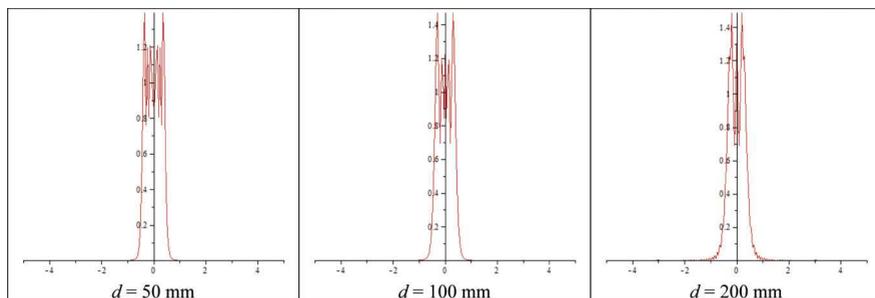
### Commentaires des graphes

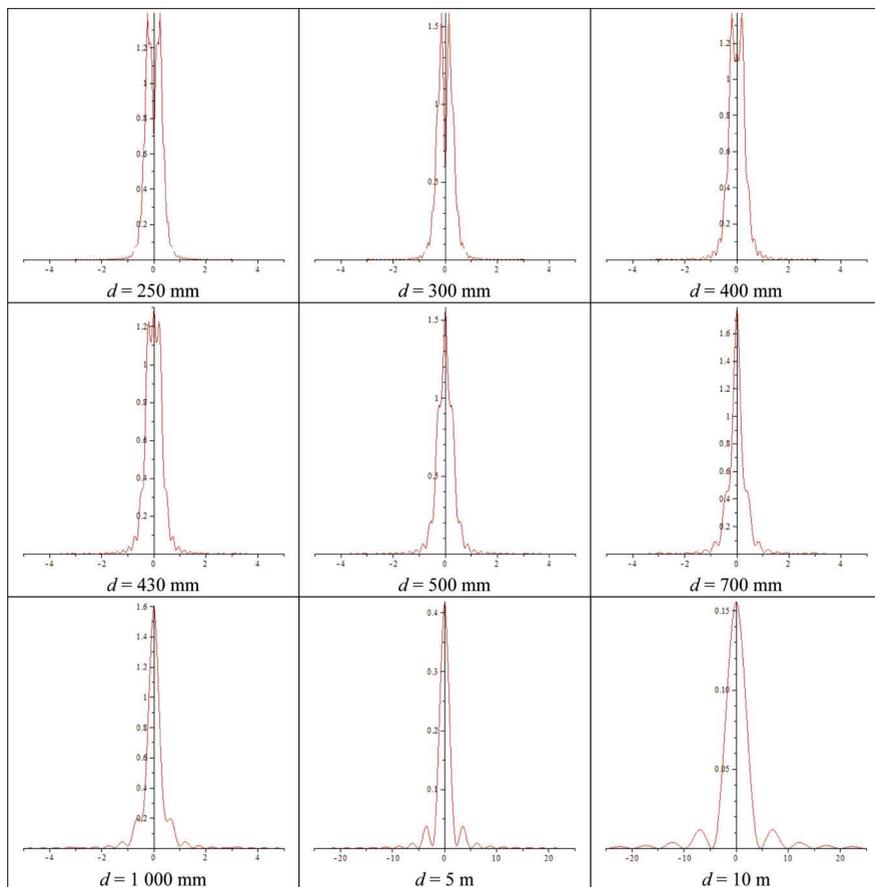
Lorsque les fentes sont superposées centrées et que la seconde est aussi large que la première, celle-là cache l'autre, et on forme l'image de la seconde sans diffraction – conformément aux hypothèses précisées au début du paragraphe 1. Lorsque  $d$  tend vers zéro, le graphe de l'intensité converge vers un rectangle de largeur  $a_2$ .

- ◆  $d = 5,0$  mm : situation proche de la limite ci-dessus ; mais l'observation d'oscillations d'intensité – très nombreuses – dont l'amplitude crête-crête ne semble pas tendre vers zéro avec  $d$  (comparer avec les graphes suivants) suggère que la convergence évoquée ci-dessus est seulement une convergence simple. Noter les trois zones de fort élargissement de l'interfrange ! Noter aussi l'arrondi, perceptible dès maintenant, au bord de l'image de la première fente.
- ◆  $d = 10$  mm : les deux zones latérales d'élargissement de l'interfrange ont disparu !
- ◆  $d = 20$  mm : la zone centrale d'élargissement de l'interfrange a aussi disparu. Au près des bords de l'image, l'interfrange est de l'ordre de  $\sqrt{\lambda d}$ .
- ◆  $d = 50$  mm à 400 mm : l'interfrange augmente et le nombre de franges va globalement en diminuant, par fusion de franges – mais on observe aussi des scissions de franges, ce qui augmente momentanément leur nombre. Noter l'apparition de pieds de diffraction, de largeur plus petite et de visibilité variable avec  $d$ .
- ◆  $d = 430$  mm à 1 000 mm : même commentaire qu'au sous-paragraphe 3.1. pour  $d = 290$  mm avec les deux conditions mentionnées, sauf que maintenant la seconde suffit.

### 3.3. Seconde fente moins large que la première

Pour finir, prenons  $a_1 = 6$  mm et  $a_2 = 1,0$  mm ; la longueur de RAYLEIGH associée à la seconde fente est toujours 2 m.





**Tableau 3 :** Fentes centrées,  $\theta_0 = 0$ ,  $a_1 = 6,0$  mm et  $a_2 = 1,0$  mm.

### Commentaires des graphes

Lorsque  $d$  tend vers zéro, la seconde fente étant de largeur inférieure ou égale à celle de la première, comme au sous-paragraphe précédent 3.2. le graphe de l'intensité converge vers un rectangle de largeur  $a_2$ .

- ◆  $d = 50$  m : situation assez proche de la limite ci-dessus, vers laquelle la convergence ne semble pas uniforme (cf. § 3.2.). Vraisemblablement ceci est lié au fait que, quel que soit  $d$ , les bords de la seconde fente sont toujours éclairés par le faisceau collimaté prévu par l'optique géométrique. On voit bien que la seule partie de l'image notablement éclairée est celle de la portion  $B_1B_2$  (cf. figure 1), de largeur 1 mm, et centrée parce que  $\theta_0 = 0$  ; la quasi-nullité de l'intensité de l'image des parties exté-

rieures à  $B_1B_2$  vient d'interférences destructives entre les taches image de points voisins : car sur le domaine de  $u$  où  $\tilde{\tau}_2\left(\frac{u-x}{\lambda d}\right)$  n'est pas négligeable dans la formule (1) avec  $x$  hors de l'intervalle correspondant à  $B_1B_2$ , les variations de  $\theta_0 u - \frac{u^2}{2O_2O_1}$  – donc de  $\frac{(u + \theta_0 d)^2}{2d}$  – dépassent un seuil critique (comme il en existe pour d'autres intégrales paramétrées) à l'échelle de  $\lambda$  (ceci étant d'autant plus brutal que  $d := \overline{O_1O_2}$  est petit). Par ailleurs, noter l'arrondi au bord de l'image de  $B_1B_2$ .

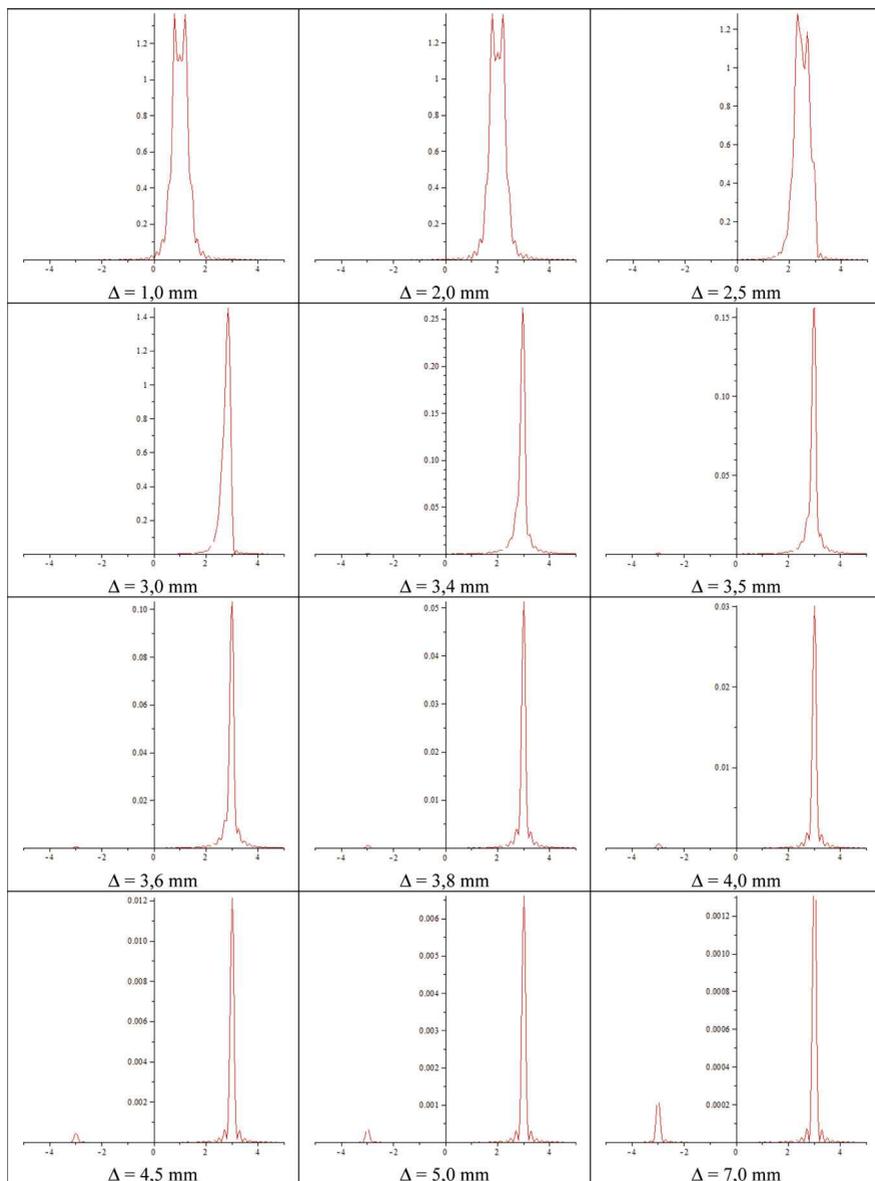
- ◆  $d = 100$  mm : auprès des bords de l'image, l'interfrange est de l'ordre de  $\sqrt{\lambda d}$ .
- ◆  $d = 200$  mm à 300 mm : l'interfrange augmente et le nombre de franges va en diminuant. Noter l'apparition de pieds de diffraction, de largeur plus petite et de visibilité variable avec  $d$ .
- ◆  $d = 400$  mm : naissance d'une frange centrale brillante au milieu d'une frange sombre, par scission de celle-ci.
- ◆  $d = 430$  mm à 1 000 mm : le centre de cette frange brillante est devenu le maximum absolu.
- ◆  $d = 5$  m à 10 m : attention au changement d'échelle des abscisses ! Les minima locaux, même comparés au maximum absolu central, tendent vers zéro. La figure se met à ressembler de plus en plus à la figure de diffraction de FRAUNHOFER par une fente seule, et cette ressemblance sera quasi parfaite si  $d \gg a_1 a_2 / \lambda = 12$  m  $>$   $a_2^2 / \lambda = 2$  m.

Signalons que pour  $d = 20$  m on obtient une intensité au centre quasiment égale (et non pas nettement inférieure) à celle obtenue pour  $d = 10$  m ! Cela peut être attribué au fait qu'à  $d = 20$  m la seconde fente est sur une frange claire rendue possible par l'importante diffraction à cette grande distance  $d$ .

#### 4. EFFET D'UN DÉCENTRAGE DES FENTES, OU DE L'OBLIQUITÉ DU FAISCEAU D'ÉCLAIRAGE

Les propriétés des sous-paragraphes 2.2.1. et 2.2.3. impliquent qu'on ne perd pas d'information en n'étudiant que l'effet du décentrage  $\Delta$  de la seconde fente, avec  $\theta_0$  nul. En gardant ainsi la première fente centrée (et non plus la seconde comme dans [2]), on laissera l'axe des abscisses de nos graphes fixe par rapport à cette fente-là, ce qui simplifiera l'interprétation de l'évolution des graphes. Donc, dorénavant,  $\tau_2(x) = \text{rect} \frac{x - \Delta}{a_2}$ , et  $\tau_1$  reste inchangé.

Le cas le plus riche est celui où la seconde fente est moins large que la première ; alors on prend  $a_1 = 6,0$  mm et  $a_2 = 1,0$  mm.

4.1. Écart  $d = 400$  mm

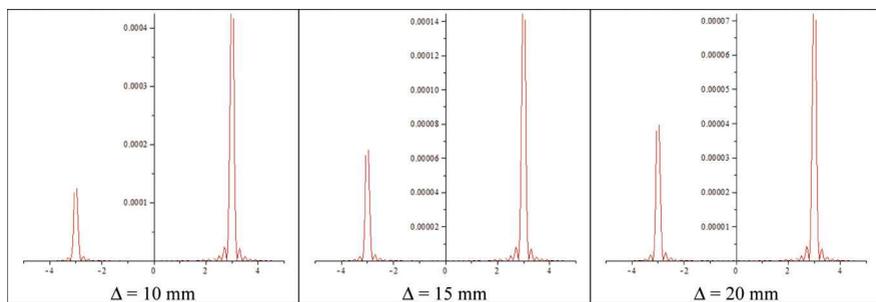


Tableau 4 :  $\theta_0 = 0$ ,  $d = 400$  mm,  $a_1 = 6,0$  mm et  $a_2 = 1,0$  mm.

### Commentaires des graphes

- ◆  $\Delta = 0,0$  mm à  $2,0$  mm : l'évolution du graphe est quasiment une translation de  $\Delta$  (si on néglige l'apparition de la dissymétrie due au décentrage, perceptible dès  $\Delta = 2$  mm au niveau des intensités de certaines franges fines). Rappelons que d'après l'optique géométrique, jusqu'à  $\Delta = 2,5$  mm la seconde fente est uniformément éclairée.
- ◆  $\Delta = 2,5$  mm : d'après l'optique géométrique, un bord de la seconde fente est sur le bord du faisceau qui l'éclaire. On constate maintenant une nette dissymétrie dans le profil d'intensité, avec une coupure plus abrupte à l'abscisse du bord droit de la première fente (3 mm).
- ◆  $\Delta = 2,5$  mm à  $3,4$  mm : toujours d'après l'optique géométrique, la largeur de la partie de la seconde fente éclairée par le faisceau collimaté issu de la première passe de  $1,0$  mm à  $0,1$  mm. La largeur du profil d'intensité diminue moins, à cause de la diffraction ; avec  $\Delta = 3,4$  mm celle-ci devient assez importante pour y supprimer la coupure abrupte à 3 mm. Noter la baisse de la hauteur des pieds de diffraction par rapport à celle du maximum principal.
- ◆  $\Delta = 3,5$  mm : c'est le cas critique où la largeur de la seconde fente éclairée devient nulle selon l'optique géométrique. À cause de la diffraction, il n'y a pas d'évolution notable ; on voit un très léger pic d'intensité à l'abscisse du bord gauche de la première fente ( $-3$  mm), mais par continuité (en fonction de  $\Delta$ ) il existait déjà pour des valeurs plus petites de  $\Delta$ .
- ◆  $\Delta = 3,6$  mm à  $20$  mm : depuis le cas critique la seconde fente ne reçoit plus que de la lumière diffractée, dont le flux diminue vite quand  $\Delta$  augmente ; le profil de chaque pic devient de plus en plus symétrique, le maximum absolu d'intensité décroît vite, le rapport des maxima absolus d'intensité des deux pics se rapproche de l'unité, l'ordre de grandeur de la largeur des pics n'évolue guère : c'est typiquement  $\lambda d/a_2 = 0,2$  mm. Cependant à  $\Delta = 3,6$  mm le pic de droite montre de discrets minima locaux d'intensité, qui deviennent de plus en plus marqués quand  $\Delta$  augmente, jusqu'à sembler donner des franges noires (comme avec une intensité proportionnelle à un classique

sinus cardinal au carré) à partir de  $\Delta = 6$  mm ; donc la largeur (à 2 % de son maximum d'intensité) de l'image strioscopique (au sens large) du bord de droite a nettement décru de  $\Delta = 3,6$  mm à 6 mm (mais elle reste quasi constante ensuite !), et avec la grande dynamique de l'œil humain cela peut expliquer en partie<sup>(5)</sup> la remarque de NEWTON déjà citée en introduction : « *This line of Light [...] was [...] narrowest when my Eye was farthest from the direct Light* » [4] – d'ailleurs, avec une vision normale et  $a_2 < 2$  mm, une telle variation de largeur angulaire vue depuis  $O_2$  devrait être de quelques minutes d'angle au moins, donc perceptible à l'œil nu. Quant à l'image strioscopique du bord gauche, de  $\Delta = 3,6$  mm à 6 mm son intensité est trop faible pour que nos graphes en révèlent précisément la structure ; mais vu que cette image strioscopique est nettement séparée de celle du bord droit, et que d'après l'optique géométrique l'image de ce bord gauche devrait être inexistante pour  $\Delta > -3,5$  mm +  $a_1 = -2,5$  mm déjà, il semblerait naturel que l'évolution de son profil d'intensité, de  $\Delta = 3,6$  mm à 6 mm, soit similaire à celle du profil pour l'image du bord droit de  $\Delta = 3,6$  mm +  $a_1 = 9,6$  mm à 6 mm +  $a_1 = 12$  mm – donc que cette évolution soit quasiment une affinité (cf. tableau 4).

La strioscopie, au sens strict, est un cas particulier d'expérience d'ABBE : le faisceau incident prévu par l'optique géométrique converge dans le plan de la pupille d'entrée (mais le faisceau réel y forme une figure de diffraction de FRAUNHOFER) sur une pastille opaque [7]. En généralisant le principe de la strioscopie au cas que nous étudions, *i.e.* dans cette situation où d'après les lois de l'optique géométrique il n'y aurait pas de lumière sur l'écran, l'observation de la première fente derrière la seconde permet ainsi de localiser, avec une limite de résolution de l'ordre de  $\lambda d/a_2$  au pire – à cause du terme

$\tilde{\tau}_2 \left( \frac{x-u}{\lambda \frac{\sigma_2 \sigma_1}{O_1}} \right) \exp \left[ ik \left( \theta_0 u - \frac{u^2}{2 \frac{\sigma_2 \sigma_1}{O_1}} \right) \right]$  dans (1) – l'origine de l'onde diffractée par la première : ce sont les voisinages de ses bords, où l'approximation fondamentale de l'optique géométrique n'est plus réalisée.

Le rapport des hauteurs des pics s'approche de l'unité quand le décentrage augmente : les angles de diffraction qui permettent à chaque « bord » d'envoyer une onde dans la seconde fente tendent l'un vers l'autre. À cause de la superposition de ces ondes partielles diffractées d'origines différentes, les rayons lumineux *de leur superposition* peuvent aussi être non rectilignes, et on ne peut pas dire que l'énergie moyenne arrivant auprès de l'image d'un bord de la première fente provient systématiquement, *dans l'onde globale*, du voisinage de ce bord.

(5) Autres éléments d'explication, intéressants pour des décentrages assez forts ( $\Delta > 6$  mm dans notre simulation) : quand  $\Delta$  augmente, la baisse de l'intensité maximale influencerait sur la vision de la largeur, comme avec un effet de seuil ; ou alors, de manière beaucoup plus simpliste, NEWTON aurait-il confondu la perception de l'intensité avec celle de la largeur angulaire ?

## 4.2. Écart $d = 5$ m

Attention au changement d'échelle des abscisses !

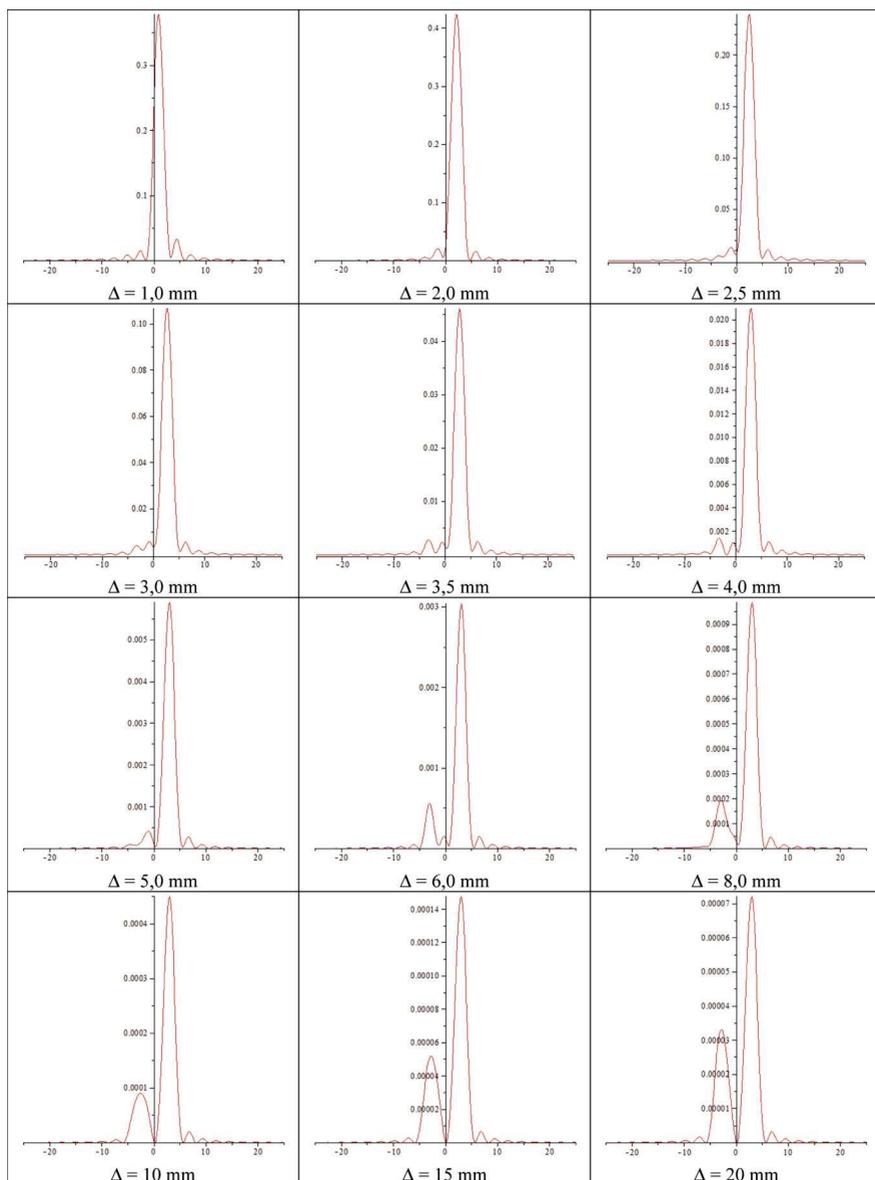


Tableau 5 :  $\theta_0 = 0$ ,  $d = 5$  m,  $a_1 = 6,0$  mm et  $a_2 = 1,0$  mm.

### Commentaire des graphes

- ♦ La diffraction importante par la première fente à  $d = 5$  m a gommé la netteté du bord du faisceau qui éclaire la seconde fente, et les changements notables qui se produisaient de  $\Delta = 2,5$  mm à 3,5 mm pour  $d = 400$  mm. Pour  $\Delta = 2,5$  mm à 3,5 mm, la différence de caractère abrupt entre les deux bords du pic principal d'intensité est moins marquée que dans le tableau 4, car elle est atténuée par la diffraction : celle-ci, à 5 m de la première fente, a diminué la pente de la chute de l'intensité au bord du faisceau qui éclaire la seconde fente.
- ♦ Quand  $\Delta$  dépasse nettement 3,5 mm, et à partir de 6 mm notamment, apparaît un second pic nettement plus haut que les pieds de la figure de diffraction, centré sur le bord gauche de la première fente, et qui se distingue encore bien du pic principal centré sur le bord droit. Cette observation de type strioscopique permet encore de résoudre ces deux bords, puisque la largeur de la seconde fente est encore assez supérieure à l'interfrange des interférences fictives entre des lumières qui seraient émises par ces deux bords – ou encore, de manière équivalente, parce que  $a_1 = 6$  mm  $>$   $\lambda d/a_2 = 2,5$  mm.

Pour  $d > a_1 a_2 / \lambda = 12$  m et  $\Delta \gg 3,5$  mm, les zones lumineuses dans l'observation strioscopique des bords de la fente se chevaucheront nettement (et interféreront). Contrairement à ce qui se passait jusqu'à  $d = 5$  m pour  $\Delta = 10$  mm à 20 mm, il n'y aura plus de maxima principaux aux abscisses  $\pm 3$  mm environ.

### CONCLUSION

Nous avons étudié la diffraction multiple dans une configuration où on observe, en éclairage cohérent, l'image du premier obstacle diffractant. Bien que ce ne soit plus de la diffraction multiple de FRAUNHOFER, nous avons pu éviter la lourdeur de l'approche mathématique en termes de double diffraction de FRESNEL, et trouver alors diverses propriétés mathématiques – entre autres, que l'effet de la modulation du premier obstacle est le même que celui obtenu dans une configuration de FRAUNHOFER !

Nous avons réalisé de nombreuses simulations numériques dans le cas simple de deux fentes successives ; ainsi avons-nous observé l'apparition de distributions d'intensité qui peuvent être cependant très complexes. Quand l'écart entre les fentes tend vers zéro, la seconde étant aussi large ou moins large que la première (*cf.* § 3.2. et 3.3.), la convergence, vers un résultat où l'effet de la diffraction par la seconde fente doit s'annuler, ne semble pas être une convergence uniforme – d'où la richesse phénoménologique potentielle de cette limite de l'optique géométrique. Dans des cas où l'approximation de l'optique géométrique prédit la présence de lumière dans l'image, nous avons précisé (*cf.* § 3.3.) comment les phénomènes ondulatoires produisent les résultats de l'optique géométrique.

Ceci soulève la question, plus générale, de l'influence de la longueur d'onde  $\lambda$  ; elle se prête naturellement à des lois de similitude. En effet, la relation (3) de notre article [1],

relative au cas où le premier obstacle est éclairé par une onde plane incidente, montre que si  $\lambda$  est contracté d'un facteur  $\alpha$ , puis  $\tau_1$  et  $\tau_2$  d'un facteur  $\alpha\kappa$ , enfin  $d$  d'un facteur  $\alpha\kappa^2$ , mais que  $\theta_0$  est dilaté d'un facteur  $\kappa$ , alors la distribution  $I_2$  est (à un facteur multiplicatif près) dilatée aussi d'un facteur  $\kappa$  – c'est évident pour  $\kappa = 1$  d'abord, et pour passer à  $\kappa \neq 1$  il suffit d'utiliser [1] § 1.2.2., ce qui le généralise. Quant à la relation (1) du présent article, elle montre que si  $\lambda$  est contracté d'un facteur  $\alpha$ , puis  $\tau_1$  et  $\tau_2$  d'un facteur  $\kappa$ ,  $\theta_0$  d'un facteur  $\alpha/\kappa$ , et  $d$  d'un facteur  $\kappa^2/\alpha$ , alors  $I_2$  est (à un facteur multiplicatif près) contracté aussi d'un facteur  $\kappa$  – cela généralise, en introduisant le facteur  $\alpha$ , l'exposé du sous-paragraph 2.2.2. Avec en plus la propriété de [1] § 1.2.3., et celle du sous-paragraph 2.2.3. du présent article, on voit qu'en ce qui concerne la distribution  $I_2$  à une constante multiplicative et à une similitude près, il y a au plus trois degrés de liberté donnés par les six paramètres  $\lambda$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\theta_0$ ,  $\Delta$  et  $d$  dans ces deux articles ; ici nous en avons fait jouer trois ( $a_1$ ,  $d$  et  $\Delta$ ).

L'étude du décentrage des fentes, quand elle traite des situations où aucune lumière ne devrait arriver sur l'écran d'après l'optique géométrique, est celle d'une imagerie strioscopique (au sens large). Le calcul montre effectivement la présence de pics lumineux dans une observation strioscopique ; si  $a_1 > \lambda d/a_2$  ils sont quasiment centrés sur l'image de chaque bord de la première fente, comme ceux évoqués par YOUNG en 1801. La largeur de ces pics dépend de celle de la seconde fente et de l'écart entre les fentes, ce qui donne la condition (la même que ci-dessus) pour que les bords soient résolus dans cette observation. La présence de ces pics est bien due à l'existence des bords de la fente, mais vu la complexité des lignes du vecteur de POYNTING moyen (donc des rayons lumineux) dans les situations où se superposent plusieurs ondes partielles de manière cohérente, on ne peut pas dire que l'énergie moyenne arrivant auprès de l'image d'un bord de la première fente provient systématiquement du voisinage de ce bord.

Il est intéressant de préciser aussi, pour une telle expérience, quelle est l'influence de la largeur de la source ; dans cet article elle était supposée ponctuelle, mais ce n'est qu'une idéalisation : pour l'expérience historique que nous analysons, NEWTON écrit que sa source de lumière était « *the Sun shining into my darken'd Chamber through a hole a quarter of an Inch broad, [...] placed at the distance of two or three Feet from [...] the blade of a sharp Knife [intercepting] some part of the Light which passed through the hole.* » [4]. Avec une source conventionnelle, donc incohérente spatialement, l'intensité obtenue est la somme des intensités dues à chacun de ses éléments, repérés ici par les valeurs de  $\theta_0$  associées à chacun d'eux. Pour un système donné de fentes, donc à  $\Delta$  fixé, on sait (cf. § 2.2.3.) que l'effet d'une variation de  $\theta_0$  à  $\Delta$  fixé est le même que celui d'une variation de  $\Delta$  à  $\theta_0$  fixé. Dans une configuration strioscopique, il peut donc se faire que la distribution d'intensité soit donnée par la somme de profils d'intensité comme ceux montrés dans le tableau 4 pour  $\Delta = 7$  mm à 20 mm ; alors, comme pour tous ces profils la

position et la noirceur relative des franges sombres sont quasi indépendantes de  $\Delta$  (ainsi que la largeur de l'image strioscopique d'un bord, puisque  $\Delta$  dépasse l'intervalle [(3,6 mm), 6 mm] discuté au sous-paragraphe 4.1. avec une remarque de NEWTON), on voit que ces trois caractéristiques ne sont quasiment pas affectées par la largeur de la source, mais que le rapport des intensités maximales des deux pics principaux pourra l'être un peu. On est alors dans un cas rare où une diminution du facteur de cohérence spatiale sur ( $O$ ) ne diminue quasiment pas le contraste des franges formées par diffraction sur l'image, et ne les élargit pas ! Donc si NEWTON n'a pas signalé la présence de telles franges dans la structure du trait lumineux qu'il a vu au bord du couteau [4], c'est peut-être à cause de leur brouillage dû à la grande largeur spectrale de la lumière solaire qu'il utilisait.

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Pierre CHAVEL, pour sa relecture minutieuse et ses conseils avisés.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] DETTWILLER L. « Théorie et analyse numérique de quelques processus de diffraction multiple – I : configuration de FRAUNHOFER, avec deux fentes simples centrées ». *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, octobre 2012, vol. 106, n° 947, p. 917-942.
- [2] DETTWILLER L. « Théorie et analyse numérique de quelques processus de diffraction multiple – II : configuration de FRAUNHOFER avec deux fentes simples décentrées, et théorie ondulatoire du champ de contour ». *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, novembre 2012, vol. 106, n° 948, p. 1007-1020.
- [3] YOUNG T. « The Bakerian Lecture. On the Theory of Light and Colours ». *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 1802, **92**, p. 12-48.
- [4] NEWTON I. *Opticks : or, a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light*. 4<sup>th</sup> edition, Londres : Innys, 1730, p. 300-302.
- [5] PELLAT-FINET P. *Optique de Fourier – Théorie métaxiale et fractionnaire*. Paris : Springer, 2009, chap. 8.
- [6] KLEIN M. V. *Optics*. New-York : Wiley, 1970, p. 420-437.  
La démonstration donnée dans cette référence est limitée au cas d'un système constitué d'une lentille mince, mais on peut l'étendre assez naturellement à l'imagerie par tout système centré, dans les approximations de FRESNEL.
- [7] BRUHAT G. *Cours de physique générale – Optique*. Paris : Masson, 1992, chap. 14.



Luc DETTWILLER  
 Professeur en PC\*  
 Lycée Blaise Pascal  
 Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme)