



HAL
open science

**THÉORIE ET ANALYSE NUMÉRIQUE DE
QUELQUES PROCESSUS DE DIFFRACTION
MULTIPLE I - Configuration de FRAUNHOFER, avec
deux fentes simples centrées**

Luc Dettwiller

► **To cite this version:**

Luc Dettwiller. THÉORIE ET ANALYSE NUMÉRIQUE DE QUELQUES PROCESSUS DE DIFFRACTION MULTIPLE I - Configuration de FRAUNHOFER, avec deux fentes simples centrées. Master / M2. 2012. sfo-00758564

HAL Id: sfo-00758564

<https://hal-sfo.ccsd.cnrs.fr/sfo-00758564>

Submitted on 28 Nov 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Théorie et analyse numérique de quelques processus de diffraction multiple

par **Luc DETTWILLER**

Lycée Blaise Pascal - 63037 Clermont-Ferrand Cedex

luc.dettwiller@ac-clermont.fr

I - Configuration de FRAUNHOFER, avec deux fentes simples centrées

RÉSUMÉ

On définit ce qu'on appelle le processus de diffraction multiple. On propose d'abord une façon synthétique d'exprimer l'intensité de la lumière diffractée dans la configuration dite de Fraunhofer, pour laquelle on donne cinq théorèmes. Puis on illustre nos formules théoriques par des analyses numériques menées dans le cas simple d'une source ponctuelle et de deux fentes successives centrées, de différentes largeurs, plus ou moins distantes. De beaux effets d'apodisation apparaissent, ainsi que des formes originales de figures de diffraction !

INTRODUCTION

Dans l'étude de la diffusion, on distingue la diffusion simple et la diffusion multiple. La première n'est en fait qu'une approximation – celle de BORN – valide lorsque l'efficacité de diffusion est assez faible. Les phénomènes de diffraction et de diffusion étant apparentés, la même distinction pourra être établie pour la diffraction par des obstacles tridimensionnels. Et même dans les montages classiques de diffraction, où les obstacles sont usuellement considérés comme plans, on peut rencontrer aussi des problèmes de diffraction multiple.

Considérons par exemple une expérience usuelle de diffraction de FRAUNHOFER (ou à l'infini) par une fente : on met souvent un objectif après la fente pour former le plan de FOURIER (ou l'image de l'infini) sur l'écran d'observation, ce qui rajoute une diffraction par le diaphragme d'ouverture de l'objectif – dont l'influence est négligée dans l'étude standard, où l'on impose que ce dernier soit assez grand pour laisser passer quasiment toute la lumière diffractée par la fente. D'où le but de ce premier article : pour une lumière de largeur spectrale négligeable, étudier l'influence de cette seconde diffraction, *i.e.* traiter un problème de diffraction multiple – et de FRAUNHOFER dans l'exemple ci-

dessus, car l'écran d'observation est dans un plan de front passant par le point de convergence géométrique de la lumière issue du montage.

D'autres expériences intéressantes relèvent aussi de processus de diffraction multiple ; elles constituent autant de motivations pour compléter notre étude, et certaines feront l'objet d'articles ultérieurs. Nous en donnons dès maintenant deux exemples, qui relèvent d'une configuration différente de celle de FRAUNHOFER.

- ◆ En 1802, YOUNG se demandait d'où vient la lumière diffractée par une fente unique. Alors il observa cette fente diffractante en mettant son œil sur une des franges de diffraction claires, dont la lumière était judicieusement isolée, et vit deux petites zones lumineuses, une sur chaque bord de la fente. Quelle est la théorie de la formation de ces deux zones lumineuses dans l'image rétinienne de la fente ?
- ◆ Un coronographe est un instrument où le processus de diffraction multiple est mis à profit pour supprimer une des sources de lumière parasite d'ordre 1. Comment quantifier cela par la théorie de formation des images ?

Pour mémoire seulement, mentionnons la célèbre expérience d'ABBE (1873), aussi appelée à juste titre « expérience de double diffraction » [1] : elle utilise clairement un processus de diffraction multiple, en dehors de la configuration de FRAUNHOFER ; cependant l'analyse de cette expérience est simple et bien connue, donc nous n'y reviendrons pas. Alors quand dans un autre article nous traiterons de l'observation d'YOUNG mentionnée ci-dessus, nous éviterons de nous placer dans la situation d'une classique expérience d'ABBE.

L'analyse de ces problèmes distincts a donc un point commun : deux diffractions successives interviennent. Comment traiter cela ? Une mise en équation brutale conduit vite à des combinaisons d'intégrales compliquées et peu parlantes. Mais pour aborder les questions qui nous motivent, des démarches plus rusées sont possibles avec les approximations usuelles (voir § 1.). Celles-ci font intervenir des développements à l'ordre deux pour divers facteurs de phase (et non pas à l'ordre un comme pour l'expression paraxiale des positions des rayons), conformément aux approximations de FRESNEL⁽¹⁾.

Au niveau mathématique, une façon astucieuse de traiter ces problèmes de diffraction dans l'optique de GAUSS consiste à se ramener judicieusement à une convolution. Dans cet article, nous détaillerons les conséquences de cette opération pour notre problème particulier, tout en veillant à en dégager l'interprétation physique. Nous souhaitons développer ainsi une certaine forme d'intuition sur les effets produits, ce qui devrait permettre d'en deviner d'autres. Mais nous verrons aussi apparaître quelques propriétés mathématiques surprenantes concernant le produit de convolution : elles nous rappelleront que l'approche intuitive comporte des pièges, rendant risquée la prévision de certaines propriétés.

(1) Dans le but de signaler ces termes de phase quadratiques (qui étaient souvent passés sous silence avant les années 1980) et leurs conséquences, d'aucuns ont assez récemment pris l'habitude de dire que leur écriture relève d'une approximation et d'une théorie métaxiales plutôt que paraxiales. Une excellente synthèse sur le rôle de ces termes de phase est présentée dans [2], p. 41-105.

Les intégrales qui permettent théoriquement de traiter ces questions ont rarement une expression analytique (d'où le fait qu'on ne les évoque guère dans les livres d'enseignement) : on doit se contenter de réponses numériques. Les estimations d'intégrales dont nous avons eu besoin ont été faites par *Maple*TM. Bien sûr, cet outil est avant tout un logiciel de calcul formel, mais les étudiants de CPGE (Classes préparatoires aux grandes écoles) doivent l'utiliser, donc il peut être intéressant de leur montrer aussi comment optimiser avec lui une étude numérique si elle n'est pas trop compliquée. Pour cela, nous nous limiterons à des cas simples idéalisés : la source ponctuelle sera sur l'axe, et les obstacles diffractants considérés ne seront que des combinaisons de fentes parallèles centrées, de longueur « infinie » (perpendiculairement aux plans de nos schémas) pour qu'il n'y ait pas de diffraction notable dans le sens de cette longueur. Dans ce cadre volontairement restreint, une grande richesse phénoménologique apparaîtra malgré tout.

Nous verrons d'abord comment mettre en équations, de la façon qui nous semble la plus simple, le calcul de l'intensité de la figure de diffraction multiple dans la configuration de FRAUNHOFER. À notre connaissance, une seule publication [3] traite d'un problème similaire, mais dans un cas un peu plus particulier et avec une mise en équations ne débouchant que sur des études numériques. Dans notre article, la technique mathématique alternative que nous utilisons nous permettra de déduire cinq théorèmes concernant la distribution d'intensité. Enfin, nous serons armés pour discuter physiquement les graphes de l'intensité en fonction de différents paramètres : la largeur relative des fentes et leur écartement. Un tel aller-retour entre les résultats des simulations numériques et leur interprétation physique permettra de mettre en pratique la remarque d'Enrico FERMI (prix Nobel de physique 1963) : « Bon, d'accord, l'ordinateur a compris, mais moi j'aimerais bien comprendre aussi ! ».

1. THÉORIE DU PROCESSUS DE DIFFRACTION MULTIPLE DE FRAUNHOFER

Pour simplifier toute cette étude, nous supposons que le milieu baignant les obstacles diffractants et le système optique est parfait, donc que l'indice de ce milieu ambiant est uniforme et réel ; pour l'onde monochromatique considérée, de pulsation ω , on désigne par λ sa longueur d'onde dans ce milieu transparent. Nous ne considérons que des obstacles à une dimension transversale ; mais il ne serait pas difficile de généraliser l'exposé de ce premier paragraphe au cas des obstacles à deux dimensions transversales, en remplaçant les intégrales simples par des intégrales doubles.

Nous adoptons la convention $e^{-i\omega t}$ dans la représentation complexe. Pour une fonction f d'une seule variable nous notons \tilde{f} sa transformée de Fourier définie par

$$\tilde{f}(v) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi v x} dx .$$

1.1. Mise en équations de la diffraction multiple à l'infini

Soit un premier obstacle diffractant, de coefficient de transmission $\tau_1(x)$, situé dans le plan d'équation $z=0$ (le point O_1 étant pris arbitrairement comme origine de l'abscisse x et de la cote z – cf. figure 1, page ci-contre). On l'éclaire par une onde incidente plane monochromatique homogène, dont l'angle de son vecteur d'onde (supposé parallèle au plan O_1xz) par rapport au vecteur unitaire \mathbf{u}_z (directeur de l'axe O_1z normal à l'obstacle) est l'« inclinaison » θ_0 ; cette onde provient d'une source ponctuelle S à l'infini, et son amplitude complexe sur l'obstacle (*i.e.* pour $z=0_-$) s'écrit :

$$A(x, 0_-) = A_0 e^{ikx \sin \theta_0}$$

où $k := 2\pi/\lambda$.

On considère l'amplitude complexe $A(x, 0_+)$ juste après ce premier obstacle, dans l'approximation du champ donné : elle s'écrit $A_0 e^{ikx \sin \theta_0} \tau_1(x)$, et on la décompose en intégrale de FOURIER :

$$A(x, 0_+) = A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tau}_1\left(\nu - \frac{\sin \theta_0}{\lambda}\right) e^{i2\pi\nu x} d\nu \tag{1}$$

Dorénavant, on adopte l'approximation des petits angles d'incidence et de diffraction : non seulement on suppose $|\theta_0| \ll 1$ (en radians) de sorte que $\sin \theta_0 \cong \theta_0$, mais encore on considère que $\tilde{\tau}_1\left(\nu - \frac{\theta_0}{\lambda}\right)$ est négligeable lorsque $|\nu|$ n'est pas très petit devant $1/\lambda$, donc *a fortiori* on néglige les ondes évanescentes associées à la décomposition (1) – *i.e.* celles telles que $|\nu| > 1/\lambda$. On pose alors $\nu := \frac{\sin \theta}{\lambda} \cong \frac{\theta}{\lambda}$, où θ s'interprète comme l'angle orienté (de même que θ_0) dans le plan O_1xz , entre \mathbf{u}_z et le vecteur d'onde de chaque onde plane monochromatique homogène progressive présente dans la décomposition (1) ; cela permet d'écrire

$$A(x, 0_+) \cong \frac{A_0}{\lambda} \int_{(\delta\theta)} \tilde{\tau}_1\left(\frac{\theta - \theta_0}{\lambda}\right) e^{ik\theta x} d\theta$$

où $(\delta\theta)$ est un petit voisinage de zéro, de mesure $\delta\theta$, constituant le domaine où $\tilde{\tau}_1\left(\frac{\theta - \theta_0}{\lambda}\right)$ n'est pas négligeable.

Après le premier obstacle diffractant, il y en a un second – cf. figure 1, page ci-contre – de coefficient de transmission $\tau_2(x)$, situé dans le plan d'équation $z=d$ et contenant le point $O_2 \Big|_d^0$. L'amplitude complexe de l'onde incidente sur le second obstacle

s'écrit
$$A(x, d_{\perp}) \cong \frac{A_0}{\lambda} \int_{(\delta\theta)} \tilde{\tau}_1 \left(\frac{\theta - \theta_0}{\lambda} \right) e^{ik(x \sin \theta + d \cos \theta)} d\theta$$

mais comme $\sin \theta \cong \theta$ et $\cos \theta \cong 1 - \frac{\theta^2}{2}$, dans les approximations de FRESNEL, on peut simplifier :

$$A(x, d_{\perp}) \cong \frac{A_0}{\lambda} e^{ikd} \int_{(\delta\theta)} \tilde{\tau}_1 \left(\frac{\theta - \theta_0}{\lambda} \right) e^{ik[\theta x - (\theta^2/2)d]} d\theta.$$

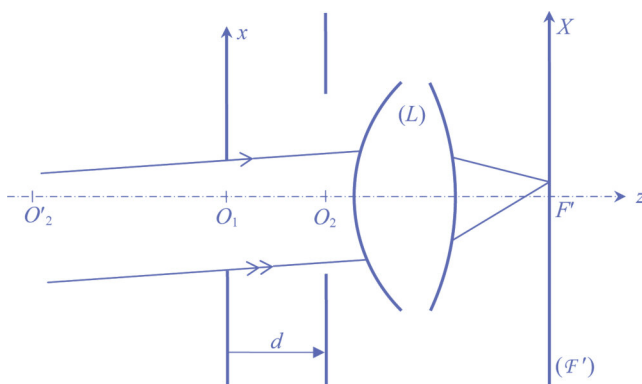


Figure 1 : Montage de diffraction multiple à l'infini, par deux obstacles (les trajets des rayons lumineux représentés, avec des flèches fines, suivent les lois de l'optique géométrique pour simplifier le schéma).

Cette expression joue un rôle important dans l'étude de la diffraction par la méthode du filtrage angulaire [4] d'ondes planes (que nous venons d'utiliser) ; on peut montrer [5-8] qu'elle équivaut à l'expression standard de l'amplitude diffractée par l'intégrale de RAYLEIGH-SOMMERFELD, avec les approximations de FRESNEL qui négligent le facteur d'inclinaison et assimilent à des paraboloides les surfaces d'onde sphériques des ondelettes.

Pour obtenir sur un écran la diffraction à l'infini, on place après le second obstacle un objectif de projection \$(L)\$ de focale \$f' = -f\$ finie⁽²⁾, de plan focal image \$(\mathcal{F}')\$ parallèle aux plans des obstacles diffractants (cf. figure 1) ; comme l'origine \$O_1\$ est un point arbitraire du plan du premier obstacle, nous pouvons désormais le choisir sur l'axe opti-

(2) Par cet adjectif, nous voulons seulement rappeler ici qu'on ne peut utiliser un système afocal dans ce montage, puisqu'on veut former à distance finie l'image d'un objet à l'infini. Il serait possible de rendre encore un peu plus systématique cette étude, en considérant que les indices \$n\$ et \$n'\$ des milieux transparents d'entrée et de sortie de \$(L)\$ sont *a priori* différents, et on pourrait alors montrer certaines propriétés de symétrie entre différentes formules. Mais dans un souci de simplification, conformément aux expériences usuelles nous supposons que \$n' = n\$, et donc que la distance focale objet \$f\$ de \$(L)\$ est l'opposée de sa distance focale image \$f'\$.

que de (L) , et alors O_2 est aussi sur cet axe. Donc en O_2 l'amplitude complexe de chaque onde plane monochromatique homogène progressive présente dans la décomposition ci-dessus est proportionnelle à $\tilde{\tau}_1\left(\frac{\theta - \theta_0}{\lambda}\right) e^{-ik\theta^2 d/2}$. Puis, O'_2 étant l'image de O_2 formée par (L) dans les conditions de GAUSS, les propriétés classiques de la diffraction à l'infini par le second obstacle montrent que ([2], p. 44-50) l'onde plane associée à θ créée sur l'axe $F'X$ (cf. figure 1, page précédente) une distribution d'amplitude complexe proportionnelle à

$$\frac{A_0}{\lambda} e^{ikd} \times \tilde{\tau}_1\left(\frac{\theta - \theta_0}{\lambda}\right) e^{-ik\theta^2 d/2} \times \tilde{\tau}_2\left(\frac{X - f'\theta}{\lambda f'}\right) \exp\left(ik \frac{X^2}{2 O'_2 F'}\right)$$

où F et F' sont les foyers principaux objet et image de (L) , et X l'abscisse d'origine F' .

Il apparaît une phase quadratique dans le terme $\exp\left(ik \frac{X^2}{2 O'_2 F'}\right)$, appelé « facteur de phase sphérique » (qui très vite ne jouera plus aucun rôle dans notre étude) ; il provient de la variation avec X du chemin optique entre O_2 et le point d'abscisse X sur l'axe $F'X$ – voir notamment les relations (3.10), (3.11) et (3.21) de [2]. En posant $\mathcal{A}_0 := C A_0 e^{ikd} / \lambda$ (où C est une constante de proportionnalité), on obtient une expression simple de l'amplitude complexe résultante sur l'axe $F'X$, sous la forme d'une intégrale de convolution⁽³⁾ multipliant le facteur de phase sphérique :

$$A_2(X) \cong \mathcal{A}_0 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tau}_1\left(\frac{\theta - \theta_0}{\lambda}\right) e^{-ik\theta^2 d/2} \tilde{\tau}_2\left(\frac{X - f'\theta}{\lambda f'}\right) d\theta \right] \exp\left(ik \frac{X^2}{2 O'_2 F'}\right) \quad (2)$$

Comme l'onde incidente est plane, et que l'amplitude calculée ci-dessus est observée dans (\mathcal{F}') , on dira que c'est celle due au processus de « diffraction multiple à l'infini ».

L'intensité (vibratoire) sur l'axe $F'X$ est $I_2(X) = K |A_2(X)|^2$ où K est une constante réelle positive, donc en posant $I_0 := K |\mathcal{A}_0|^2$ il vient

$$I_2(X) \cong I_0 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tau}_1\left(\frac{\theta - \theta_0}{\lambda}\right) e^{-ik\theta^2 d/2} \tilde{\tau}_2\left(\frac{X - f'\theta}{\lambda f'}\right) d\theta \right|^2 \quad (3)$$

Le facteur de phase sphérique, ayant pu être sorti de l'intégrale puisqu'il est indépendant de θ , n'influe pas sur l'intensité dans (\mathcal{F}') ; c'est pourquoi son omission est bénigne en ce qui concerne l'étude de l'intensité.

(3) En fait l'intégrale dans (2) devait être sur l'intervalle $(\delta\theta)$; mais, puisque $\tilde{\tau}_1\left(\frac{\theta - \theta_0}{\lambda}\right)$ est négligeable en dehors de $(\delta\theta)$, l'extension de l'intégrale à \mathbf{R} donne quasiment le même résultat et permettra de profiter des propriétés de la convolution.

Remarques importantes

- ◆ Les fonctions τ_1 , τ_2 et les paramètres λ , f' étant fixés, dans le cas classique où $d = 0$ la grandeur complexe $\frac{A_2(X)}{\lambda \mathcal{A}_0} \exp\left(-ik \frac{X^2}{2 O_2 F'}\right)$ ne varie évidemment qu'avec $X - f'\theta_0$, puisque c'est le produit de convolution de $\tilde{\tau}_1$ et $\tilde{\tau}_2$ (donc plus directement encore la transformée de FOURIER de $\tau_1 \tau_2$) en $\frac{X - f'\theta_0}{\lambda f'}$; dans cette situation (qui se ramène à celle de la diffraction de FRAUNHOFER par un obstacle unique de coefficient de transmission $\tau_1 \tau_2$), le processus de formation des images (en éclairage cohérent ici) peut être appréhendé comme un filtrage linéaire invariant par translation – dans le champ de pleine lumière ([9], p. 87) de l'objectif bien sûr, *i.e.* tant que les diaphragmes de (L), omis dans notre étude et non représentés sur la figure 1, n'interviennent pas notablement. Comme la diffraction multiple sort du cadre de l'approximation de BORN, la propriété d'invariance par translation devient fautive pour $d \neq 0$; un des intérêts de notre étude est donc permettre de fonder une théorie *ondulatoire* du champ de contour [9] d'un instrument, que nous aborderons dans le deuxième article de cette série.
- ◆ Dans le cas classique où $d = 0$ (*i.e.* celui de la diffraction de FRAUNHOFER par un obstacle unique de coefficient de transmission $\tau_1 \tau_2$), si l'argument de $\tau_1(x) \tau_2(x)$ est uniforme modulo 2π , l'intensité de la figure de diffraction est maximale au point de convergence prévu par l'optique géométrique⁽⁴⁾ (comme le carré du module de la transformée de FOURIER de $\tau_1 \tau_2$ en 0) – donc en $X = f'\theta_0$ dans le cas de la diffraction à l'infini. Mais dans le cas de la diffraction multiple, à cause du terme $e^{-ik\theta^2 d/2}$ dans (3), $I_2(X)$ n'est *a priori* pas maximal en $X = f'\theta_0$. Cette constatation accroît l'intérêt d'une étude ondulatoire du champ de contour.

1.2. Propriétés

1.2.1. Effet d'une translation de l'ensemble des obstacles

Considérons un autre couple d'obstacles, tradlatés de \mathbf{r}_0 par rapport à l'ancien couple – donc caractérisés par les nouveaux coefficients de transmission $\tau'_1(x) := \tau_1(x - x_0)$ et $\tau'_2(x) := \tau_2(x - x_0)$ où x_0 est la première composante de \mathbf{r}_0 sur la base orthonormée

(4) On peut énoncer cette propriété plus généralement dans l'approximation où tous les points de l'obstacle diffractant et uniformément déphasant sont éclairés par une onde plane incidente (pour un obstacle tridimensionnel c'est l'approximation de BORN, *i.e.* l'approximation de la diffraction simple). Dans notre étude l'obstacle formé de deux plans consécutifs peut être considéré comme tridimensionnel, mais nous ne nous plaçons pas dans l'approximation de la diffraction simple : nous ne supposons pas que le second plan est éclairé par une onde plane.

$(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$ associée au repère O_1xyz ; alors, compte tenu de la relation bien connue entre les transformées de FOURIER des fonctions τ_1 (resp. τ_2) et τ'_1 (resp. τ'_2), l'amplitude complexe sur l'axe $F'X$ devient

$$\begin{aligned}
 A'_2(X) &\cong \mathcal{A}_0 \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tau}_1 \left(\frac{\theta - \theta_0}{\lambda} \right) e^{-ik\theta^2 d/2} \tilde{\tau}_2 \left(\frac{X - f'\theta}{\lambda f'} \right) \right. \\
 &\quad \left. \exp - \left[i2\pi \left(\frac{\theta - \theta_0}{\lambda} + \frac{X - f'\theta}{\lambda f'} \right) x_0 \right] d\theta \right\} \\
 &\quad \times \exp \left(ik \frac{X^2}{2 O'_2 F'} \right) \\
 &= A_2(X) \exp - \left(ik \frac{X - f'\theta_0}{f'} x_0 \right)
 \end{aligned}$$

Donc **la distribution d'intensité de la figure de diffraction est inchangée par cette translation de l'ensemble des obstacles ; mais l'amplitude complexe est modulée en phase** – ce qui se verrait expérimentalement si elle intervenait dans une expérience d'interférences (ou donc d'holographie).

1.2.2. Loi de similitude

Considérons un nouveau couple d'obstacles, de dimensions *transversales* contractées d'un facteur $\kappa > 0$ par rapport à celles du premier couple – donc ces nouveaux obstacles sont caractérisés par les nouveaux coefficients de transmission $\tau''_1(x) := \tau_1(\kappa x)$ et $\tau''_2(x) := \tau_2(\kappa x)$. Changeons aussi l'inclinaison de l'onde incidente en $\theta''_0 := \kappa\theta_0$, ainsi que l'écart *longitudinal* entre les obstacles en $d'' := d/\kappa^2$; alors, compte tenu de la relation bien connue entre les transformées de FOURIER des fonctions τ_1 (resp. τ_2) et τ''_1 (resp. τ''_2), la nouvelle intensité sur l'axe $F'X$ s'écrit

$$I''_2(X) \cong I_0 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\kappa} \tilde{\tau}_1 \left(\frac{\theta - \theta''_0}{\kappa\lambda} \right) e^{-ik\theta^2 d''/2} \frac{1}{\kappa} \tilde{\tau}_2 \left(\frac{X - f'\theta}{\kappa\lambda f'} \right) d\theta \right|^2$$

et le changement de variable $\theta'' := \theta/\kappa$ montre que

$$I''_2(X) \cong I_0 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\kappa} \tilde{\tau}_1 \left(\frac{\theta'' - \theta''_0}{\lambda} \right) e^{-ik\theta''^2 d/2} \frac{1}{\kappa} \tilde{\tau}_2 \left(\frac{(X/\kappa) - f'\theta''}{\lambda f'} \right) \kappa d\theta'' \right|^2 = \frac{1}{\kappa^2} I_2 \left(\frac{X}{\kappa} \right).$$

Alors **la nouvelle figure de diffraction est l'homothétique de la première figure, d'un facteur κ et par rapport à O** , mais le flux *total* dans la figure de diffraction est divisé par κ .

Notons que si le dispositif décrit par les fonctions τ_1 et τ_2 est formé avec des obstacles ayant un décentrage relatif Δ (comme dans l'article suivant de cette série), alors pour le nouveau dispositif décrit par les fonctions τ_1'' et τ_2'' le décentrage relatif des nouveaux obstacles est $\Delta'' = \Delta/k$.

1.2.3. Lien entre changement d'incidence et translations transversales différentielles

Considérons ici que, par rapport au premier montage, le second obstacle a été translaté de x_0 dans le sens de \mathbf{u}_x , et le premier de $x_0 + \Delta$ dans le même sens ; donc l'espacement d entre leurs plans est inchangé, et les obstacles actuels sont caractérisés par les coefficients de transmission $\tau'_{1,\Delta}(x) := \tau_1(x - x_0 - \Delta)$ et $\tau'_2(x) := \tau_2(x - x_0)$. Utilisons la même technique qu'au sous-paragraphe 1.2.1. pour commencer le calcul de la nouvelle amplitude complexe $A_2''(X)$ sur $F'X$:

$$\begin{aligned}
 A_2''(X) &\cong \mathcal{A}_0 \exp\left(ik \frac{X^2}{2O_2'F'}\right) \\
 &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tau}'_1\left(\frac{\theta - \theta_0}{\lambda}\right) e^{-ik\theta^2 d/2} \tilde{\tau}'_2\left(\frac{X - f'\theta}{\lambda f'}\right) \\
 &\exp\left[-i2\pi \left[\frac{\theta - \theta_0}{\lambda}(x_0 + \Delta) + \frac{X - f'\theta}{\lambda f'}x_0\right]\right] d\theta
 \end{aligned}$$

Quelques manipulations algébriques donnent, moyennant le changement de variable $\theta' := \theta + (\Delta/d)$:

$$\begin{aligned}
 A_2''(X) &\cong \mathcal{A}_0 \exp\left\{ik \left[\frac{X^2}{2O_2'F'} + \left(\theta_0 - \frac{X}{f'}\right)x_0 + \left(\theta_0 + \frac{\Delta}{2d}\right)\Delta\right]\right\} \\
 &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tau}'_1\left[\frac{1}{\lambda}\left(\theta' - \theta_0 - \frac{\Delta}{d}\right)\right] e^{-ik\theta'^2 d/2} \tilde{\tau}'_2\left[\frac{1}{\lambda f'}\left(X + f'\frac{\Delta}{d} - f'\theta'\right)\right] d\theta'
 \end{aligned}$$

En comparant avec l'expression (2), on trouve le théorème suivant : ***dans ce dernier montage, la distribution d'intensité est identique à celle qu'on obtiendrait en translation de $f'\Delta/d$, en sens contraire de \mathbf{u}_x , la distribution d'intensité donnée par le premier montage où l'inclinaison de l'onde incidente serait augmentée de l'angle Δ/d (en radians).***

1.2.4. Effet d'une modulation du premier obstacle

Considérons maintenant que, par rapport au premier montage, le premier obstacle est modulé avec une fréquence spatiale ν \mathbf{u}_x , i.e. que $\tau_1(x)$ est changé en $\tau_1(x) e^{i2\pi\nu x}$.

Alors, compte tenu de la propriété bien connue des transformées de FOURIER des fonctions modulées, l'intensité $I_2(X)$ sur l'axe $F'X$ devient

$$\begin{aligned} & I_0 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tau}_1 \left(\frac{\theta - \theta_0}{\lambda} - \nu \right) e^{-ik\theta^2 d/2} \tilde{\tau}_2 \left(\frac{X - f'\theta}{\lambda f'} \right) d\theta \right|^2 \\ &= I_0 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tau}_1 \left(\frac{\theta - (\theta_0 + \lambda\nu)}{\lambda} \right) e^{-ik\theta^2 d/2} \tilde{\tau}_2 \left(\frac{X - f'\theta}{\lambda f'} \right) d\theta \right|^2 \end{aligned}$$

En ce qui concerne l'intensité sur l'axe $F'X$, l'effet de la modulation du premier obstacle avec une fréquence spatiale ν u_x est le même que celui d'une variation de θ_0 égale à $\lambda\nu$; à cause du terme $e^{-ik\theta^2 d/2}$ l'effet n'est pas le même pour une modulation du second obstacle, et avec chacune de ces modulations la nouvelle intensité n'est pas $I_2(X - f'\lambda\nu)$ car il n'y a plus invariance par translation *a priori* – à moins que d soit nul.

1.2.5. Permutation des deux obstacles

Considérons enfin que les deux obstacles sont permutés par rapport au premier montage ; alors en $X = -f'\theta_0$ (*i.e.* au point symétrique, par rapport à l'axe $F'z$, du point de convergence prévu par l'optique géométrique) les amplitudes complexes sont les mêmes pour les deux montages. En effet, d'après (3) l'amplitude donnée en $X = -f'\theta_0$ sur l'axe $F'X$ par ce dernier montage est

$$A_2^p(-f'\theta_0) \cong \mathcal{A}_0 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tau}_2 \left(\frac{\theta - \theta_0}{\lambda} \right) e^{-ik\theta^2 d/2} \tilde{\tau}_1 \left(\frac{-\theta_0 - \theta}{\lambda} \right) d\theta \right] \exp \left(ik \frac{f'^2 \theta_0^2}{2 O_2 F'} \right)$$

et le changement de variable $\theta^p := -\theta$ donne

$$\begin{aligned} A_2^p(-f'\theta_0) &\cong \mathcal{A}_0 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tau}_1 \left(\frac{\theta^p - \theta_0}{\lambda} \right) e^{-ik(\theta^p)^2 d/2} \tilde{\tau}_2 \left(\frac{-\theta_0 - \theta^p}{\lambda} \right) d\theta^p \right] \exp \left(ik \frac{f'^2 \theta_0^2}{2 O_2 F'} \right) \\ &\cong A_2(-f'\theta_0) \end{aligned}$$

Cette propriété ne s'étend pas *a priori* à d'autres valeurs de X , sauf si $d = 0$ (auquel cas elle est valable pour tout X).

1.3. Diffraction multiple de FRAUNHOFER à distance finie

On considère maintenant la configuration schématisée par la figure 2 (*cf.* page ci-contre), qui est celle d'un processus de « diffraction multiple de FRAUNHOFER (à distance D finie) » ; celle de la figure 1 correspondait à D infini.

La configuration actuelle présente, par rapport à la précédente, l'avantage pratique de simplifier le montage expérimental puisqu'il n'y a plus à former un faisceau incident

collimaté : maintenant la source monochromatique et ponctuelle S se situe dans le plan de front (Σ), à distance finie D du plan du premier obstacle. On prouve en annexe que dans les approximations de FRESNEL, les figures de diffraction obtenues sur l'écran (E) sont similaires à celles obtenues sur (\mathcal{F}') pour la configuration de la figure 1 et ont des propriétés analogues – à condition que (E) soit dans le plan de front contenant l'image S' de S par (L). Mais bien sûr (E) est différent de (\mathcal{F}') puisque D est fini.

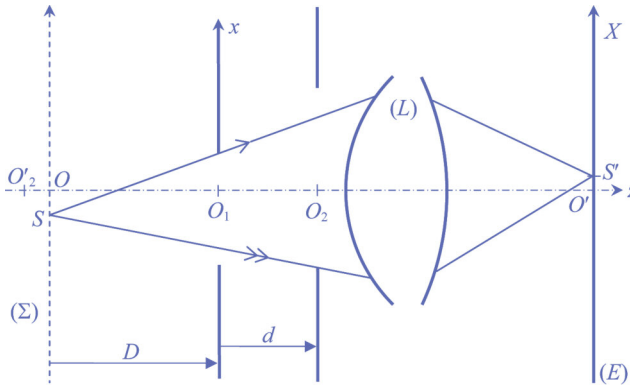


Figure 2 : Montage de diffraction multiple de FRAUNHOFER à distance finie, par deux obstacles (avec la même convention de dessin que pour la figure 1).

L'intérêt théorique des démonstrations présentées en annexe est multiple : d'abord, montrer une autre technique de raisonnement qui utilise la décomposition en ondes sphériques de l'onde diffractée par le premier obstacle, plutôt que sa décomposition en ondes planes ; ensuite, prouver qu'on retrouve, malgré la complexité du processus de diffraction multiple, des propriétés similaires à celles de la diffraction à l'infini (les cinq théorèmes du paragraphe 1.2.) ; enfin, voir que dans les lois de similitude un degré de liberté supplémentaire est offert par le fait que D n'est plus imposé infini.

2. IMAGE D'UNE SOURCE PONCTUELLE DERRIÈRE DEUX FENTES SIMPLAS PARALLÈLES SUCCESSIVES CENTRÉES

Dorénavant, nous nous limitons au cas simple où les obstacles diffractants sont formés de fentes parallèles infiniment longues ; alors les fonctions τ_1 et τ_2 pourront être écrites facilement à l'aide de la fonction rect, définie par

$$\text{rect } x := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1/2, +1/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et dont la transformée de FOURIER est la fonction sinc, définie par

$$\text{sinc } x := \begin{cases} (\sin \pi x) / (\pi x) & \text{si } x \in \mathbf{R}^* \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Pour tous les calculs numériques et les graphes nous avons pris $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ et $f' = 20 \text{ cm}$; nous considérons que nous sommes dans la configuration de la diffraction à l'infini – où on peut appliquer les formules des paragraphes 1.1. et 1.2., qui sont plus simples que celles de l'annexe.

Avec le logiciel *Maple*TM nous obtenons une évaluation numérique de la convolution présente dans la formule fondamentale (3), pour différents couples de fentes dans diverses positions relatives. Nous présentons ici, et dans l'article suivant⁽⁵⁾, une sélection de résultats choisis de façon à montrer la plupart des effets notables qui se produisent, et nous les commentons. Quelques-uns pourraient sembler surprenants, si on n'avait pas présentes à l'esprit certaines propriétés déroutantes de la convolution :

- la convolution de deux fonctions non nulles peut donner la fonction nulle ;
- la convolution d'une fonction par une autre non triviale peut dans certains cas redonner la première fonction – donc « ne rien y changer ! ».

2.1. Seconde fente plus large que la première

Ici $\tau_1(x) = \text{rect}(x/a_1)$, $\tau_2(x) = \text{rect}(x/a_2)$; nous prenons $a_1 = 0,10 \text{ mm}$ et $a_2 = 0,20 \text{ mm}$ (largeurs des deux fentes) ainsi que $\theta_0 = 0$.

Si la première fente diffractante était seule, le graphe, en fonction de X , de l'intensité dans la tache image de S avec la première fente, aurait la forme très classique montrée par la figure 3 ; ici, la normalisation de l'ordonnée du maximum à 1 quel que soit a_1 vient de ce qu'on adopte pour toute la suite de cet article une unité d'intensité proportionnelle à a_1^2 .

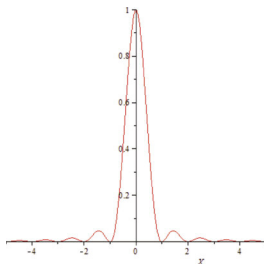


Figure 3 : Graphe, en fonction de X exprimé en millimètres, de l'intensité diffractée sur $F'X$ par la première fente seule (de largeur $a_1 = 0,10 \text{ mm}$) – semblable au graphe de la fonction sinc^2 .

Quant à la réponse percussionnelle en amplitude sur $F'X$ due à la seconde fente,

(5) **Note de la rédaction :** Le deuxième article de cette série de Luc DETTWILLER paraîtra dans un prochain numéro du *Bup*.

c'est (à une constante multiplicative près) la fonction $\tilde{\tau}_2\left(\frac{X}{\lambda f'}\right)$ dont le graphe est montré sur la figure 4. Par propriété de la transformée de FOURIER inverse, l'aire algébrique sous la courbe est $\lambda f' \tau_2(0) = \lambda f'$; ce résultat simple nous a servi de test de qualité des méthodes d'estimation numérique des intégrales intervenant dans cet article.

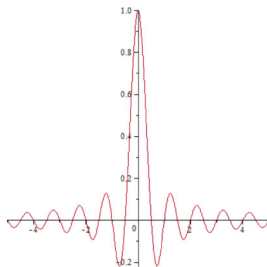
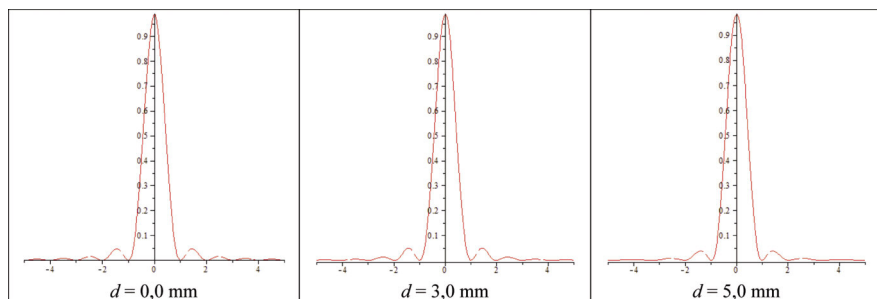


Figure 4 : Graphe de $\tilde{\tau}_2\left(\frac{X}{\lambda f'}\right)$ avec des unités arbitraires en ordonnée, lorsque $a_2 = 0,20$ mm
 – semblable au graphe de la fonction sinc (cf. figure 7a).

N.B. : Pour tous les graphes, les abscisses sont exprimées en millimètres et représentent la coordonnée des points de l'écran sur l'axe $F'X$, l'origine étant au point de convergence F' de la lumière prévu par l'optique géométrique puisque dorénavant nous nous limiterons au cas où $\theta_0 = 0$.

Nous regroupons dans le tableau 1 ci-dessous et ci-après les graphes de l'intensité obtenue sur $F'X$ avec nos deux fentes toujours centrées, mais pour diverses valeurs de d .



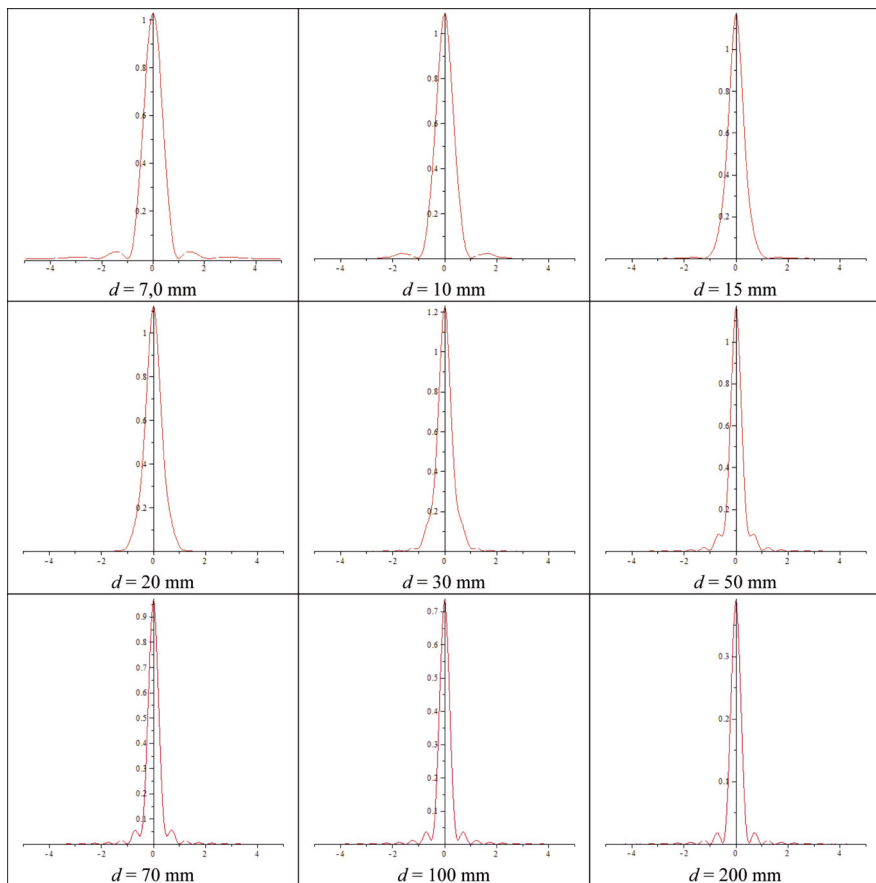


Tableau 1 : Fentes centrées, $\theta_0 = 0$, $a_1 = 0,10 \text{ mm}$ et $a_2 = 0,20 \text{ mm}$.

Commentaires des graphes

- ◆ $d = 0,0 \text{ mm}$: ce graphe de l'intensité, normalisée dans ce cas présent, sert uniquement de test (passé avec succès), car lorsque les deux fentes sont superposées sans décalage, l'image doit être la même que celle formée avec la plus étroite (cf. figure 3). On vérifie une des subtilités de la convolution !
Avec un écart de 2 mm entre les deux fentes, il n'y a pas encore de modification notable.
- ◆ $d = 3,0 \text{ mm}$: il apparaît comme un léger fond de lumière parasite dû à la diffraction par la seconde fente.
- ◆ $d = 5,0 \text{ mm}$: il apparaît un début d'apodisation : de part et d'autre du lobe central, les

deuxième et troisième « pieds » de diffraction sont aplatis et étalés. Cet effet est lié au fait suivant : la seconde fente reçoit une figure de diffraction de FRESNEL de la première (éclairée par un faisceau parallèle), et ici un minimum relatif d'intensité de cette figure de diffraction (qui se calcule classiquement par la spirale de CORNU [10]) se place aux bords de la seconde fente, donc la discontinuité de l'amplitude transmise par celle-ci est atténuée (*cf.* figure 5).

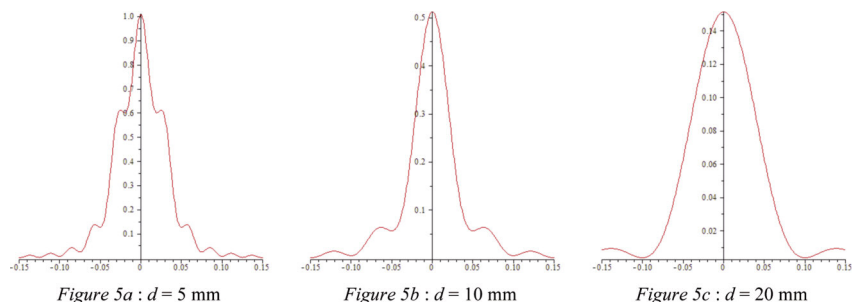


Figure 5 : Graphe de l'intensité, sur la seconde fente (dont les bords ont pour abscisses $\pm 0,10$ mm), de la figure de diffraction de FRESNEL due à la première fente (l'échelle spatiale des variations de l'intensité étant de l'ordre de $\sqrt{\lambda d} < a_1 = 0,1$ mm si et seulement si cette diffraction est nettement distincte de celle de FRAUNHOFER).

- ◆ $d = 7,0$ mm : l'effet amorcé précédemment se poursuit.
- ◆ $d = 10$ mm : l'apodisation s'améliore toujours grâce au même mécanisme que pour $d = 5,0$ mm, mais encore plus efficace (*cf.* figure 5b). L'essentiel de la lumière diffractée par la première fente (jusqu'aux premiers pieds de sa figure de diffraction) passe encore par la seconde fente, puisque $a_1 + \sqrt{\lambda d} \cong 0,17$ mm $< a_2$. Mais ce n'est plus vrai pour la lumière qui aurait formé les pieds de diffraction suivants : elle est quasiment bloquée par la seconde fente. Le fond de lumière parasite disparaît.
- ◆ $d = 15$ mm puis 20 mm : superbe apodisation, avec toutes ses caractéristiques – pieds réduits, largeur augmentée ! La deuxième fente est éclairée par une figure de diffraction de quasi-FRAUNHOFER puisque la longueur de RAYLEIGH associée à la première fente est $a_1^2/\lambda = 20$ mm (peu avant cette distance, et après elle, s'étend le domaine de FRAUNHOFER) comme le confirme la figure 5 ; alors cette figure de diffraction présente pour $d = 20$ mm des quasi-annulations d'intensité qui encadrent sa frange centrale et en plus sont juste aux bords de la seconde fente (*cf.* figure 5c), d'où un effet apodisant très notable – comme en diffraction de FRAUNHOFER avec un obstacle diffractant ayant un coefficient de transmission non discontinu spatialement et en plus à dérivée première continue !
- ◆ $d = 30$ mm à 70 mm : l'apodisation se défait progressivement, car la figure de diffraction s'est élargie sur la seconde fente, et ses bords ne tomberont plus sur des quasi-annulations d'intensité – voir l'évolution des figures 5a, 5b, etc.

- ◆ $d = 100 \text{ mm}$: la seconde fente est éclairée presque uniformément par la lumière diffractée par la première puisque l'écart entre ces fentes est assez grand (la seconde se situe nettement dans le domaine de FRAUNHOFER de la première, donc au niveau de la seconde fente la dimension caractéristique de variation de l'intensité de la figure de diffraction de la première fente est $\lambda d/a_1 = 0,5 \text{ mm} = 2,5 \times a_2$). Le résultat se rapproche de celui que donnerait la seconde fente seule, comme le montre bien la position des pieds de la figure finale du tableau 1.

Notons cependant qu'entre le premier pied et la frange centrale de la figure, il n'y a plus une vraie annulation d'intensité ; ceci est dû à la courbure de la surface d'onde de la lumière incidente sur la seconde fente. Autrement dit, on peut le comprendre comme un défaut de mise au point de l'image de la première fente sur l'écran, puisque ce dernier est dans le plan focal image de l'objectif de projection (L), alors que l'image de la première fente est après ce plan ; une subtilité est que ce défaut de mise au point donne, à cause de la deuxième fente, un résultat indépendant de la distance entre (L) et la première fente !

- ◆ $d = 200 \text{ mm}$: on observe de nouveau des quasi-annulations d'intensité, car la courbure de la surface d'onde incidente sur la seconde fente devient insensible ; la seconde fente est éclairée par une onde quasi plane sur sa largeur. Pour d encore plus grand, il n'y a quasiment plus d'évolution de la forme et de la dimension de la figure. C'est normal : depuis le cas où $d = 200 \text{ mm}$ la seconde fente reste éclairée par une onde quasi plane sur sa largeur.

Hauteur du lobe central

On note qu'à partir de $d = 100 \text{ mm}$, l'intensité au centre de la figure est presque inversement proportionnelle à d (et non pas à son carré) ; et comme on voit que la forme et la dimension de cette figure ne changent quasiment plus au-delà de $d = 100 \text{ mm}$, on conclut que le flux total dans la figure de diffraction obéit à la même loi : physiquement, l'onde divergente arrivant sur la seconde fente y est localement assimilable à une onde cylindrique (et non pas sphérique) dont l'axe serait sur la première fente, donc le flux qui traverse la seconde fente est inversement proportionnel à d .

Le cas de deux fentes de même largeur ne montre rien de bien surprenant par rapport au cas présent ; il présente aussi une belle apodisation. Mais au paragraphe suivant nous allons voir un exemple d'anti-apodisation !

2.2. Seconde fente moins large que la première

Ici encore, $\tau_1(x) = \text{rect}(x/a_1)$, $\tau_2(x) = \text{rect}(x/a_2)$ et $\theta_0 = 0$; mais $a_1 = 0,20 \text{ mm}$ et $a_2 = 0,10 \text{ mm}$. La longueur de RAYLEIGH associée à la première fente est $a_1^2/\lambda = 80 \text{ mm}$, et la séquence des phénomènes observés sera différente (cf. tableau 2, page ci-contre).

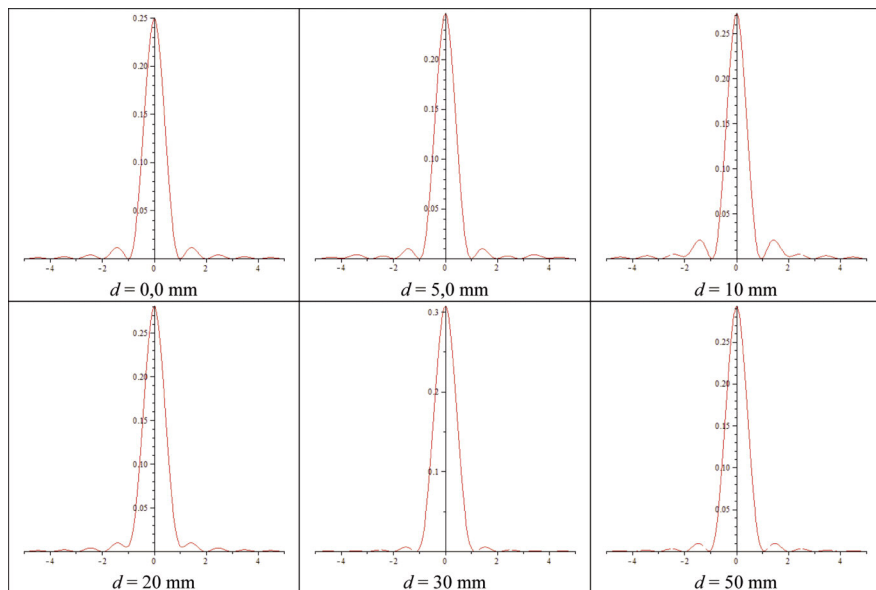


Tableau 2 : Fentes centrées, $\theta_0 = 0$, $a_1 = 0,20$ mm et $a_2 = 0,10$ mm.

Commentaires des graphes

- ◆ $d = 0,0$ mm : comme attendu, ce graphe de l'intensité est semblable à celui de la figure 3, sauf en ce qui concerne l'échelle en ordonnée qui est quatre fois plus petite que dans la figure 3 puisque l'unité d'intensité est proportionnelle à a_1^2 , et que a_1 est maintenant deux fois plus grand.
Avec un écart de 3 mm entre les deux fentes, il n'y a pas encore de modification notable, une onde quasi plane éclairant la seconde fente sur toute sa largeur (qui est inférieure à celle de la première fente).
- ◆ $d = 5,0$ mm : la hauteur des pieds n'évolue plus de façon monotone en fonction de la distance au centre de la figure !
- ◆ $d = 10$ mm : il apparaît un léger effet d'anti-apodisation dû au fait que les lèvres de la seconde fente viennent couper la figure de diffraction de FRESNEL de la première presque en un maximum absolu de son intensité (cf. figure 6a, page ci-après).
- ◆ $d = 30$ mm : on constate un léger effet d'apodisation, par le même mécanisme que celui observé au paragraphe 2.1. avec $d = 10$ mm (cf. figure 6b, page ci-après).
- ◆ $d = 50$ mm : à partir de cette valeur, il n'y a quasiment plus d'évolution de la forme et de la dimension de la figure. C'est normal : dorénavant la seconde fente reste éclairée par une onde quasi plane sur sa largeur.

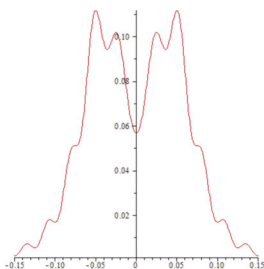
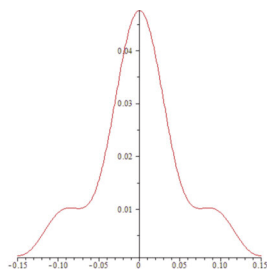
Figure 6a : $d = 10$ mmFigure 6b : $d = 30$ mm

Figure 6 : Graphe de l'intensité, sur la seconde fente (dont les bords ont pour abscisses $\pm 0,05$ mm), de la figure de diffraction de FRESNEL due à la première fente.

Le centrage des fentes et l'hypothèse $\theta_0 = 0$ ont fait que, malgré la remarque finale du paragraphe 1.1., tous les graphes obtenus dans ce paragraphe sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Il n'en sera plus de même dans l'article suivant de cette série.

CONCLUSION

Pour le premier volet de ce travail, nous avons présenté l'étude analytique du processus de diffraction multiple de FRAUNHOFER par deux obstacles, et des simulations numériques dans le cas où la source et les obstacles (ici, de simples fentes) sont centrés. La technique utilisée est standard en optique paraxiale et a donc déjà reçu par ailleurs de multiples confirmations expérimentales indépendantes. Mais bien sûr, il serait bon de comparer nos résultats avec des graphes expérimentaux fournis par un matériel approprié ; cela susciterait des idées originales d'utilisation de la caméra *Caliens* par exemple.

En attendant, retenons que les propriétés analytiques de la diffraction multiple sont plus riches et plus complexes que celles de la diffraction simple, même dans la configuration de FRAUNHOFER – comme le montrent nos cinq théorèmes. Et l'étude numérique nous a réservé aussi quelques belles surprises, comme des cas d'apodisation très remarquables – alors que nous n'avons considéré que la diffraction de FRAUNHOFER par deux fentes !

Dans le deuxième article de cette série, nous allons voir que nous pouvons aussi étudier les propriétés ondulatoires des images dans le champ de contour d'un instrument, où on ne peut plus considérer qu'il est approximativement invariant par translation.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Pierre CHAVEL, pour sa relecture minutieuse et ses conseils avisés ; Nicolas GACHADOIT, pour son aide concernant *Maple*TM.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] MARÉCHAL A. et FRANÇON M. *Diffraction Structure des images – Influence de la cohérence de la lumière*. Paris : Masson, 1970, p. 42-44.
- [2] PELLAT-FINET P. *Optique de Fourier – Théorie métaxiale et fractionnaire*. Paris : Springer, 2009.
- [3] KELLY D. P., SHERIDAN J. P. and RHODES W. T. “Fundamental diffraction limitations in a paraxial 4-f imaging system with coherent and incoherent illumination”. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2007, **24**, p. 1911-1919.
- [4] GOODMAN J. W. *Introduction à l’optique de Fourier et à l’holographie*. Paris : Masson, 1972, p. 45-50.
- [5] DETTWILLER L. Agrégation externe de physique 1998 - Épreuve C (problème de physique) : microscopies à champ proche.
Énoncé : p. 35-50 de *Bull. Un. Phys.*, mars 1999, vol. 93, n° 812 (2).
Corrigé : p. 33-56 de *Bull. Un. Phys.*, mars 1999, vol. 93, n° 812 (3).
 Voir la partie I.C sur la diffraction, p. 41.
 Voir sa solution, p. 43-44.
- [6] BOUSSIÉ A. « La diffraction pour les nuls... et pour les forts ». *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, décembre 2006, vol. 100, n° 889 (2), p. 7-27.
- [7] LUCKE R. L. “Rayleigh-Sommerfeld diffraction and Poisson’s spot”. *Eur. J. Phys.*, 2006, **27**, p. 193-204.
- [8] SMITH G. S. “Comment on ‘Rayleigh-Sommerfeld diffraction and Poisson’s spot’ ”, *Eur. J. Phys.*, 2006, **27**, L 21-23.
- [9] DETTWILLER L. *Les instruments d’optique – Étude théorique, expérimentale et pratique*. 2^e édition, Paris : Ellipses, 2002.
- [10] Voir par exemple BRUHAT G. *Cours de physique générale – Optique*. Paris : Masson, 1992, p. 202-209, et notamment la figure 215.



Luc DETTWILLER
 Professeur en PC*
 Lycée Blaise Pascal
 Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme)

Annexe

Propriétés de la diffraction multiple de FRAUNHOFER à distance finie

MISE EN ÉQUATIONS

Notons x_s l'abscisse, d'origine O sur l'axe optique, du point source S (cf. figure 2) ; on choisit judicieusement S et O_1 de façon que S soit dans le plan O_1xz qui est un plan méridien de (L) . Alors dans l'approximation de FRESNEL (dite aussi « approximation parabolique des ondes sphériques ») l'amplitude complexe de l'onde envoyée par S est, sur l'axe O_1x du premier obstacle :

$$A(x, 0_-) \cong A_0 \exp \frac{ik(x-x_s)^2}{2D}.$$

Bien sûr dans la suite de cette étude il faudrait faire intervenir la coordonnée y sur un axe normal à O_1xz ; mais en considérant initialement $A(x, y, 0_-)$ et en traitant tout de suite les intégrales sur y qui s'ensuivent par la méthode approximative de la phase stationnaire (autorisée par l'hypothèse des petits angles de diffraction) on trouverait que, dans cette étude restreinte aux petits angles, seules les variations des amplitudes dans O_1xz subsistent pour la suite du calcul.

On décompose $\tau_1(x)$ en intégrale de FOURIER, et on en déduit l'amplitude complexe $A(x, 0_+)$ juste après ce premier obstacle, toujours sur l'axe O_1x :

$$\begin{aligned} A(x, 0_+) &\cong A_0 \tau_1(x) \exp \frac{ik(x-x_s)^2}{2D} = \frac{A_0}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tau}_1(\theta'/\lambda) e^{ik\theta'x} d\theta' \exp \frac{ik(x-x_s)^2}{2D} \\ &= \frac{A_0}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tau}_1\left(\frac{\theta'}{\lambda}\right) \exp \frac{ik\left[(x-x_s+D\theta')^2 - D\theta'(D\theta'-2x_s)\right]}{2D} d\theta' \end{aligned}$$

D'après les lois de propagation des ondes sphériques impliquées dans cette intégrale⁽⁶⁾, l'amplitude complexe de l'onde incidente sur l'axe O_2x du second obstacle se décompose ainsi :

$$A(x, d_-) \cong \frac{A'_0}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tau}_1\left(\frac{\theta'}{\lambda}\right) \left[\exp \frac{ik(x-x_s+D\theta')^2}{2(D+d)} \right] \left[\exp -\frac{ik\theta'(D\theta'-2x_s)}{2} \right] d\theta'$$

où A'_0 est une nouvelle constante. Au point O_2 , chaque onde sphérique $(O)(x_s, \theta')$ de la

(6) Ne pas les confondre avec les ondelettes qui seraient émises par tous les points éclairés du second obstacle selon le principe d'HUYGENS-FRESNEL !

décomposition ci-dessus, si elle était seule, produirait dans l'approximation de l'optique géométrique un rayon lumineux de petite inclinaison $\iota(x_s, \theta') \cong \frac{D\theta' - x_s}{D+d}$ – la dérivée, par rapport à x , de $\frac{(x - x_s + D\theta')^2}{2(D+d)}$ en $x=0$ – et une amplitude complexe proportionnelle à

$$\begin{aligned} & \tilde{\tau}_1 \left(\frac{\theta'}{\lambda} \right) \exp \left\{ \frac{ik}{2} \left[\frac{(D\theta' - x_s)^2}{D+d} - \theta' (D\theta' - 2x_s) \right] \right\} \\ & = \tilde{\tau}_1 \left(\frac{\theta'}{\lambda} \right) \exp - \left\{ \frac{ik}{2} \left[\left(\frac{1}{D} + \frac{1}{d} \right)^{-1} \left(\theta' - \frac{x_s}{D} \right)^2 - \frac{x_s^2}{D} \right] \right\} \end{aligned}$$

Le point source de (O) (x_s, θ') est dans le plan Oxz qui est conjugué de l'écran (E) par (L) – cf. figure 2. Sachant cela, examinons ce que produit (O) (x_s, θ') sur (E) . Il suffit d'appliquer le principe d'HUYGENS-FRESNEL et de noter que :

- ◆ les ondelettes fictives invoquées par ce principe, et qui seraient émises par tous les points du second obstacle s'il était éclairé par (O) (x_s, θ') , donneraient après passage par (L) un ensemble d'ondelettes fictives émises par tous les points de l'image de ce second obstacle (de grandissement transversal $\gamma_{O_2O'_2}$) ;
- ◆ dans la limite où λ tend vers 0, les interférences de l'ensemble de ces ondelettes produiraient sur (E) – plan situé à la distance algébrique $\overline{O'_2O'}$ du point O'_2 – un point de convergence situé à l'intersection de (E) et du rayon passant par O'_2 , d'inclinaison $g_{O_2O'_2} \iota(x_s, \theta')$, où $g_{O_2O'_2}$ est le grandissement angulaire du plan de front passant par O_2 à celui passant par O'_2 ;
- ◆ donc l'abscisse – avec pour origine O' , image de O par (L) – de ce point de convergence est environ $g_{O_2O'_2} \iota(x_s, \theta') \overline{O'_2O'} \cong g_{O_2O'_2} \frac{D\theta' - x_s}{D+d} \overline{O'_2O'}$.

À partir de ces remarques et des propriétés classiques de la diffraction de FRAUNHOFER [2], on peut trouver que (O) (x_s, θ') crée sur l'axe $O'X$ de (E) une distribution d'amplitude complexe égale à

$$\begin{aligned} & C' \left(\tilde{\tau}_1 \left(\frac{\theta'}{\lambda} \right) \exp - \left\{ \frac{ik}{2} \left[\left(\frac{1}{D} + \frac{1}{d} \right)^{-1} \left(\theta' - \frac{x_s}{D} \right)^2 - \frac{x_s^2}{D} \right] \right\} \right) \\ & \tilde{\tau}_2 \left[\frac{\gamma_{O_2O'_2}}{\lambda \overline{O'_2O'}} \left(X - g_{O_2O'_2} \frac{D\theta' - x_s}{D+d} \overline{O'_2O'} \right) \right] \exp \left(ik \frac{X^2}{2 \overline{O'_2O'}} \right) \end{aligned}$$

où C' est une nouvelle constante de proportionnalité, et X l'abscisse sur (E) d'origine O' .

Mais la relation de conjugaison de grandissement, avec origines en O et O' ([9], p. 40), donne $\frac{\gamma_{O_2O'_2}}{O'_2O'} = \frac{g_{OO'}}$ où $g_{OO'}$ désigne le grandissement angulaire de O à O' . Or, moyennant la relation de LAGRANGE-HELMHOLTZ puis une relation de grandissement de NEWTON ([9], p. 30 et 39), on trouve

$$g_{OO'} = -\frac{FO}{f} = \frac{FO}{f'},$$

donc
$$\frac{\gamma_{O_2O'_2}}{O'_2O'} = \frac{FO}{O_2O} \frac{1}{f'} = \frac{OF}{D+d} \frac{1}{f'};$$

et $\gamma_{O_2O'_2} g_{O_2O'_2} = 1$.

En posant $\mathcal{A}'_0 := C' \frac{A'_0}{\lambda} \exp\left(ik \frac{x_s^2}{2D}\right)$ et $\frac{1}{\mathcal{D}} := \frac{1}{D} + \frac{1}{d}$ on obtient une expression intégrale de l'amplitude complexe résultante sur l'axe $O'X$ de (E) :

$$A_2(X) \cong \mathcal{A}'_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \tilde{\tau}_1 \left(\frac{\theta'}{\lambda} \right) \exp - \left[\frac{ik\mathcal{D}}{2} \left(\theta' - \frac{x_s}{D} \right)^2 \right] \right\} \tilde{\tau}_2 \left(\frac{OF}{OO_2} \frac{X}{\lambda f'} - \frac{D\theta' - x_s}{\lambda(D+d)} \right) d\theta' \exp \left(\frac{ik}{2} \frac{X^2}{O'_2O'} \right)$$

Posons aussi $\theta_s := -x_s/D$, et effectuons dans l'intégrale ci-dessus le changement de variable $\theta := \theta' + \theta_s$; on obtient :

$$A_2(X) \cong \mathcal{A}'_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tau}_1 \left(\frac{\theta - \theta_s}{\lambda} \right) e^{-ik\theta^2 \mathcal{D}/2} \tilde{\tau}_2 \left(\frac{OF}{OO_2} \frac{X}{\lambda f'} - \frac{\mathcal{D}}{\lambda d} \theta \right) d\theta \exp \left(\frac{ik}{2} \frac{X^2}{O'_2O'} \right) \tag{A.1}$$

On voit alors qu'on peut retrouver cette expression par généralisation de la relation (2), en y remplaçant \mathcal{A}_0 par \mathcal{A}'_0 , θ_0 par θ_s , d par $\mathcal{D} = \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{d}\right)^{-1}$, $\frac{X - f'\theta}{\lambda f'}$ par $\frac{OF}{OO_2} \frac{X}{\lambda f'} - \frac{D\theta}{\lambda(D+d)}$, et $\overline{O_2F'}$ par $\overline{O'_2O'}$. Contrairement à la configuration envisagée au paragraphe 1.1. où D est infini, l'intensité

$$I_2(X) = I'_0 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tau}_1 \left(\frac{\theta - \theta_s}{\lambda} \right) e^{-ik\theta^2 \mathcal{D}/2} \tilde{\tau}_2 \left(\frac{OF}{OO_2} \frac{X}{\lambda f'} - \frac{\mathcal{D}}{\lambda d} \theta \right) d\theta \right|^2 \tag{A.2}$$

(où $I'_0 := K |\mathcal{A}'_0|^2$) dépend aussi de la distance algébrique $\overline{O_2F'}$ entre autres : si on la fait varier, d'après la relation (A.2) on modifie l'échelle de la figure de diffraction du même facteur que le rapport $\overline{OO_2}/OF$, tout en conservant *a priori* le même flux total dans cette figure.

Comme attendu, on vérifie que si D tend vers l'infini, θ_s tend vers θ_0 , \mathcal{D} tend vers d , $\frac{\overline{OF}}{OO_2} \frac{X}{\lambda f'}$ - $\frac{D\theta}{\lambda(D+d)}$ tend vers $\frac{X - f'\theta}{\lambda f'}$, et $\overline{O_2'O'}$ tend vers $\overline{O_2'F'}$.

EFFET D'UNE TRANSLATION TRANSVERSALE AJUSTÉE POUR CHAQUE OBSTACLE

Considérons un autre couple d'obstacles, le premier obstacle (resp. le second) étant translaté, dans le sens de \mathbf{u}_x , de x_1 (resp. x_2) par rapport à sa position initiale – donc ces obstacles sont caractérisés par les nouveaux coefficients de transmission $\tau'_1(x) := \tau_1(x - x_1)$ et $\tau'_2(x) := \tau_2(x - x_2)$; alors, compte tenu de la relation bien connue entre les transformées de FOURIER des fonctions τ_1 (resp. τ_2) et τ'_1 (resp. τ'_2), d'après l'expression (A.1) la nouvelle amplitude complexe sur l'axe $O'X$ s'écrit

$$\begin{aligned} A'_2(X) &\cong \mathcal{A}'_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\exp - \left(i 2\pi \frac{\theta - \theta_s}{\lambda} x_1 \right) \right] \tilde{\tau}_1 \left(\frac{\theta - \theta_s}{\lambda} \right) \exp - \left(\frac{ik\mathcal{D}}{2} \theta^2 \right) \\ &\quad \times \left\{ \exp - \left[i 2\pi \left(\frac{\overline{OF}}{OO_2} \frac{X}{\lambda f'} - \frac{D\theta}{\lambda(D+d)} \right) x_2 \right] \right\} \tilde{\tau}_2 \left(\frac{\overline{OF}}{OO_2} \frac{X}{\lambda f'} - \frac{\mathcal{D}}{\lambda d} \theta \right) d\theta \\ &\quad \times \exp \left(\frac{ik}{2} \frac{X^2}{O_2'O'} \right) \end{aligned}$$

Maintenant, ajustons l'une par rapport à l'autre les translations des deux obstacles, en imposant $x_2 = \frac{D+d}{D} x_1 - i.e.$ le **déplacement transversal de chaque obstacle est proportionnel à la distance de son plan au point source S** . Alors l'expression ci-dessus se simplifie :

$$A'_2(X) \cong A_2(X) \exp - \left[i \frac{k}{f'} \left(x_2 \frac{\overline{OF}}{OO_2} X - f'\theta_s x_1 \right) \right].$$

De même qu'au sous-paragraphe 1.2.1., **l'intensité de la figure de diffraction est inchangée par cette translation ajustée de chaque obstacle ; mais l'amplitude complexe est modulée en phase**, d'une façon qui tend évidemment vers celle décrite au sous-paragraphe 1.2.1. si D tend vers l'infini.

LOI DE SIMILITUDE LIÉE À UNE VARIATION AJUSTÉE DE DIVERSES DIMENSIONS DU MONTAGE

Puisqu'ici D n'est pas fixé (il n'est pas infini, contrairement à la configuration envisagée au sous-paragraphe 1.2.2.), nous pouvons jouer sur cette dimension et cela nous rajoute un degré de liberté supplémentaire. Considérons alors un nouveau dispositif de diffraction multiple de FRAUNHOFER à distance finie, modifié par rapport au premier

de la façon suivante :

- ◆ le premier obstacle – resp. le second – a ses dimensions *transversales* rétrécies d'un facteur $\kappa_1 > 0$ – resp. κ_2 – par rapport à celles du premier dispositif, de sorte que son nouveau coefficient de transmission s'écrit $\tau_1''(x) := \tau_1(\kappa_1 x)$ – resp. $\tau_2''(x) := \tau_2(\kappa_2 x)$;

- ◆ l'écart *longitudinal* entre les obstacles est rétréci d'un facteur $\kappa_1 \kappa_2$, de sorte que sa nouvelle valeur est

$$d'' := \frac{d}{\kappa_1 \kappa_2} ; \tag{A.3}$$

- ◆ la distance entre le point source et le plan du premier obstacle est rétrécie d'un facteur $\left[\kappa_1 \left(1 + \frac{D}{d} \right) - \kappa_2 \frac{D}{d} \right] \kappa_1$, de sorte que sa nouvelle valeur est

$$D'' = d'' \left[\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \left(1 + \frac{d}{D} \right) - 1 \right]^{-1}, \tag{A.4}$$

et aussi la nouvelle distance algébrique entre O et O_2 devient $(D'' + d'')$ – mais si on veut que D'' reste positif il faut $\kappa_2 < \kappa_1 \left(1 + \frac{d}{D} \right)$;

- ◆ la distance algébrique $L := \overline{OF}$ est *a priori* changée en L'' ;
- ◆ l'abscisse du point source S est dilatée du facteur κ_1 , de sorte que sa nouvelle valeur est $x_S'' := \kappa_1 x_S$, d'où $\theta_S'' := \kappa_1 \theta_S$.

Des relations (A.3) et (A.4) on déduit facilement

$$\frac{D''}{D'' + d''} \frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \frac{D}{D + d} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{D''} + \frac{1}{d''} \right)^{-1} \kappa_1^2 = \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{d} \right)^{-1} \tag{A.5}$$

Alors, compte tenu de la relation bien connue entre les transformées de FOURIER des fonctions τ_1 (resp. τ_2) et τ_1'' (resp. τ_2''), la nouvelle intensité sur l'axe $O'X$ s'écrit

$$I_2''(X) \cong I_0' \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\kappa_1} \tilde{\tau}_1 \left(\frac{\theta - \theta_S''}{\kappa_1 \lambda} \right) \exp - \left[\frac{ik}{2} \left(\frac{1}{D''} + \frac{1}{d''} \right)^{-1} \theta^2 \right] \right\} \right|^2 \left| \frac{1}{\kappa_2} \tilde{\tau}_2 \left(\frac{L''}{D'' + d''} \frac{X}{\kappa_2 \lambda f'} - \frac{D'' \theta}{\kappa_2 \lambda (D'' + d'')} \right) d\theta \right|$$

À l'aide du changement de variable $\theta'' := \theta / \kappa_1$ et des relations (A.5), on trouve

$$I_2''(X) \cong \frac{1}{\kappa_2^2} I_2 \left(\frac{X}{\kappa_2 (D'' + d'') (D + d)^{-1} L / L''} \right)$$

Ainsi **la nouvelle figure de diffraction est l'homothétique de la première figure, par rapport à O , d'un facteur $\kappa_2 \frac{D'' + d''}{D + d} \frac{L}{L''} = \kappa_1 \frac{D''}{D} \frac{L}{L''}$** . Si D tend vers l'infini, ce

facteur tend vers κ_1 (conformément au sous-paragraphe 1.2.2.) puisque L/D tend vers 1, κ_2 tend vers κ_1 – cf. (A.5) – donc D'' tend vers l’infini – cf. (A.4) –, et enfin L''/D'' tend vers 1 (F étant toujours supposé à distance finie de O_1).

LIEN ENTRE CHANGEMENT D'INCIDENCE ET TRANSLATIONS TRANSVERSALES DIFFÉRENTIELLES AJUSTÉES

Considérons ici que, par rapport au premier montage, le premier obstacle a été translaté de x_1 dans le sens de \mathbf{u}_x , et le second de x_2 dans le même sens, avec

$$x_2 = \frac{D+d}{D} (x_1 - \Delta) \tag{A.6}$$

La nouvelle intensité $I_2''(X)$ sur $O'X$ est alors proportionnelle au carré du module de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\exp - \left(i 2\pi \frac{\theta - \theta_s}{\lambda} x_1 \right) \right] \tilde{\tau}_1 \left(\frac{\theta - \theta_s}{\lambda} \right) \exp - \left(\frac{i k \mathcal{D}}{2} \theta^2 \right) \\ \times \left[\exp - \left[i 2\pi \left(\frac{\overline{OF}}{\overline{OO_2}} \frac{X}{\lambda f'} - \frac{D\theta}{\lambda(D+d)} \right) x_2 \right] \right] \tilde{\tau}_2 \left(\frac{\overline{OF}}{\overline{OO_2}} \frac{X}{\lambda f'} - \frac{\mathcal{D}}{\lambda d} \theta \right) d\theta$$

Un calcul utilisant la relation (A.6) et le changement de variable $\theta'' := \theta + (\Delta/\mathcal{D})$ conduit à

$$I_2''(X) \cong I_0' \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tau}_1 \left[\frac{1}{\lambda} \left(\theta'' - \theta_s - \frac{\Delta}{\mathcal{D}} \right) \right] e^{-i k \theta''^2 \mathcal{D}/2} \right|^2 \\ \left| \tilde{\tau}_2 \left[\frac{\overline{OF}}{\overline{OO_2}} \frac{1}{\lambda f'} \left(X + \frac{\overline{OO_2}}{\overline{OF}} f' \frac{\Delta}{d} \right) - \frac{\mathcal{D}}{\lambda d} \theta'' \right] d\theta'' \right|^2$$

En comparant avec l’expression (A.2), on voit que *dans ce dernier montage, la distribution d’intensité est identique à celle qu’on obtiendrait en translatant de $\frac{\overline{OO_2}}{\overline{OF}} f' \frac{\Delta}{d}$, en sens contraire de \mathbf{u}_x , la distribution d’intensité donnée par le premier montage où θ_s serait augmenté de l’angle Δ/\mathcal{D} (en radians).* Cette propriété redonne évidemment le théorème trouvé au sous-paragraphe 1.2.3. si D tend vers l’infini.

EFFET D'UNE MODULATION DU PREMIER OBSTACLE

Considérons maintenant que, par rapport au premier montage, le premier obstacle est modulé avec une fréquence spatiale ν \mathbf{u}_x , i.e. que $\tau_1(x)$ est changé en $\tau_1(x) e^{i 2\pi \nu x}$. Alors, compte tenu de la propriété bien connue des transformées de FOURIER des fonctions modulées, l’intensité $I_2(X)$ sur l’axe $O'X$ devient

$$I'_0 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tau}_1 \left(\frac{\theta - \theta_s}{\lambda} - \nu \right) e^{-ik\theta^2 \mathcal{D}/2} \tilde{\tau}_2 \left(\frac{\overline{OF}}{\overline{OO_2}} \frac{X}{\lambda f'} - \frac{\mathcal{D}}{\lambda d} \theta \right) d\theta \right|^2 =$$

$$I'_0 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tau}_1 \left(\frac{\theta - (\theta_s + \lambda\nu)}{\lambda} \right) e^{-ik\theta^2 \mathcal{D}/2} \tilde{\tau}_2 \left(\frac{\overline{OF}}{\overline{OO_2}} \frac{X}{\lambda f'} - \frac{\mathcal{D}}{\lambda d} \theta \right) d\theta \right|^2$$

L'effet de la modulation du premier obstacle avec une fréquence spatiale ν \mathbf{u}_x est le même que celui d'une variation de θ_s égale à $\lambda\nu$; à cause du terme $e^{-ik\theta^2 \mathcal{D}/2}$ l'effet n'est pas le même pour une modulation du second obstacle, et avec chacune de ces modulations la nouvelle intensité ne se déduit pas de l'ancienne par une simple translation, car il n'y a plus invariance par translation *a priori* – à moins que d soit nul.

HOMOTHÉTIES DE RAPPORTS INVERSES ET PERMUTATION DES OBSTACLES

Considérons enfin que le premier obstacle subit une homothétie de centre O_1 et de rapport $d/\mathcal{D} = 1 + (d/D)$, le second une homothétie de centre O_2 et de rapport \mathcal{D}/d , puis qu'on les permute. Alors au point d'abscisse $-X_{S'} = -\frac{f'}{\overline{FO}} x_s$ (d'après une relation de grandissement de NEWTON, ou encore $-X_{S'} = -\frac{\overline{OO_2}}{\overline{OF}} \frac{\mathcal{D}}{d} f' \theta_s$), symétrique de S' par rapport à l'axe Oz , vu l'expression (A.1) l'amplitude complexe est

$$A_2^p(-X_{S'}) \cong \mathcal{A}'_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{D}}{d} \tilde{\tau}_2 \left[\frac{\mathcal{D}}{d} \left(\frac{\theta - \theta_s}{\lambda} \right) \right] e^{-ik\theta^2 \mathcal{D}/2}$$

$$\times \frac{d}{\mathcal{D}} \tilde{\tau}_1 \left[\frac{d}{\mathcal{D}} \left(\frac{\mathcal{D}}{\lambda d} (-\theta_s - \theta) \right) \right] d\theta \exp \left[\frac{ik}{2} \frac{(-X_{S'})^2}{O_2' O_1'} \right]$$

et le changement de variable $\theta^p := -\theta$ donne

$$A_2^p(-X_{S'}) \cong \mathcal{A}'_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tau}_1 \left(\frac{\theta^p - \theta_s}{\lambda} \right) e^{-ik(\theta^p)^2 \mathcal{D}/2} \tilde{\tau}_2 \left(\frac{\mathcal{D}}{\lambda d} (-\theta_s - \theta^p) \right) d\theta^p \exp \left(\frac{ik}{2} \frac{X_{S'}^2}{O_2' O_1'} \right)$$

$$\cong A_2(-X_{S'})$$

Cette propriété ne s'étend pas *a priori* à d'autres valeurs de X , sauf si $d = 0$ (auquel cas elle est valable pour tout X).