



HAL
open science

Introduction à l'Optique Guidée

Frédéric Bernardot

► **To cite this version:**

| Frédéric Bernardot. Introduction à l'Optique Guidée. Master / M1. 2009. sfo-00442974

HAL Id: sfo-00442974

<https://hal-sfo.ccsd.cnrs.fr/sfo-00442974>

Submitted on 26 Dec 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris–7

**Maîtrise de physique
2000 – 2004**

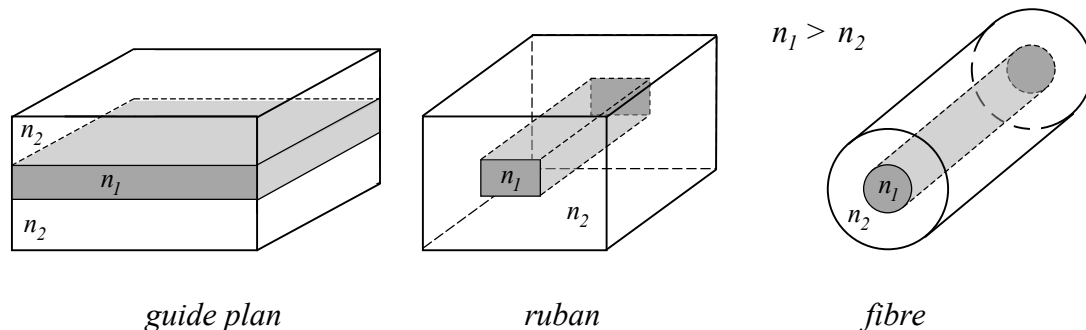
**INTRODUCTION À
L'OPTIQUE GUIDÉE**

F. Bernardot

INTRODUCTION À L'OPTIQUE GUIDÉE

Les instruments d'Optique conventionnels, ainsi que les expériences d'Optique les plus courantes, manipulent la lumière sous forme de faisceaux pour la transporter d'un lieu à un autre dans l'espace libre. Des dispositifs classiques – miroirs, lentilles, prismes, coins de cubes, ... – sont alors requis pour assurer ce transport.

Cependant, il existe un moyen assez nouveau pour guider la lumière : cela se fait en utilisant l'intérieur de minces conduits diélectriques, les *fibres optiques*, qui ont d'abord été pressenties dans les années 50, puis étudiées en laboratoire¹ dans les années 60, et enfin réalisées et développées extensivement à partir des années 70 pour les télécommunications optiques sur de grandes distances. Le principe du confinement de la lumière est simple : un milieu diélectrique entouré d'un second milieu d'indice de réfraction plus faible est un piège pour la lumière, qui se réfléchit aux frontières par réflexions totales. Outre les fibres optiques, qui sont des guides de lumière cylindriques, fonctionnent sur ce principe toutes les structures susceptibles de guider la lumière, notamment en géométrie plane ou de ruban.



L'étude des propriétés de telles structures constitue le domaine de l'*Optique guidée*. Ce domaine a d'importantes applications en télécommunication et dans la fabrication de composants miniaturisés pour l'Optique et l'Opto-électronique.

Dans les guides d'onde optiques, d'une part la taille transverse des guides est le plus souvent de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde optique, et d'autre part des questions de polarisation de la lumière se posent à propos des conditions aux frontières suivies par l'onde optique. Il s'avère donc nécessaire de traiter la propagation de la lumière dans un guide dans le cadre de la théorie de l'Optique électromagnétique. Pour cette raison, le chapitre I est consacré à des rappels sur l'électromagnétisme dans le vide (illimité) et dans un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope (illimité lui aussi).

Le guidage des ondes électromagnétiques est introduit au chapitre II sur l'exemple du guide métallique plan, formé de deux réflecteurs parallèles séparés par une couche de vide. Ce type de guidage, utilisé dans le domaine des micro-ondes (c'est-à-dire des longueurs d'onde centimétriques), est présenté ici pour la simplicité de son traitement formel. On introduit la notion, fondamentale, de mode de propagation. Le guide métallique à section rectangulaire, qui est un système réel, est également traité.

Le chapitre III aborde le guidage des ondes optiques dans les guides diélectriques. Les propriétés de propagation de la lumière dans un guide diélectrique plan sont examinées en détail. Ensuite, le cas d'un guide en ruban, c'est-à-dire dont le cœur possède une section rectangulaire, est brièvement présenté.

¹ Charles Kao a reçu le prix Nobel de physique 2009 "pour des réalisations révolutionnaires concernant la transmission de lumière dans les fibres pour la communication optique".

Quelques applications de l'Optique guidée sont traitées dans le chapitre IV. On y expose les principes de dispositifs simples qui concernent le couplage de lumière dans un guide, ou le couplage entre guides. On montre aussi comment fonctionnent quelques dispositifs électro-optiques : modulateurs (de phase ou d'intensité optique) et commutateurs.

Les fibres optiques sont des guides d'onde diélectriques à symétrie cylindrique, c'est-à-dire dont le cœur est à section circulaire. La propagation de la lumière dans les fibres fait l'objet des chapitres V et VI. Sont présentés les modes de propagation dans une fibre à saut d'indice, multimode ou monomode, ainsi que dans une fibre multimode à gradient d'indice. On aborde finalement les propriétés de dispersion et d'atténuation, qui sont des aspects intervenant dans l'utilisation des fibres en télécommunication optique.

Il va de soi que ce cours ne couvre pas de façon exhaustive l'Optique guidée et les fibres optiques. Ces thèmes forment en effet un domaine extrêmement vaste, qui s'est développé activement depuis les années 70 et qui reste en évolution constante en suscitant des recherches appliquées et fondamentales. Aussi ce domaine ne saurait-il évidemment être décrit en quelques brefs chapitres. Ce cours se veut simplement une introduction au sujet de l'Optique guidée et des fibres optiques ; il en présente les principes physiques fondamentaux et les concepts élémentaires, ainsi que les applications et dispositifs les plus simples. Aucune connaissance préalable du sujet n'est requise ; cependant, l'exposé s'appuie sur des points essentiels d'Optique électromagnétique, qui sont rappelés dans le premier chapitre.

INTRODUCTION À L'OPTIQUE GUIDÉE

I – Rappels : électromagnétisme dans le vide et dans un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope	p. I-1
A] Électromagnétisme dans le vide	p. I-2
1) Onde plane progressive monochromatique	p. I-2
2) Paquet d'ondes – Vitesse de groupe	p. I-3
B] Électromagnétisme dans un milieu diélectrique linéaire, homogène, isotrope	p. I-5
1) Milieu diélectrique linéaire et isotrope	p. I-6
2) Onde plane progressive monochromatique dans un milieu diélectrique linéaire, homogène, isotrope	p. I-6
3) Dispersion – Vitesse de groupe	p. I-7
C] Discontinuités du champ électromagnétique sur un dioptre	p. I-8
1) Dioptre métal-vide	p. I-9
2) Dioptre entre deux milieux diélectriques linéaires et isotropes	p. I-9
Annexe I	p. AI-1
1) Développement d'un champ électromagnétique sur les ondes planes progressives monochromatiques	p. AI-1
2) Paquet d'ondes	p. AI-1
3) Polarisation d'une onde plane progressive	p. AI-2

II – Introduction au guidage des ondes électromagnétiques	p. II-1
A] Guidage par deux miroirs parallèles	p. II-2
1) Modes de propagation TE	p. II-4
2) Interprétation des modes TE	p. II-7
3) Modes de propagation TM	p. II-9
B] Guide à section rectangulaire	p. II-10
1) Principe de la recherche des modes	p. II-11
2) Modes TE du guide rectangulaire	p. II-12
3) Modes TM du guide rectangulaire	p. II-13
Annexe II : Calculs sur le guide métallique rectangulaire	p. AII-1
1) Modes du guide métallique rectangulaire	p. AII-1
2) Solution de l'équation pour \mathcal{E}_z ou \mathcal{B}_z	p. AII-2

Exercices sur le chapitre II

III – Guides d’onde diélectriques	p. III-1
A] Guidage de la lumière par réflexion totale	p. III-2
B] Modes de propagation du guide diélectrique plan	p. III-5
1) Réflexion totale d’une onde plane progressive	p. III-5
2) Modes de propagation TE	p. III-8
3) Modes de propagation TM	p. III-13
C] Guide diélectrique à section rectangulaire	p. III-14
1) Structures des modes de propagation	p. III-15
2) Relations de dispersion	p. III-17

Exercices sur le chapitre III

IV – Quelques dispositifs de l’optique guidée	p. IV-1
A] Couplage de lumière dans un guide	p. IV-4
1) Excitation des modes	p. IV-4
2) Couplage à l’entrée	p. IV-5
3) Couplage latéral	p. IV-6
B] Couplage entre guides	p. IV-10
1) Théorie de modes couplés	p. IV-10
2) Coupleurs	p. IV-12
3) Commutateur	p. IV-13
C] Dispositifs électro-optiques	p. IV-14
1) Modulateur de phase	p. IV-14
2) Modulateur d’intensité	p. IV-15
3) Commutation électro-optique	p. IV-16
Annexe IV	p. AIV-1
1) Excitation des modes TE d’un guide plan	p. AIV-1
2) Orthogonalité des modes TE d’un guide plan	p. AIV-1
3) Couplage de deux guides diélectriques plans	p. AIV-2
4) Échange de puissance lumineuse entre deux guides plans	p. AIV-4

Exercices sur le chapitre IV

V – Fibres optiques I	p. V-1
A] Guidage des rayons lumineux dans les fibres optiques multimodes ($\lambda_0 \ll a$)	p. V-3
1) Fibre à saut d'indice	p. V-3
2) Fibre à gradient d'indice	p. V-6
B] Modes de propagation d'une fibre à saut d'indice	p. V-9
1) Distribution spatiale des modes	p. V-9
2) Paramètre de fibre	p. V-13
3) Modes LP	p. V-13
Annexe V	p. AV-1
1) Fonctions de Bessel d'ordre entier	p. AV-1
2) Fonctions de Bessel modifiées, d'ordre entier	p. AV-2
3) Structure des modes guidés à l'approximation de guidage faible	p. AV-3

Exercices sur le chapitre V

VI – Fibres optiques II	p. VI-1
A] Description W.K.B. des fibres multimodes	p. VI-2
1) Onde quasi plane	p. VI-3
2) Modes	p. VI-5
3) Vitesses de phase, vitesses de groupe	p. VI-11
B] Dispersion	p. VI-12
1) Fibre multimode : dispersion modale	p. VI-12
2) Fibre monomode : dispersion chromatique	p. VI-15
3) Fortes puissances : dispersion non linéaire	p. VI-19
C] Atténuation	p. VI-20
1) Coefficient d'atténuation linéique	p. VI-20
2) Origines de l'atténuation linéique	p. VI-21
3) Connexions	p. VI-22
Annexe VI	p. AVI-1
1) Approximation W.K.B. : raccordements de $f(r)$ en r_l et en R_l	p. AVI-1
2) Modes de propagation à l'approximation W.K.B.	p. AVI-4

Exercices sur le chapitre VI

Exercices supplémentaires sur le chapitre VI

INTRODUCTION À L'OPTIQUE GUIDÉE

BIBLIOGRAPHIE

- Abramovitz, Stegun *Handbook of mathematical functions* (N.B.S., 1968)
- Clair *Télécommunications optiques – Introduction à l'Optique intégrée* (Masson, 1977)
- de Fornel *Les ondes évanescentes en Optique et en Optoélectronique* (Eyrolles, 1998)
- Feynman *Lectures on Physics, volume II* (Addison Wesley, 1964)
- Ghatak, Thyagarajan *Optical Electronics* (Cambridge U.P., 1989)
- Halley *Les systèmes à fibres optiques* (Eyrolles, 1985)
- Joindot (I. et M.) *Les télécommunications par fibres optiques* (Dunod, 1996)
- Kapany, Burke *Optical waveguides* (Academic Press, 1972)
- Lecoy *Télécoms sur fibres optiques* (Lavoisier, 1997)
- Marcou *Les fibres optiques plastiques* (Masson, 1994)
- Prade, Vinet *Optique guidée* (cours de l'ENSTA, années 80)
- Saleh, Teich *Fundamentals of Photonics* (Wiley, 1991)
- Surmely *La fibre optique* (Masson, 1995)
- Unger *Planar optical waveguides and fibres* (Clarendon Press, 1977)
- Wilson, Hawkes *Optoelectronics, an introduction* (Prentice Hall, 1998)

I - Rappels : électromagnétisme dans le vide et dans un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope

Un champ électromagnétique est défini par son champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et son champ magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ (\vec{r} : position dans l'espace ; t : temps). Son évolution spatio-temporelle est régie par les équations de Maxwell :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{div} \vec{B} = 0, \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

où $\rho(\vec{r}, t)$ et $\vec{j}(\vec{r}, t)$ sont les densités volumiques de charge et de courant. Les équations de Maxwell sont des équations couplées pour \vec{E} et \vec{B} , dont les termes sources sont ρ et \vec{j} . Le système d'équations est bouclé une fois connues les relations entre les sources (ρ, \vec{j}) et le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}); ces relations, dites constitutives, sont propres à chaque situation physique.

Ce chapitre se borne à exposer des rappels d'électromagnétisme utiles pour la suite. Aussi ne seront considérés ici que des champs électromagnétiques harmoniques dans le temps. La linéarité des équations de Maxwell^(*) autorise qu'un tel champ soit écrit sous la forme $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t}$, $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}) e^{i\omega t}$, où ω est la pulsation^(**); le champ physique est $\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}(\vec{E}(\vec{r}, t))$, $\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{Re}(\vec{B}(\vec{r}, t))$.

La fréquence du champ est $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$.

(*) La pulsation ω est aussi appelée fréquence angulaire.

(**) Cette linéarité est assurée lorsque les sources sont linéaires en champ (condition couramment rencontrée).

(A) Électromagnétisme dans le vide

Dans le vide, c'est-à-dire loin des charges et des courants, les champs \vec{E} et \vec{B} suivent les équations de Maxwell, avec les relations constitutives $\rho=0$ et $\vec{j}=0$.

On a donc les équations suivantes pour $\vec{E}(\vec{r})$ et $\vec{B}(\vec{r})$:

$$(i) \vec{\text{rot}} \vec{E} = -i\omega \vec{B}, \quad (ii) \text{div} \vec{E} = 0, \quad (iii) \text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad (iv) \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 i\omega \vec{E}.$$

Les équations (i), ⁽ⁱⁱ⁾ et (iv) impliquent que $\vec{E}(\vec{r})$ suit l'équation de Helmholtz

$$\Delta \vec{E} + k_0^2 \vec{E} = 0, \quad \text{avec} \quad k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}. \quad \vec{B}(\vec{r}) \text{ suit}$$

la même équation. (L'opérateur Laplacien Δ appliqué à un champ de vecteur est

défini par $\Delta \vec{V} = \text{grad}(\text{div} \vec{V}) - \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{V})$; en coordonnées cartésiennes, la

composante j de $\Delta \vec{V}$, $j=x, y$ ou z , vaut $\Delta V_j = \frac{\partial^2 V_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_j}{\partial z^2}$.) k_0 est

appelé nombre d'onde dans l'espace libre.

1) Onde plane progressive monochromatique

$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ est solution de l'équation de Helmholtz, à condition que

$|\vec{k}| = k_0$, soit: $|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$. Cette dernière relation, qui lie la norme du vecteur

d'onde \vec{k} à la pulsation ω , est appelée relation de dispersion.

Le champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ est une onde (*)

(*) En effet, $\vec{E}(\vec{r}, t)$ suit l'équation d'onde $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$, puisque l'amplitude $\vec{E}(\vec{r})$ suit l'équation de Helmholtz ci-dessus.

plane progressive dans la direction et le sens du vecteur d'onde \vec{k} . Sa vitesse de phase est $v_p = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$, ie $v_p = c$, indépendante de la pulsation ω . La période spatiale de l'onde, appelée longueur d'onde, est $\lambda_0 = \frac{2\pi}{|\vec{k}|} = \frac{2\pi}{k_0} = \frac{2\pi c}{\omega}$.

Les équations de Maxwell fournissent la structure de l'onde plane progressive.

(ii) et (iii) donnent $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ et $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$: Les champs \vec{E} et \vec{B} sont transverses à la direction de propagation ; (i) lie \vec{B} à \vec{E} : $\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{u} \times \vec{E}$, où $\hat{u} = \frac{\vec{k}}{k_0}$ est le vecteur unitaire suivant la direction et le sens de propagation.

Les champs électrique et magnétique d'une onde plane progressive monochromatique étant transverses, une telle onde est qualifiée de TEM, pour transverse électro-magnétique. Les deux ^{seuls} paramètres libres de cette onde sont les composantes de \vec{E}_0 orthogonales à la direction de propagation définie par \vec{k} ; une relation entre ces composantes fixe la polarisation de l'onde (cf. annexe I).

2) Paquet d'ondes - Vitesse de groupe

Une onde plane progressive monochromatique peut apparaître, à juste titre, comme une solution bien artificielle des équations de Maxwell : le champ électromagnétique d'une telle onde existe à tout temps, de $t = -\infty$ à $t = +\infty$, et s'étend spatialement à l'infini, aussi bien suivant la direction de

propagation que transversalement.

Un tel champ électromagnétique n'est donc pas physique. Cependant, son intérêt vient du fait que tout champ électromagnétique peut être décrit comme une superposition d'ondes planes progressives monochromatiques (cf. annexe I) :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{g}(\vec{k}) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right\}, \text{ où } \omega \text{ dépend de } \vec{k} \text{ via la relation}$$

de dispersion (dans le vide illimité, $\omega = |\vec{k}|c$). Dans le cas où $\vec{g}(\vec{k})$ ne prend des

valeurs notables que dans le voisinage d'un vecteur d'onde \vec{k}_2 , $\vec{E}(\vec{r}, t)$ est appelé

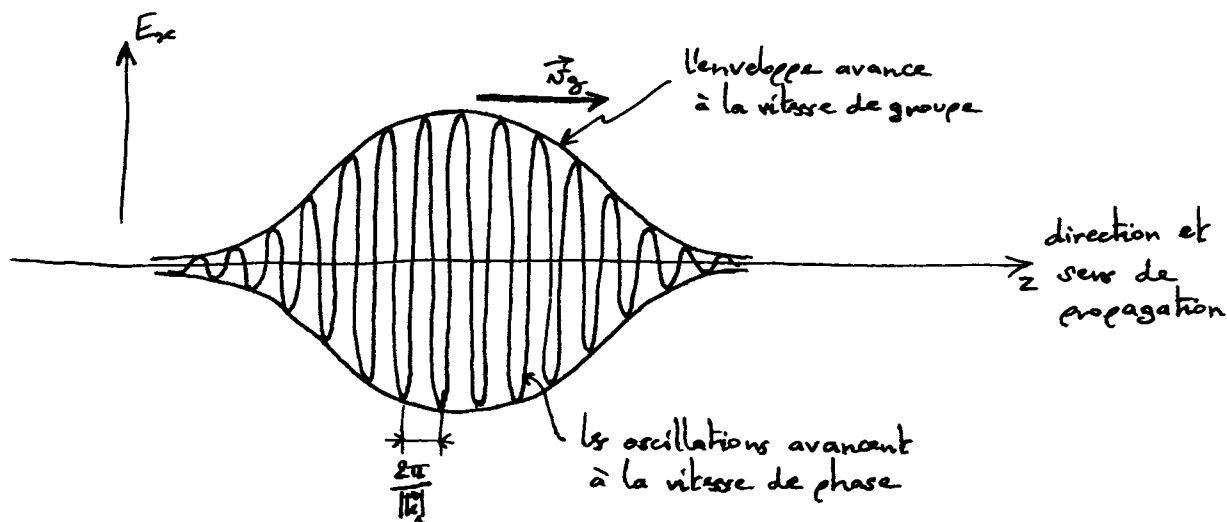
paquet d'ondes: il s'agit d'une onde de la forme $\text{Re} [A(\vec{r}, t) e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})}]$, $\omega_2 = \omega(\vec{k}_2)$,

dont l'enveloppe $A(\vec{r}, t)$ a une extension finie dans l'espace, et se déplace à la vitesse de

groupe $\vec{v}_g = \text{grad}_{\vec{k}} \omega \Big|_{\vec{k}=\vec{k}_2}$ (cf. annexe I). L'extension spatiale de cette enveloppe

est d'autant plus grande que la zone des valeurs non nulles de $\vec{g}(\vec{k})$ autour de

$\vec{k}=\vec{k}_2$ est plus étroite. (Dans le vide illimité, $|\vec{v}_g| = c$.)



(Schéma réalisé à t fixée)

② Électromagnétisme dans un milieu diélectrique linéaire, homogène, isotrope

Dans un milieu diélectrique, en l'absence de charge et de courant libres dans le matériau, le champ électromagnétique $\{\vec{E}(\vec{r},t), \vec{B}(\vec{r},t)\}$ suit les équations de Maxwell avec $\rho = \rho_{\text{pol}}$ et $\vec{J} = \vec{J}_{\text{pol}}$, où ρ_{pol} et \vec{J}_{pol} sont les densités de charge et de courant dues aux charges liées du diélectrique. Ces charges sont aussi appelées charges de polarisation. Dans une théorie macroscopique, où les champs considérés ^{en \vec{r}} résultent d'une moyenne sur un volume entourant \vec{r} grand à l'échelle microscopique et petit à l'échelle macroscopique^(*), ρ_{pol} et \vec{J}_{pol} sont reliés au vecteur polarisation $\vec{P}(\vec{r},t)$ (qui est la densité volumique de moments dipolaires) par $\rho_{\text{pol}} = -\text{div} \vec{P}$ et $\vec{J}_{\text{pol}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$.

En régime harmonique à la pulsation ω , avec $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t}$ et des notations similaires pour tous les autres champs, les équations de Maxwell s'écrivent:

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -i\omega \vec{B}, \quad \text{div} \vec{D} = 0, \quad \text{div} \vec{B} = 0, \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} = i\omega \mu_0 \vec{D},$$

où l'on a introduit le champ $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, appelé parfois déplacement électrique.

(*) L'échelle microscopique est, dans un solide, la distance interatomique $d_{\text{at}} \sim \text{Å}$; l'échelle macroscopique est la longueur d'onde $\lambda_0 \sim \mu\text{m}$ (pour le visible). La théorie macroscopique est possible car $d_{\text{at}} \ll \lambda_0$.

1) Milieu diélectrique linéaire et isotrope

La relation constitutive d'un milieu diélectrique linéaire et isotrope est

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t), \text{ où } \chi(\vec{r}) \text{ est la } \underline{\text{susceptibilité diélectrique}}. \text{ On a alors}$$

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon_r(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t), \text{ où } \epsilon_r(\vec{r}) = 1 + \chi(\vec{r}) \text{ est la } \underline{\text{permittivité relative}} \text{ du}$$

milieu (appelée aussi constante diélectrique). Il est usuel de définir l'indice de réfraction $n(\vec{r})$ du milieu par $\epsilon_r = n^2$. Le milieu diélectrique linéaire et isotrope est caractérisé, de la même façon, par $\chi(\vec{r})$ ou $\epsilon_r(\vec{r})$ ou $n(\vec{r})$.

Les équations de Maxwell dans un tel milieu prennent la forme :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -i\omega \vec{B}, \quad \text{div}(\epsilon_r(\vec{r}) \vec{E}) = 0, \quad \text{div} \vec{B} = 0, \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} = i\omega \frac{\epsilon_r(\vec{r})}{c^2} \vec{E}.$$

Ces équations impliquent que $\vec{E}(\vec{r})$ suive l'équation de Helmholtz approchée :

$$\Delta \vec{E} + k_0^2 n(\vec{r})^2 \vec{E} \approx 0, \text{ lorsque } \epsilon_r(\vec{r}) \text{ varie lentement dans l'espace}^{(*)}. \text{ (On a utilisé la notation } k_0 = \frac{\omega}{c}.)$$

2) Onde plane progressive monochromatique dans un milieu diélectrique

linéaire, homogène, isotrope

Si, en plus d'être linéaire et isotrope, le milieu diélectrique a la propriété d'être homogène, alors la susceptibilité χ , la constante diélectrique ϵ_r et l'indice

(*) En toute rigueur, $\Delta \vec{E} + k_0^2 \epsilon_r(\vec{r}) \vec{E} = -\vec{\text{grad}} \left(\frac{\text{grad} \epsilon_r}{\epsilon_r} \cdot \vec{E} \right)$.

de réfraction n sont des constantes indépendantes de l'espace. Dans un tel milieu, les équations de Maxwell prennent la forme :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -i\omega \vec{B}, \quad \text{div} \vec{E} = 0, \quad \text{div} \vec{B} = 0, \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} = i\omega \frac{n^2}{c^2} \vec{E}.$$

Formellement, il s'agit des mêmes équations que celles rencontrées dans le vide, la vitesse c y étant remplacée par c/n (cf. § A).

Le champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ suit donc l'équation de Helmholtz $\Delta \vec{E} + k_0^2 n^2 \vec{E} = 0$.

Une onde plane progressive $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ admet ainsi la relation de

dispersion $|\vec{k}| = k_0 n = n \frac{\omega}{c}$; sa vitesse de phase est $v_p = \frac{\omega}{|\vec{k}|} = \frac{c}{n}$, et sa

longueur d'onde vaut $\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|} = \frac{\lambda_0}{n}$. La structure de l'onde est TEM, et

le champ magnétique est lié au champ électrique par $\vec{B} = \frac{n}{c} \hat{u} \times \vec{E}$, avec

$\hat{u} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ le vecteur unitaire suivant la direction et le sens de propagation.

3) Dispersion - Vitesse de groupe

Un milieu diélectrique est en général dispersif : son indice de réfraction n

dépend de la pulsation ω , et il en est donc de même de la vitesse de phase

$\frac{c}{n(\omega)}$. La vitesse de groupe, à laquelle se déplace un paquet d'ondes, est (§§ A-2)

$$\vec{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_j} \hat{u}_j \quad \text{avec } j = x, y \text{ ou } z, \text{ c'est-à-dire, puisque } \frac{\partial k}{\partial k_j} = \frac{k_j}{k} \quad (k = |\vec{k}|),$$

$$\vec{v}_g = v_g \hat{u} \quad \text{avec } v_g = \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right)^{-1}. \quad \text{Avec } k = n(\omega) \frac{\omega}{c}, \text{ il vient}$$

$\frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{n}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega}$, soit, en faisant intervenir la longueur d'onde dans le vide

$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$ d'une onde plane progressive de pulsation ω : $\frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{n}{c} - \frac{\lambda_0}{c} \frac{dn}{d\lambda_0}$; la

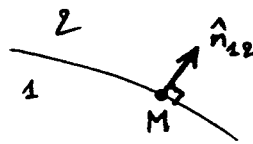
vitesse de groupe prend finalement l'expression $v_g = \frac{c}{N}$, où l'on a posé

$N = n - \lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0}$; N est appelé indice de groupe.

Ⓒ Discontinuités du champ électromagnétique sur un dioptre

On considère deux milieux adjacents 1 et 2 sans propriété magnétique.

Les équations de Maxwell imposent des relations de discontinuité^(*) pour le champ électromagnétique à la traversée du dioptre entre les deux milieux.



Soit M un point du dioptre et \hat{n}_{12} le vecteur unitaire normal au dioptre en M , orienté du milieu 1 vers le milieu 2. Les relations de

discontinuité sont : $\vec{E}_{2//} = \vec{E}_{1//}$ $\vec{D}_{2\perp} - \vec{D}_{1\perp} = \sigma_L \hat{n}_{12}$

$$\vec{B}_{2\perp} = \vec{B}_{1\perp} \quad \vec{B}_{2//} - \vec{B}_{1//} = \mu_0 \vec{J}_L \times \hat{n}_{12},$$

où l'indice // désigne la composante tangentielle au dioptre en M et

l'indice \perp la composante normale (ie suivant \hat{n}_{12}) ; σ_L et \vec{J}_L sont les

densités^{surf} de charge libre et de courant libre en M .

(*) Ces relations sont aussi appelées relations de passage.

1) Dioptre métal - vide

Si le milieu 1 est un métal parfait, alors $\vec{E}_1 = 0$, $\vec{D}_1 = 0$ et $\vec{B}_1 = 0$ en son intérieur. Si le milieu 2 est le vide, alors $\vec{D}_2 = \epsilon_0 \vec{E}_2$.

Ainsi, les relations de discontinuité prennent la forme :

$$\vec{E}_{2//} = 0, \quad \vec{E}_{2\perp} = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0} \hat{n}_{12}, \quad \vec{B}_{2\perp} = 0, \quad \vec{B}_{2//} = \mu_0 \vec{J}_f \times \hat{n}_{12}.$$

2) Dioptre entre deux milieux diélectriques linéaires et isotropes

Si les milieux 1 et 2 sont des diélectriques linéaires et isotropes, de permittivités relatives $\epsilon_{r1}(\vec{r})$ et $\epsilon_{r2}(\vec{r})$, la relation de discontinuité portant sur le vecteur \vec{D} devient : $\epsilon_{r2}(M) \vec{E}_{2\perp} - \epsilon_{r1}(M) \vec{E}_{1\perp} = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0} \hat{n}_{12}$.

En l'absence de charge libre et de courant libre sur le dioptre, les relations de discontinuité sont : $\vec{E}_{2//} = \vec{E}_{1//}$, $\epsilon_{r2} \vec{E}_{2\perp} = \epsilon_{r1} \vec{E}_{1\perp}$, $\vec{B}_2 = \vec{B}_1$.

Annexe I

1) Développement d'un champ électromagnétique sur les ondes planes progressives

monochromatique

En raisonnant sur les composantes cartésiennes, on peut écrire

$$E_j(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{E}_j(\vec{k}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}, \text{ où } \tilde{E}_j(\vec{k}, t) \text{ est la transformée de Fourier}$$

spatiale du champ électrique $E_j(\vec{r}, t)$ ($j = x, y$ ou z). Les équations de Maxwell

dans le vide imposent l'équation d'onde $\Delta E_j - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_j}{\partial t^2} = 0$, soit :

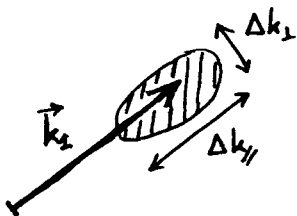
$$\frac{\partial^2 \tilde{E}_j}{\partial t^2} + \omega^2 \tilde{E}_j = 0 \text{ avec } \omega = |\vec{k}|c, \text{ d'où } \tilde{E}_j(\vec{k}, t) = g_{1j}(\vec{k}) e^{i\omega t} + g_{2j}(\vec{k}) e^{-i\omega t}.$$

Or $\tilde{E}_j(-\vec{k}, t) = \tilde{E}_j(\vec{k}, t)^*$ du fait que $E_j(\vec{r}, t)$ est réel, donc $g_{1j}(\vec{k}) = g_{2j}(-\vec{k})^*$.

Finalement, en posant $g_j(\vec{k}) = 2g_{1j}(\vec{k})$, il vient $E_j(\vec{r}, t) = \mathcal{R}e \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} g_j(\vec{k}) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right]$.

2) Paquet d'ondes

On suppose que $g_j(\vec{k})$ ne prend des valeurs notables qu'au voisinage d'un vecteur d'onde \vec{k}_1 (zone hachurée de la figure). En notant $\Psi_j(\vec{k})$ l'argument de



$g_j(\vec{k})$, le développement précédent de $E_j(\vec{r}, t)$ s'écrit :

$$E_j(\vec{r}, t) = \mathcal{R}e \left\{ e^{i(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |g_j(\vec{k})| e^{i[(\omega - \omega_1)t - (\vec{k} - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} + \Psi_j]} \right\}.$$

En développant $\omega(\vec{k})$ et $\Psi_j(\vec{k})$ au voisinage de \vec{k}_1 , l'argument de l'intégrand

(*) Dans un diélectrique linéaire, homogène et isotrope, c est remplacé par c/n .

devient $(\vec{k} - \vec{k}_1) \cdot \left[\vec{\text{grad}}_{\vec{k}} \omega \Big|_{\vec{k}_1} t - \vec{r} + \vec{\text{grad}}_{\vec{k}} \varphi \Big|_{\vec{k}_1} \right]$. L'intégrale est donc

maximale en $\vec{r} = \vec{\text{grad}}_{\vec{k}} \omega \Big|_{\vec{k}_1} t + \vec{\text{grad}}_{\vec{k}} \varphi \Big|_{\vec{k}_1}$: le centre du paquet d'ondes se déplace à la vitesse $\vec{v}_g = \vec{\text{grad}}_{\vec{k}} \omega \Big|_{\vec{k}_1}$, appelée vitesse de groupe.

De plus, d'après les propriétés de la transformée de Fourier, le paquet d'ondes possède une extension spatiale $\sim \frac{1}{\Delta k_y}$ suivant la direction de propagation donnée par \vec{k}_1 , et une extension $\sim \frac{1}{\Delta k_x}$ dans une direction transverse.

3) Polarisation d'une onde plane progressive

Une onde plane progressive de pulsation ω a pour vecteur d'onde \vec{k} , dont la direction et le sens définissent l'axe z des coordonnées cartésiennes ; on a donc $\vec{k} = k_0 \hat{u}_z$ ^(dans le vide) et le champ électrique de l'onde, $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_0 z)}$, n'a de composantes que suivant x et y , notées E_{0x} et E_{0y} (cf. § A-1).

a) Si une seule des composantes E_{0x} ou E_{0y} est non nulle, l'onde est polarisée linéairement. L'onde est également polarisée linéairement si E_{0x} et E_{0y} sont non nuls tous les deux, à condition qu'ils soient en phase ou en opposition de phase.

b) Si les composantes E_{0x} et E_{0y} sont de même amplitude et en quadrature, l'onde est polarisée circulairement : dans un plan $z = ct$, l'extrémité du champ

électrique $\vec{E} = \text{Re}(\vec{E})$ décrit un cercle au cours du temps. La polarisation est circulaire positive si $\dot{E}_{0y} = -i \dot{E}_{0x}$ (le cercle en question est décrit dans le sens direct), et circulaire négative si $\dot{E}_{0y} = i \dot{E}_{0x}$ (le cercle est décrit dans le sens indirect).

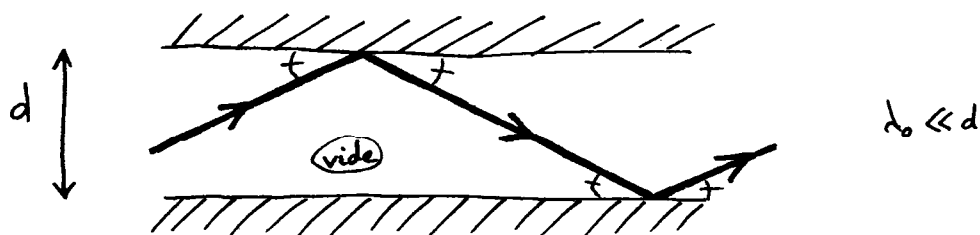
c) Si les composantes \dot{E}_{0x} et \dot{E}_{0y} sont en quadrature mais n'ont pas la même amplitude, l'onde est polarisée elliptiquement: ^(l'extrémité du) champ électrique

$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E})$ décrit une ellipse dont les axes principaux sont suivant x et y .

La polarisation de l'onde est également elliptique lorsque le déphasage entre \dot{E}_{0x} et \dot{E}_{0y} n'est ni 0 ni π ni $\pm \frac{\pi}{2}$, quel que soit le rapport entre les amplitudes $|\dot{E}_{0x}|$ et $|\dot{E}_{0y}|$; les axes principaux de l'ellipse sont alors obliques dans les axes x, y .

II - Introduction au guidage des ondes électromagnétiques

Deux miroirs ^{dans} infinis et parallèles, séparés par le vide, forment un guide de lumière parfait. En effet, dans un point de vue optique géométrique - licite lorsque la longueur d'onde λ_0 dans ^{l'espace libre} est petite devant la



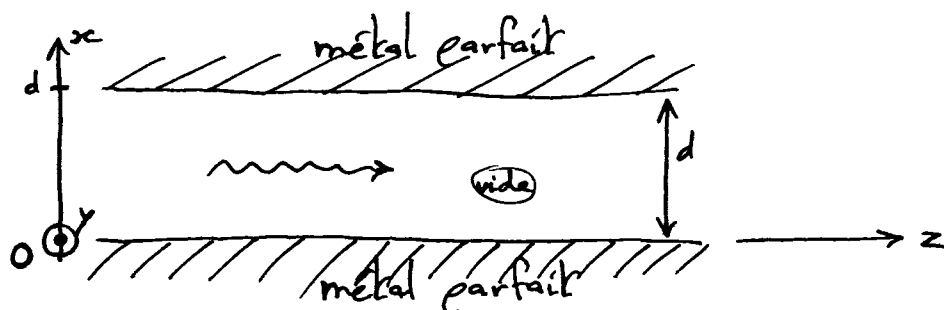
distance d entre les miroirs -, un rayon lumineux se réfléchit d'un miroir à l'autre, sans perte d'intensité si les miroirs sont parfaits. Il zigzague en restant dans un plan, et s'éloigne indéfiniment dans une direction parallèle aux miroirs. Son inclinaison par rapport aux miroirs reste constamment la même.

Ce chapitre traite, dans une approche électromagnétique, de ce type de guidage, bien qu'il ne soit pas utilisé pour guider les ondes optiques ($400 \text{ nm} < \lambda_0 < 700 \text{ nm}$ pour les ondes lumineuses visibles). Cependant, l'intérêt de ce type de guidage est double : d'une part, il fournit un bon exemple introductif au guidage des ondes électromagnétiques grâce à son traitement

formel simple, et d'autre part il est utilisé couramment pour guider les ondes électromagnétiques appartenant au domaine micro-onde ($\lambda_0 \sim 1 \text{ cm}$), les miroirs étant alors constitués de plans métalliques.

① Guidage par deux miroirs parallèles

On considère deux plans métalliques parfaits, infinis et parallèles, séparés par une épaisseur d de vide. Les axes cartésiens x , y et z sont choisis de la façon indiquée sur la figure.



a) Une onde plane progressive de pulsation ω , polarisée orthogonalement aux plans métalliques, peut se propager entre les plans, suivant z . Dans le vide ($0 < x < d$), le champ électrique de cette onde est (*) $\vec{E}(z) = \hat{u}_x E_0 e^{-ik_0 z}$ ($k_0 = \frac{\omega}{c}$) et son champ magnétique vaut $\vec{B}(z) = \frac{1}{c} \hat{u}_z \times \vec{E}(z) = \hat{u}_y \frac{E_0}{c} e^{-ik_0 z}$. Les miroirs métalliques étant supposés parfaits, les champs électrique et magnétique sont nuls en leur intérieur (c'est-à-dire pour $x < 0$ et pour $x > d$); les discontinuités normales de \vec{E} en $x=0$ et $x=d$ imposent la présence

(*) cf. chapitre I, § A-1.

d'une densité de charge surfacique sur les plans métalliques, et les discontinuités tangentielles de \vec{B} impliquent la présence d'une densité surfacique de courant sur les mêmes plans^(*). Pour la polarisation orthogonale aux plans métalliques, tout se passe donc, du point de vue de l'onde électromagnétique, comme dans le vide illimité.

b) La situation est tout autre si l'on considère la polarisation parallèle aux plans métalliques. En effet, une onde plane progressive, polarisée linéairement suivant \hat{y} , ne peut pas se propager dans le guide plan métallique : son champ électrique $\vec{E}(z) = \hat{y} \frac{\epsilon}{\epsilon_0} e^{-ikz}$, uniforme dans un plan d'onde $z = Cte$, ne s'annule pas sur les plans métalliques et viole donc la loi de continuité de la composante tangentielle du champ électrique à la frontière entre deux milieux^(**). (De même, le champ magnétique de cette onde, $\vec{B}(z) = -\frac{\epsilon}{c} \hat{x} e^{-ikz}$, normal aux plans métalliques, ne s'annule pas sur ces plans, comme il le devrait.) Donc, en polarisation parallèle aux plans métalliques, la présence des plans émet des contraintes sur la structure de l'onde, et il faut chercher, dans le guide, une onde progressive d'un autre genre que l'onde plane progressive TEM qui existe dans le vide illimité.

(*) cf. chapitre I, § C-1.

1) Modos de propagación TE

a) Une onde progressive dans le guide métallique, polarisée parallèlement aux plans, est cherchée sous la forme : $\vec{E}(x, z) = \hat{u}_y \Sigma_0(x) e^{-i\beta z}$,
l'amplitude $\Sigma_0(x)$ du champ électrique s'annulant en $x=0$ et en $x=d$. La constante β , réelle > 0 , est appelée constante de propagation.

Dans le vide ($0 < x < d$), $\vec{E}(x, z)$ suit l'équation de Helmholtz (cf. § I-A) :

$$\Delta \vec{E} + k_0^2 \vec{E} = 0, \text{ soit : } \Sigma_0''(x) + (k_0^2 - \beta^2) \Sigma_0(x) = 0. \text{ Dans le cas où}$$

$\beta = k_0$, $\Sigma_0(x) = \beta_1 x + \beta_2$ (β_1 et β_2 sont des constantes) et les conditions aux

limites imposent $\Sigma_0(x) = 0$: on retrouve que l'onde plane n'est pas solution du

problème. De même, l'éventualité $\beta > k_0$ est impossible : $\Sigma_0(x)$ vaudrait alors

$$\Sigma_0(x) = \beta_1 \operatorname{sh} \sqrt{\beta^2 - k_0^2} x + \beta_2 \operatorname{ch} \sqrt{\beta^2 - k_0^2} x, \text{ et serait réduit à zéro par les}$$

conditions aux limites $\Sigma_0(x=0) = \Sigma_0(x=d) = 0$.

La seule possibilité restante est $\beta < k_0$, dans laquelle $\Sigma_0(x)$ s'écrit

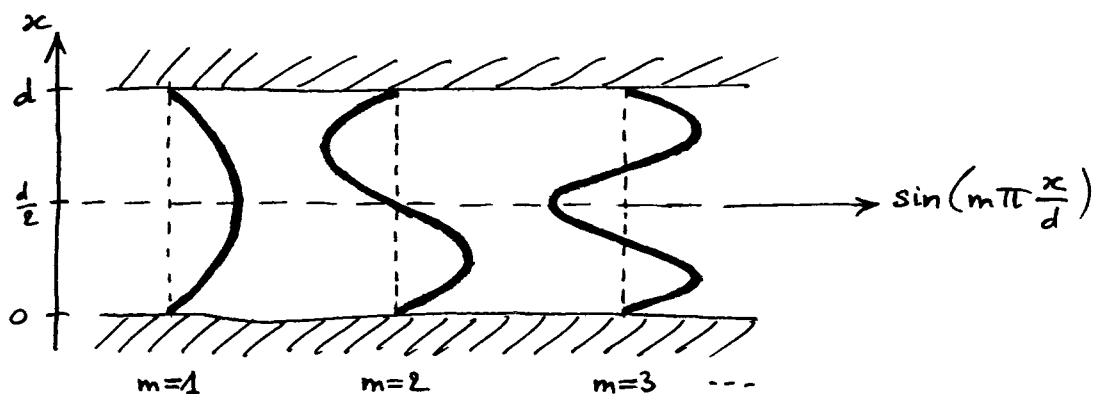
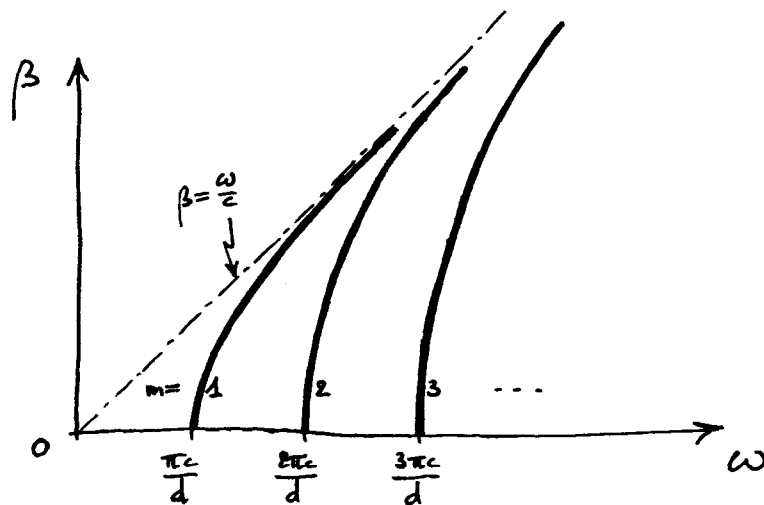
$$\Sigma_0(x) = \beta_1 \sin \sqrt{k_0^2 - \beta^2} x + \beta_2 \cos \sqrt{k_0^2 - \beta^2} x. \text{ Les conditions aux limites en } x=0 \text{ et}$$

en $x=d$ imposent respectivement $\beta_2 = 0$ et $\beta_1 \sin \sqrt{k_0^2 - \beta^2} d = 0$; des

solutions $\Sigma_0(x)$ ^{non nulles} sont obtenues (*) pour $\sqrt{k_0^2 - \beta^2} = m \frac{\pi}{d}$, $m=1, 2, 3, \dots$.

(*) De l'équation de Maxwell $\operatorname{rot} \vec{E} = -i\omega \vec{B}$, on tire $B_x(x, z) = -\frac{\beta}{\omega} \Sigma_0(x) e^{-i\beta z}$: la composante normale du champ magnétique s'annule bien aussi en $x=0$ et $x=d$.

À une valeur de m correspond un mode de propagation, défini par l'amplitude $E_0^{(m)}(x) = A_1 \sin(m\pi \frac{x}{d})$ et la relation de dispersion associée $\beta_m = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - m^2 \frac{\pi^2}{d^2}}$. Comme le champ électrique est orthogonal à la direction de propagation z , et que cela n'est pas le cas du champ magnétique qui possède une composante ^{non nulle} suivant z (ce qui se montre avec l'équation $\text{rot } \vec{E} = -i\omega \vec{B}$), ces modes de propagation sont dits TE, pour transverses électriques. Les relations de dispersion et les structures spatiales des premiers modes TE_m sont représentées ci-dessous.



L'amplitude $\sum_0^{(m)}(x)$ du mode m s'annule $m-1$ fois ^{suivant x} , dans l'espace vide entre les plans métalliques. Les modes de m impair sont symétriques par rapport au plan médian $x = d/2$; les modes de m pair sont antisymétriques.

b) Le nombre de modes TE est fini et vaut $E\left(\frac{\omega}{\frac{\pi c}{d}}\right) \sqrt{E(\dots)}$ (la partie entière de ...). Si la pulsation de l'onde est assez faible pour que $\omega < \frac{\pi c}{d}$ ^(ici $\lambda_0 > 2d$), alors aucun mode TE n'existe; $\frac{\pi c}{d}$ est la pulsation de coupure du guide d'onde métallique plan. (Ex.: pour $d = 1,5$ cm, $\lambda_0^{\text{coupure}} = 3$ cm et $\nu_{\text{coupure}} = 10$ GHz.)

c) Le champ électrique physique dans le mode TE_m est (avec $\theta_1 = |\theta_1| e^{i\psi_1}$):

$$E_y^{(m)}(x, z, t) = |\theta_1| \sin(m\pi \frac{x}{d}) \cos(\omega t - \beta_m z + \psi_1);$$

il possède un caractère stationnaire suivant x et se propage suivant z avec la vitesse de phase

$$v_p^{(m)} = \frac{\omega}{\beta_m} = c \left[1 - \left(\frac{m\pi c}{\omega d} \right)^2 \right]^{-1/2} (*).$$

$$v_g^{(m)} = \frac{d\omega}{d\beta_m} = c \left[1 - \left(\frac{m\pi c}{\omega d} \right)^2 \right]^{+1/2}.$$

d) Finalement, la recherche d'une onde électromagnétique ^{admissée suivant θ_y} se propageant dans le guide, en a fourni plusieurs (les modes TE_m). La linéarité des équations de Maxwell permet d'écrire l'onde la plus générale se propageant dans le guide avec une polarisation parallèle aux plans métalliques, comme une superposition d'ondes TE_m :

$$E_y(x, z) = \sum_m a_m \sin(m\pi \frac{x}{d}) e^{-i\beta_m z}.$$

(* La longueur d'onde dans le guide est $\lambda^{(m)} = 2\pi/\beta_m = \lambda_0 / \sqrt{1 - (m \frac{\lambda_0}{2d})^2}$.

2) Interprétation des modes TE

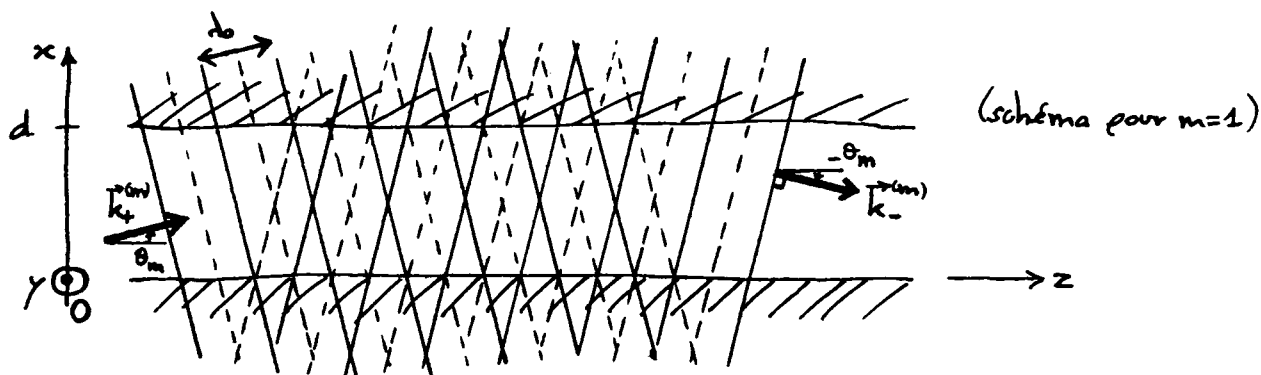
a) En utilisant $\sin u = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}$, le champ électrique dans le mode TE_m

$$\text{s'écrit } \vec{E}_y^{(m)}(x, z) = \beta_1 \sin\left(m\pi \frac{x}{d}\right) e^{i\beta_m z} = \frac{-\beta_1}{2i} e^{-ik_+ \cdot \vec{r}} + \frac{\beta_1}{2i} e^{-ik_- \cdot \vec{r}}, \text{ avec}$$

$$\vec{k}_\pm^{(m)} = \pm m \frac{\pi}{d} \hat{u}_x + \beta_m \hat{u}_z : \text{ le mode } TE_m \text{ est la somme d'une onde plane de}$$

vecteur d'onde $\vec{k}_+^{(m)}$ et d'une autre de vecteur d'onde $\vec{k}_-^{(m)}$. Ces ondes planes

se propagent dans le vide et, comme il se doit, $|\vec{k}_+^{(m)}| = |\vec{k}_-^{(m)}| = k_0$. $\vec{k}_+^{(m)}$ et



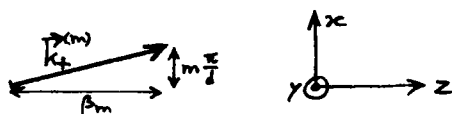
$\vec{k}_-^{(m)}$ sont dans le plan zx , et font un angle θ_m et $-\theta_m$ avec l'axe

$$z, \theta_m \text{ étant défini par } \sin \theta_m = \frac{(m\pi/d)}{k_0}, \quad 0 < \theta_m < \frac{\pi}{2}. \quad (*)$$

Les amplitudes relatives des deux ondes planes assurent que $\vec{E}_y^{(m)}(x, z)$ s'annule en $x=0$, et les valeurs quantifiées de θ_m font que $\vec{E}_y^{(m)}$ est bien nul également

en $x=d$. La nécessité que $\frac{(m\pi/d)}{k_0} < 1$ redonne le nombre de modes TE,

$$E\left(\frac{\omega d}{\pi c}\right).$$



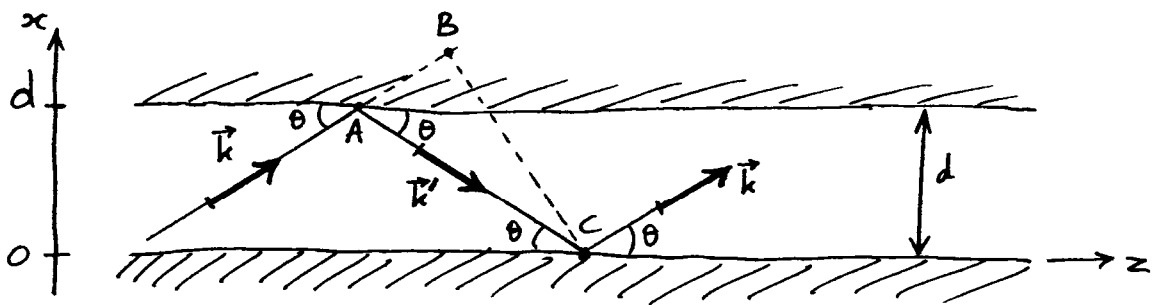
b) En outre, la condition de quantification des angles θ_m assure qu'une onde plane entrant dans le guide métallique avec un vecteur d'onde faisant

(*) Dans ce cadre, la relation de dispersion s'écrit $\beta_m = k_0 \cos \theta_m$.

l'un de ces angles avec z , subit des réflexions multiples cohérentes à l'intérieur du guide. En effet, une onde plane de vecteur d'onde

$\vec{k} = k_0 \sin \theta \hat{e}_x + k_0 \cos \theta \hat{e}_z$ ($\theta > 0$) se réfléchit sur le plan métallique

$x = d$, ce qui crée une onde plane de vecteur d'onde $\vec{k}' = -k_0 \sin \theta \hat{e}_x + k_0 \cos \theta \hat{e}_z$;



cette dernière se réfléchit à son ^{tour} en $x=0$ pour donner une onde plane de vecteur d'onde \vec{k} , et ainsi de suite. La troisième onde est identique à la première si leur déphasage est un multiple de 2π . On a donc la

condition d'auto-cohérence : $(\pi + k_0 AC + \pi) - k_0 AB = q 2\pi$, q entier (les termes π proviennent des déphasages dus à la réflexion métallique parfaite).

On calcule $AC - AB = \frac{d}{\sin \theta} - \frac{d \cos 2\theta}{\sin \theta} = 2d \sin \theta$, et la condition d'auto-

cohérence s'écrit $k_0 2d \sin \theta_m = 2\pi m^{(*)}$, $m = 1, 2, 3, \dots$; \vec{k} vaut alors $\vec{k}_+^{(m)}$,

\vec{k}' est $\vec{k}_-^{(m)}$, et l'on retrouve les deux ondes planes identifiées au § a, dont

la somme donne le mode TE_m .

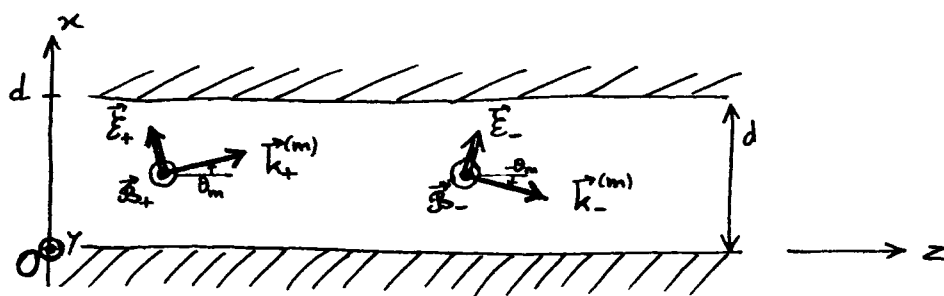
Si l'angle θ ne coïncide avec aucun angle θ_m , les ondes dans le

(*) C'est la relation déjà trouvée au § a.

guide, issus des réflexions métalliques multiples, interfèrent destructivement et la propagation le long du guide ne se réalise pas.

3) Modes de propagation TM

L'analyse ^{faite} au paragraphe 2 précédent montre qu'il existe une autre classe d'ondes électromagnétiques se propageant le long du guide plan métallique : celles qui sont la somme de deux ondes planes de vecteurs d'onde \vec{k}_+ et \vec{k}_- , polarisées maintenant dans le plan xz . Chacune de



ces deux ondes a son champ magnétique $\vec{B}_{\pm} = \frac{1}{c} \frac{\vec{k}_{\pm}^{(m)}}{k_0} \times \vec{E}_{\pm}$ suivant y ,

ie orthogonal à la direction de guidage z ; pour cette raison, les nouveaux ^{de propagation} modes en question sont appelés TM, pour transverses magnétiques.

Les champs électriques \vec{E}_+ et \vec{E}_- des deux ondes planes possèdent une composante suivant \hat{u}_z , parallèle aux plans métalliques. Dans le mode TM_m , la composante z

du champ électrique : $\Sigma_z^{(m)}(x,z) = \Sigma_{+z} e^{-i\vec{k}_+ \cdot \vec{r}} + \Sigma_{-z} e^{-i\vec{k}_- \cdot \vec{r}}$, doit être nulle

sur le plan $x=0$, d'où $\Sigma_{-z} = -\Sigma_{+z}$; l'annulation de $\Sigma_z^{(m)}(x,z)$ en $x=d$

est alors assurée par $k_0 \sin \theta_m = m \frac{\pi}{d}$. En posant $\vec{\Sigma}_- = \hat{e}_0 \hat{y} \times \frac{\vec{k}_-^{(m)}}{k_0}$, soit

$\vec{E}_- = \hat{e}_0 \sin \theta_m \hat{z} + \hat{e}_0 \cos \theta_m \hat{x}$, il vient $\vec{E}_+ = -\hat{e}_0 \sin \theta_m \hat{z} + \hat{e}_0 \cos \theta_m \hat{x}$, et on a

$$E_z^{(m)}(x, z) = \beta \sin \theta_m \sin(m\pi \frac{x}{d}) e^{-i\beta_m z} \quad (\beta = 2\hat{e}_0)$$

pour la composante z du champ électrique, la composante x étant

$$E_x^{(m)}(x, z) = i\beta \cos \theta_m \cos(m\pi \frac{x}{d}) e^{-i\beta_m z}.$$

Le mode TM_m possède la même relation de dispersion $\beta_m = k_0 \cos \theta_m$ que le mode TE_m , et donc la même vitesse de phase et la même vitesse de groupe. Il y a autant de modes TM que de modes TE (il faut toutefois ajouter le mode $TM_{m=0}$, qui est l'onde plane TEM introduite au § A-a).

B) Guide à section rectangulaire

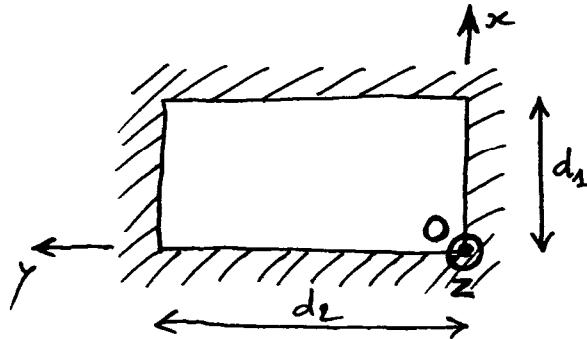
Le guide plan métallique étudié au § A confine le champ électromagnétique dans une seule direction transverse (suivant x), tout en le guidant suivant la direction de l'axe z . Un guide d'onde métallique réel a une section rectangulaire ou circulaire^(*), et assure un confinement du champ électromagnétique dans deux directions de l'espace. Cette partie s'attache à l'étude des modes de propagation d'un guide métallique à section rectangulaire.

(*) Le cas du guide métallique cylindrique est abordé en exercice.

1) Principe de la recherche des modes

Le champ électromagnétique guidé dans le guide métallique à section rectangulaire, est cherché sous la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(x, y) e^{-i\beta z}, \quad \vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_0(x, y) e^{-i\beta z}.$$



Il suit les équations de Maxwell (cf. § I-A) :

$$(i) \vec{\text{rot}} \vec{E} = -i\omega \vec{B}; \quad (ii) \text{div} \vec{E} = 0; \quad (iii) \text{div} \vec{B} = 0; \quad (iv) \vec{\text{rot}} \vec{B} = i \frac{\omega}{c^2} \vec{E}.$$

Les équations (ii) et (iii) ne seront pas exploitées, car elles sont vérifiées lorsque

(i) et (iv) le sont. Ces deux équations (i) et (iv) permettent (cf. annexe I) :

- d'une part, d'exprimer linéairement les composantes transverses $\vec{E}_{0x}, \vec{E}_{0y}, \vec{B}_{0x}, \vec{B}_{0y}$ en fonction des dérivées premières de \vec{E}_{0z} et \vec{B}_{0z} par rapport à x et y ;
- d'autre part, d'obtenir l'équation ^{de Helmholtz} suivie par les composantes longitudinales

$$\vec{E}_{0z} \text{ et } \vec{B}_{0z} : \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (k_0^2 - \beta^2) U = 0, \quad U = \vec{E}_{0z} \text{ ou } \vec{B}_{0z}.$$

Une onde électromagnétique guidée est ainsi entièrement déterminée par $\vec{E}_{0z}(x, y)$

et $\vec{B}_{0z}(x, y)$. La classe des solutions avec $\vec{E}_{0z} = 0, \vec{B}_{0z} \neq 0$ est constituée des

modes TE, et la classe avec $\mathcal{E}_z \neq 0$, $\mathcal{B}_z = 0$ est formée des modes TM. Une onde avec $\mathcal{E}_z \neq 0$ et $\mathcal{B}_z \neq 0$ sera la somme d'une onde TE et d'une onde TM.

2) Modes TE du guide rectangulaire

Dans un mode de propagation TE, le champ électrique est transverse: $\mathcal{E}_z = 0$.

La composante longitudinale du champ magnétique suit l'équation de Helmholtz

$$\frac{\partial^2 \mathcal{B}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{B}_z}{\partial y^2} + (k_0^2 - \beta^2) \mathcal{B}_z = 0, \text{ qui se résout par séparation } \overbrace{(\text{cf. annexe II})} \mathcal{B}_z \text{ prend}$$

la forme $\mathcal{B}_z(x, y) = f(x)g(y)$, les fonctions f et g suivant les équations

$$\text{différentielles } f''(x) + \alpha_1^2 f(x) = 0, \quad g''(y) + \alpha_2^2 g(y) = 0 \text{ avec}$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = k_0^2 - \beta^2; \quad f \text{ et } g \text{ sont donc}$$

$$f(x) = \mathcal{A}_1 \cos \sqrt{\alpha_1} x + \mathcal{A}'_1 \sin \sqrt{\alpha_1} x, \quad g(y) = \mathcal{A}_2 \cos \sqrt{\alpha_2} y + \mathcal{A}'_2 \sin \sqrt{\alpha_2} y.$$

Le champ électrique est donné par $\mathcal{E}_x \propto \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial y}$, $\mathcal{E}_y \propto -\frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial x}$.

L'annulation de \mathcal{E}_y en $x=0$ et en $x=d_1$ donne $\mathcal{A}'_1 = 0$ et $\sqrt{\alpha_1} d_1 = m_1 \pi$

(m_1 entier ≥ 0); celle de \mathcal{E}_x en $y=0$ et en $y=d_2$ fournit $\mathcal{A}'_2 = 0$ et

$\sqrt{\alpha_2} d_2 = m_2 \pi$ (m_2 entier ≥ 0). Finalement, le champ électrique dans le

$$\text{mode TE}_{m_1, m_2} \text{ est } \begin{cases} \mathcal{E}_x^{(m_1, m_2)}(x, y) = -\mathcal{A} \left(m_2 \frac{\pi}{d_2} \right) \cos \left(m_1 \pi \frac{x}{d_1} \right) \sin \left(m_2 \pi \frac{y}{d_2} \right) \\ \mathcal{E}_y^{(m_1, m_2)}(x, y) = \mathcal{A} \left(m_1 \frac{\pi}{d_1} \right) \sin \left(m_1 \pi \frac{x}{d_1} \right) \cos \left(m_2 \pi \frac{y}{d_2} \right); \end{cases}$$

la relation de dispersion associée est $\frac{\omega^2}{c^2} - \beta_{m_1, m_2}^2 = \left(m_1 \frac{\pi}{d_1} \right)^2 + \left(m_2 \frac{\pi}{d_2} \right)^2$.

($\mathcal{B}_x \propto \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial x}$ et $\mathcal{B}_y \propto \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial y}$ sont bien nuls en $x=0$ ou d_1 et $y=0$ ou d_2 , respectivement.)

Les modes du guide métallique rectangulaire sont ainsi repérés par deux nombres entiers m_1 et $m_2 \geq 0$ (qui ne peuvent être nuls en même temps). À l'exception des modes $TE_{m_1, m_2=0}$ et des modes $TE_{m_1=0, m_2}$, leur polarisation n'est pas uniforme dans un plan $z = \text{cte}$.

Comme attendu, la limite $d_z \rightarrow \infty$ redonne bien les modes TE_m du guide métallique plan (cf. § A-1). Par ailleurs, pour d_z fini, les modes $TE_{m_1, m_2=0}$ correspondent aux modes $TE_{m=m_1}$ du guide d'onde métallique plan.

3) Modes TM du guide rectangulaire

Dans un mode TM, $B_{0z} = 0$ et $E_{0z}(x, y)$ suit $\frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial y^2} + (k_0^2 - \beta^2) E_{0z} = 0$.

Sachant que $E_{0x} \propto \frac{\partial E_{0z}}{\partial x}$, $E_{0y} \propto \frac{\partial E_{0z}}{\partial y}$, la démarche suivie au § précédent fournit

$E_{0z}^{(m_1, m_2)}(x, y) = \beta \sin(m_1 \frac{\pi x}{d_1}) \sin(m_2 \frac{\pi y}{d_2})$. À l'aide des expressions exactes de

E_{0x} et E_{0y} en fonction de E_{0z} (cf. annexe II), on obtient :

$$\begin{cases} E_{0x}^{(m_1, m_2)}(x, y) = \frac{-i\beta m_1 m_2}{(m_1 \frac{\pi}{d_1})^2 + (m_2 \frac{\pi}{d_2})^2} (m_1 \frac{\pi}{d_1}) \beta \cos(m_1 \pi \frac{x}{d_1}) \sin(m_2 \pi \frac{y}{d_2}) \\ E_{0y}^{(m_1, m_2)}(x, y) = \frac{-i\beta m_1 m_2}{(m_1 \frac{\pi}{d_1})^2 + (m_2 \frac{\pi}{d_2})^2} (m_2 \frac{\pi}{d_2}) \beta \sin(m_1 \pi \frac{x}{d_1}) \cos(m_2 \pi \frac{y}{d_2}) \end{cases}$$

Le mode TM_{m_1, m_2} a la même relation de dispersion que le mode TE_{m_1, m_2} .

($B_{0x} \propto -\frac{\partial E_{0z}}{\partial y}$ et $B_{0y} \propto \frac{\partial E_{0z}}{\partial x}$ sont bien nuls en $x=0$ ou d_1 et $y=0$ ou d_2 , resp.)

Annexe II : Calculs sur le guide métallique rectangulaire

1) Modes du guide métallique rectangulaire

Une onde électromagnétique progressive dans le guide métallique à section rectangulaire, est cherchée sous la forme $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(x, y) e^{-i\beta z}$, $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_0(x, y) e^{-i\beta z}$; x, y, z sont les coordonnées cartésiennes introduites sur la figure du § B-1. Les équations de Maxwell $\text{rot } \vec{E} = -i\omega \vec{B}$ et $\text{rot } \vec{B} = i\frac{\omega}{c} \vec{E}$ s'écrivent ($k_0 = \frac{\omega}{c}$):

$$\left. \begin{array}{l} (1.a) \quad \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} + i\beta \tilde{E}_y = -ik_0 c \tilde{B}_x \\ (1.b) \quad -i\beta \tilde{E}_x - \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial x} = -ik_0 c \tilde{B}_y \\ (1.c) \quad \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} = -ik_0 c \tilde{B}_z \end{array} \right\} \begin{array}{l} (2.a) \quad \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y} + i\beta \tilde{B}_y = i\frac{k_0}{c} \tilde{E}_x \\ (2.b) \quad -i\beta \tilde{B}_x - \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x} = i\frac{k_0}{c} \tilde{E}_y \\ (2.c) \quad \frac{\partial \tilde{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{B}_x}{\partial y} = i\frac{k_0}{c} \tilde{E}_z \end{array}$$

(Les deux autres équations de Maxwell : $\text{div } \vec{E} = 0$, $\text{div } \vec{B} = 0$, n'apportent rien car les deux premières font que \vec{E} et \vec{B} sont des champs de rotations, donc sont à divergences nulles.) Les équations (1.a) et (2.b) permettent d'exprimer \tilde{B}_x et \tilde{E}_y en fonction de \tilde{E}_z et \tilde{B}_z ; de même, (1.b) et (2.a) conduisent aux expressions de \tilde{E}_x et \tilde{B}_y en fonction des mêmes quantités. On trouve:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_x = \frac{-i}{k_0^2 - \beta^2} \left\{ \beta \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial x} + k_0 c \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y} \right\} \\ \tilde{E}_y = \frac{-i}{k_0^2 - \beta^2} \left\{ \beta \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} - k_0 c \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x} \right\} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \tilde{B}_x = \frac{-i}{k_0^2 - \beta^2} \left\{ \beta \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x} - \frac{k_0}{c} \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} \right\} \\ \tilde{B}_y = \frac{-i}{k_0^2 - \beta^2} \left\{ \beta \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial y} + \frac{k_0}{c} \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial x} \right\}. \end{array} \right.$$

Injectées dans (1.c) et (2.c), ces expressions des composantes transverses conduisent aux équations ^{de Helmholtz} suivies par les composantes longitudinales E_z et B_z :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (k_0^2 - \beta^2) U = 0, \quad U = E_z \text{ ou } B_z.$$

Une onde guidée est donc déterminée entièrement par $E_z(\vec{r})$ et $B_z(\vec{r})$. Les conditions aux limites sur les plans métalliques du guide sélectionnent les solutions de l'équation précédente qui peuvent être retenues. Les solutions admissibles sont les modes de propagation cherchés (cf. § B.2 et § B.3).

2) Solution de l'équation pour E_z ou B_z

L'équation ^{de Helmholtz} suivie par E_z ou B_z se résout par séparation des variables. En

écrivant $U(\vec{r}) = f(x)g(y)e^{-i\beta z}$, il vient $f''(x)g(y) + f(x)g''(y) + (k_0^2 - \beta^2)f(x)g(y) = 0$,

soit $\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(y)}{g(y)} = -(k_0^2 - \beta^2)$. La dérivation de cette expression par rapport

à x ou à y montre que $\frac{f''(x)}{f(x)}$ et $\frac{g''(y)}{g(y)}$ sont des constantes, que l'on écrit

respectivement $-\alpha_1$ et $-\alpha_2$, avec la contrainte $\alpha_1 + \alpha_2 = k_0^2 - \beta^2$.

$f(x)$ et $g(y)$ suivent les équations différentielles $f''(x) + \alpha_1 f(x) = 0$ et

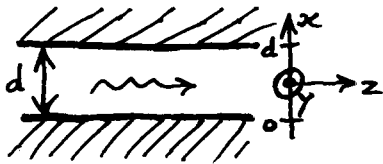
$g''(y) + \alpha_2 g(y) = 0$, dont les solutions oscillantes ($\alpha_1, \alpha_2 > 0$) sont

$$f(x) = \beta_1 \cos \sqrt{\alpha_1} x + \beta_1' \sin \sqrt{\alpha_1} x \quad \text{et} \quad g(y) = \beta_2 \cos \sqrt{\alpha_2} y + \beta_2' \sin \sqrt{\alpha_2} y.$$

(Si $\alpha_1 < 0$ ou $\alpha_2 < 0$, $\sqrt{\alpha_1}$ ou $\sqrt{\alpha_2}$ doivent être lus comme $i\sqrt{-\alpha_1}$ ou $i\sqrt{-\alpha_2}$.)

OPTIQUE GUIDÉE : TD II

1) Un champ électromagnétique polarisé suivant \hat{y} se propage dans un guide métallique plan ; son champ électrique est une superposition de modes TE :



$$E_y(x, z) = \sum_m a_m \sin(m\pi \frac{x}{d}) \exp(-i\beta_m z), \quad \beta_m = \sqrt{(\frac{\omega}{c})^2 - (\frac{m\pi}{d})^2}$$

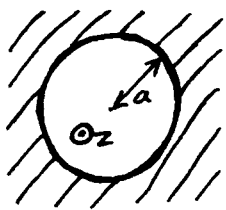
a) Trouver le champ magnétique $\vec{B}(x, z)$ associé.

b) Calculer le flux du vecteur de Poynting moyenné sur le

temps $\langle \vec{S} \rangle$, au travers d'une section droite du guide, de longueur L suivant y.

(On rappelle que l'on peut écrire $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E}(\vec{r})^* \times \vec{B}(\vec{r}))$ pour le vecteur de Poynting moyen associé au champ électromagnétique $\{\text{Re}(\vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t}), \text{Re}(\vec{B}(\vec{r})e^{i\omega t})\}$.)

2) On cherche les modes de propagation d'un guide métallique cylindrique de rayon a.



Le champ électromagnétique est $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(r, \varphi) e^{-i\beta z}$, $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_0(r, \varphi) e^{-i\beta z}$, où (r, φ, z) sont les coordonnées cylindriques d'un point intérieur au guide.

a) Dérivier des équations de Maxwell les expressions des composantes transverses $E_r, E_\varphi, B_r, B_\varphi$, en fonction des composantes longitudinales E_z et B_z , et montrer que E_z et B_z suivent l'équation $\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + (k_0^2 - \beta^2) U = 0$

$$(\text{rot } \vec{A} = [\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}] \hat{u}_r + [\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}] \hat{u}_\varphi + [\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}] \hat{u}_z)$$

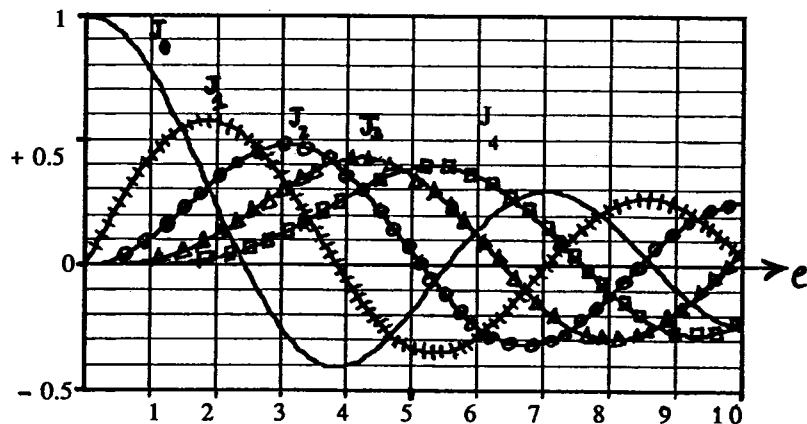
b) Rechercher les modes TM sous la forme $B_{z0} = 0$, $E_{z0}(r, \varphi) = f(r)g(\varphi)$. Montrer que $g(\varphi)$ est de la forme $g(\varphi) = A \cos b\varphi + B \sin b\varphi$, $b = 0, 1, 2, 3, \dots$; en supposant que $\beta < k_0$, montrer que la fonction $F(\rho)$ définie par $F(\rho) := f(r)$, $\rho := \sqrt{k_0^2 - \beta^2} r$, suit

l'équation de Bessel $F''(\rho) + \frac{1}{\rho} F'(\rho) + (1 - \frac{\rho^2}{e^2}) F(\rho) = 0$. La seule solution de cette équation ^{régulière en $\rho=0$} étant la fonction de Bessel de première espèce $J_b(\rho)$, conclure sur la forme

prise par $E_{z0}(r, \varphi)$. Enfin, tenir compte des conditions aux limites pour déterminer les modes de propagation TM.

c) Exécuter la même démarche pour trouver les modes TE.

Allure des fonctions
de Bessel de 1^{ère}
espèce $J_l(e)$,
pour $l=0, 1, 2, 3, 4$.

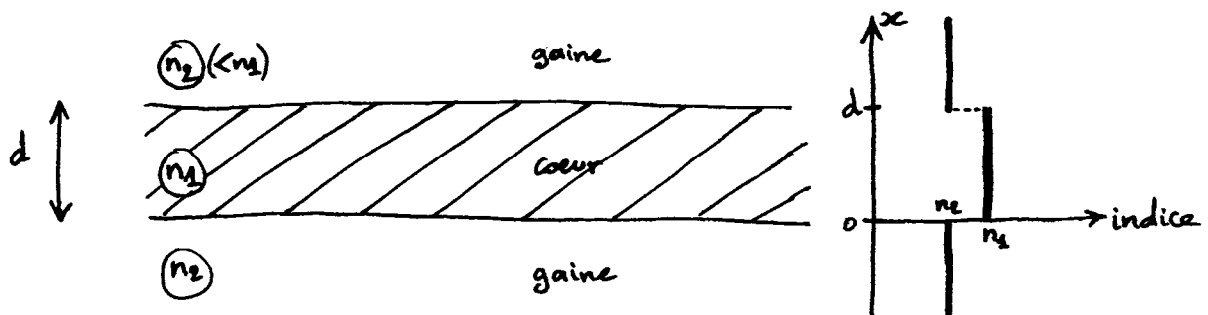


3) a) La relation de dispersion des modes TE d'un guide ^{métallique} plan est $\beta_m = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(m \frac{\pi}{d}\right)^2}$,
 $m=1, 2, 3, \dots$. En déduire que le nombre de modes TE est $\frac{2d}{\lambda_0}$ ($\lambda_0 \ll d$).

b) La relation de dispersion des modes TE d'un guide métallique de section rectangulaire
(côtés de longueurs d_1 et d_2) est $\beta_{m_1, m_2} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(m_1 \frac{\pi}{d_1}\right)^2 - \left(m_2 \frac{\pi}{d_2}\right)^2}$, $m_1, m_2 = 0, 1, 2, \dots$
($(m_1, m_2) = (0, 0)$ interdit). En déduire que le nombre de modes TE est $\pi \frac{d_1 d_2}{\lambda_0^2}$ ($\lambda_0 \ll d_1, d_2$).

III - Guides d'onde diélectriques

Une tranche d'un milieu diélectrique d'indice de réfraction n_1 , entourée d'un autre milieu d'indice de réfraction n_2 plus faible, est un guide d'onde, dans lequel la lumière est guidée par réflexion totale.



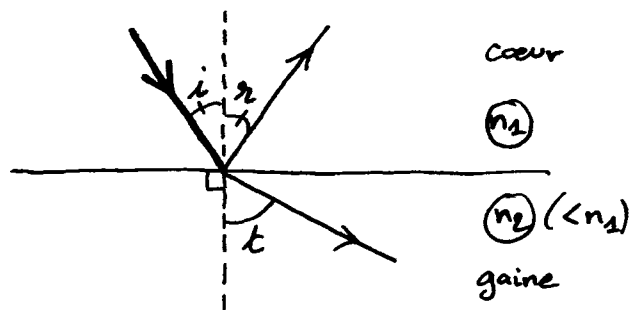
Dans le langage de la technologie des films minces, la tranche centrale guidante est dénommée "film", le milieu du dessous "substrat" et celui du dessus "couverture"; cette terminologie provient naturellement de la méthode d'élaboration d'une telle structure, dans laquelle la mince couche guidante est déposée (par évaporation, par ex.) sur un support d'indice n_2 , puis est recouverte. Ici, pour unifier le vocabulaire de ce cours, on appellera la couche guidante le cœur (core, en anglais) et le milieu qui l'entoure, la gaine optique (cladding, en anglais).

Ce chapitre traite de la propagation lumineuse dans ce guide diélectrique plan. Le cas du guide diélectrique à section rectangulaire sera également abordé. En outre, les fibres optiques, qui sont des guides diélectriques cylindriques, seront présentées dans un chapitre ultérieur (cf. chapitre V).

A) Guidage de la lumière par réflexion totale

Dans ce paragraphe, on se place dans le cadre de l'optique géométrique ; les considérations qui y sont faites seront donc valables dans la situation où $d \gg \lambda_0$ (plus précisément, $d \gg \lambda_0/n_1$).

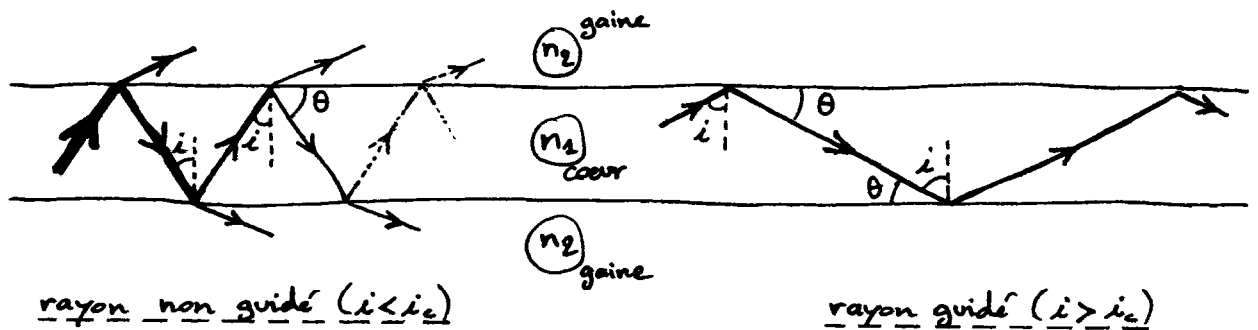
a) Lorsqu'un rayon lumineux se propageant dans le cœur rencontre l'interface cœur-gaine, il est pour partie réfléchi et pour l'autre partie transmis (ou réfracté).



Suivant les lois de Snell-Descartes, le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont dans le plan d'incidence (défini par le rayon incident et la normale au dioptre cœur-gaine), et les angles d'incidence i , de réflexion r et de réfraction t suivent les relations $r = i$ et $n_1 \sin i = n_2 \sin t$.

Puisque $n_1 > n_2$, $t > i$. L'angle de réfraction atteint $t = \frac{\pi}{2}$ lorsque i vaut l'angle d'incidence critique i_c défini par $\sin i_c = \frac{n_2}{n_1}$. Lorsque $i > i_c$, il n'y a pas de rayon réfracté, toute l'intensité du rayon incident se retrouve dans le rayon réfléchi : on parle alors de réflexion totale.

b) Dans un guide diélectrique plan, un rayon lumineux est guidé dans le cœur s'il a un angle d'incidence sur le dioptre cœur-gaine plus grand que l'angle d'incidence critique i_c ; il se réfléchit sur les frontières du cœur

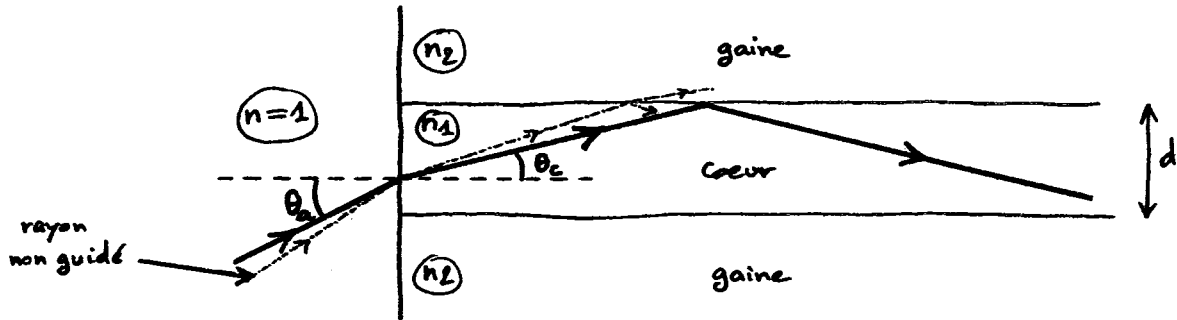


sans perte d'intensité, et se propage indéfiniment dans une direction parallèle à la tranche guidante. Au contraire, un rayon ayant un angle d'incidence plus petit que i_c perd une fraction de son intensité à chaque réflexion et finit par ne plus exister dans le cœur.

Ainsi le guide diélectrique plan est-il un aussi bon guide d'onde que le guide métallique plan (cf. chapitre II), à condition que les rayons à guider aient une incidence suffisamment grande sur le dioptre cœur-gaine.

c) En optique guidée, on utilise couramment, plutôt que l'angle d'incidence i , l'angle complémentaire $\theta = \frac{\pi}{2} - i$ qui est l'angle que fait le rayon dans le cœur avec le dioptre cœur-gaine ; θ mesure l'inclinaison du rayon dans le cœur. Un rayon sera guidé si $\theta < \theta_c$, avec θ_c défini par $\cos \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$.

On considère un guide diélectrique ^{plan} ayant une frontière transverse avec l'air ambiant (assimilé au vide). Pour être guidé dans le cœur, un rayon ^(*) doit y



pénétrer, à partir de l'extérieur, avec un angle d'incidence plus petit que θ_a tel que $\sin \theta_a = n_2 \sin \theta_c$; l'angle θ_a est l'angle d'acceptance, et $\sin \theta_a$ est l'ouverture numérique du guide, notée on . Il vient :

$$on = n_1 \sqrt{1 - \cos^2 \theta_c}, \text{ soit : } on = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}.$$

exemple : Un guide diélectrique plan est fait d'un cœur de $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ et d'une gaine de $\text{Al}_y\text{Ga}_{1-y}\text{As}$. Les indices n_1 et n_2 du cœur et de la gaine dépendent, à une longueur d'onde donnée, des concentrations x et y d'Al. Si x et y sont choisies de sorte que $n_1 = 3,5$ et $n_1 - n_2 = 0,05$ à $\lambda_0 = 900 \text{ nm}$, alors l'ouverture numérique ^{à cette longueur d'onde} vaut $on \approx n_1 \sqrt{2\Delta}$, où $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \ll 1$, soit $on \approx 0,6$. L'angle d'acceptance est $\theta_a = \text{Arcsin}(on) \approx 36^\circ$ (θ_a n'a de sens que si $d \gg \lambda_0$, où d est l'épaisseur du cœur).

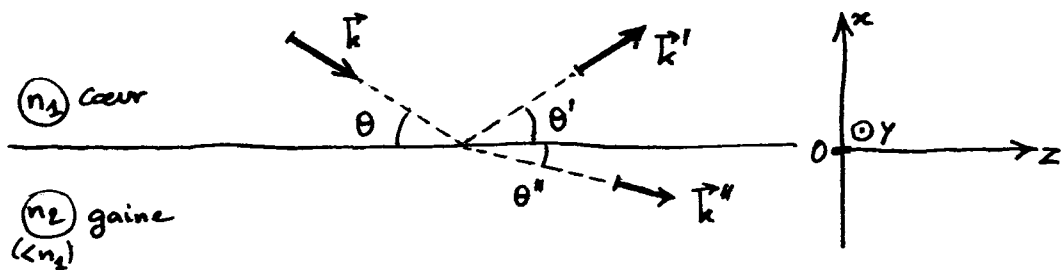
(*) Ce rayon étant contenu dans un plan orthogonal à la tranche guidante et à la face d'entrée de la structure.

(B) Modes de propagation du guide diélectrique plan

1) Réflexion totale d'une onde plane progressive

Une onde plane progressive monochromatique de vecteur d'onde \vec{k} se propage dans le cœur ; \vec{k} vérifie $|\vec{k}| = k_1 = n_1 k_0$, où $k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$.

Cette onde rencontre le dioptre cœur-gaine $x=0$ avec l'inclinaison θ :



Les ondes réfléchi et réfractée sont planes, de vecteurs d'onde \vec{k}' et \vec{k}'' vérifiant $|\vec{k}'| = k_1$ et $|\vec{k}''| = k_2 = n_2 k_0$. Les champs électriques de ces ondes sont respectivement $\vec{\Sigma}_0 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, $\vec{\Sigma}'_0 e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}}$ et $\vec{\Sigma}''_0 e^{-i\vec{k}''\cdot\vec{r}}$.

a) Les lois de Snell-Descartes découlent de l'existence de relations de continuité pour les champs électrique et magnétique sur le dioptre cœur-gaine. Considérant par exemple la continuité de la composante tangentielle du champ électrique,

$$\text{il vient : } \vec{\Sigma}_{0\parallel} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{z}} + \vec{\Sigma}'_{0\parallel} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{z}} = \vec{\Sigma}''_{0\parallel} e^{-i\vec{k}''\cdot\vec{z}},$$

où $\vec{z} = y\hat{y} + z\hat{z}$ est un point quelconque du dioptre $x=0$, $\vec{\Sigma}_{0\parallel}$ étant la projection de $\vec{\Sigma}_0$ sur le dioptre, $\vec{\Sigma}'_{0\parallel}$ celle de $\vec{\Sigma}'_0$ et $\vec{\Sigma}''_{0\parallel}$ celle de $\vec{\Sigma}''_0$. Cette

dernière relation impose $k'_y = k''_y = k_y = 0$ (ie: \vec{k}' et \vec{k}'' sont dans le plan

d'incidence, défini par \vec{k} et \hat{u}_x) et $k_z' = k_z'' = k_z$, soit

$\theta' = \theta$ et $k_1 \cos \theta = k_2 \cos \theta''$. Ainsi les vecteurs d'onde \vec{k} , \vec{k}' et \vec{k}'' ont-ils les composantes suivantes sur les axes z et x :

$$\begin{cases} k_z = k_1 \cos \theta \\ k_x = -k_1 \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} k_z' = k_1 \cos \theta \\ k_x' = k_1 \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} k_z'' = k_1 \cos \theta \\ k_x'' = -\sqrt{k_2^2 - k_z''^2} \end{cases}$$

Lorsque $\theta < \theta_c$, $\theta_c = \text{Arccos}(\frac{n_2}{n_1})$, on est dans la situation de la réflexion totale. $k_z'' > k_2$ et k_x'' est imaginaire pur :

$$k_x'' = +i k_1 \eta(\theta), \quad \text{où } \eta(\theta) = \sqrt{\sin^2 \theta_c - \sin^2 \theta}.$$

Le champ électrique dans la gaine ($x < 0$) prend alors la forme :

$$\vec{\Sigma}''(\vec{r}) = \vec{\Sigma}_0'' e^{-ik_x'' \cdot \vec{r}} = \vec{\Sigma}_0'' e^{+k_1 \eta(\theta) x} e^{-ik_1 \cos \theta z}. \quad \text{L'onde électromagnétique dans}$$

la gaine possède un caractère évanescent suivant x , et se propage suivant

les z croissants avec la vitesse de phase $v_p'' = \frac{\omega}{k_1 \cos \theta} = \frac{c/n_1}{\cos \theta}$; cette onde

existe sur une épaisseur caractéristique $[k_1 \eta(\theta)]^{-1}$ dépendant de l'angle

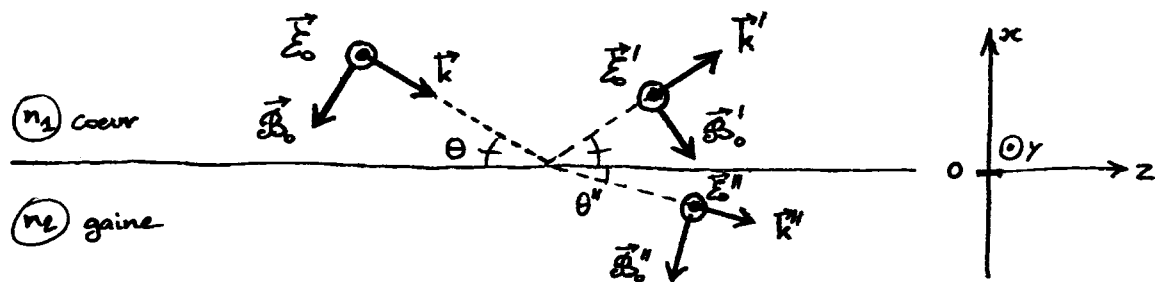
d'inclinaison θ de l'onde incidente.

b) Dans le cas d'une onde incidente polarisée orthogonalement au plan d'incidence

("onde s"), la continuité de la composante tangentielle du champ électrique à la

traversée du dioptré s'écrit, avec $\vec{\Sigma} = \Sigma_0 \hat{u}_y$, $\vec{\Sigma}' = \Sigma_0' \hat{u}_y$ et $\vec{\Sigma}'' = \Sigma_0'' \hat{u}_y$:

$$\Sigma_0 + \Sigma_0' = \Sigma_0''. \quad (1)$$



En l'absence de charges libres sur le dioptre cœur-gaine, la composante tangentielle du champ magnétique est continue (il n'y a pas de courant de surface associé aux charges liées des diélectriques). Les champs magnétiques des ondes incidente, réfléchie et réfractée étant $\vec{B}_0 = \frac{n_1}{c} \frac{\vec{k}}{k_1} \times \vec{E}_0$, $\vec{B}_0' = \frac{n_1}{c} \frac{\vec{k}'}{k_1} \times \vec{E}_0'$ et $\vec{B}_0'' = \frac{n_2}{c} \frac{\vec{k}''}{k_2} \times \vec{E}_0''$, il vient donc: $-\frac{n_1}{c} E_0 \sin \theta + \frac{n_1}{c} E_0' \sin \theta = -\frac{n_2}{c} E_0'' \sin \theta''$.

Comme $n_2 \sin \theta'' = -\frac{k_x''}{k_0} = -in_2 \eta(\theta)$, cette relation prend la forme :

$$-\sin \theta E_0 + \sin \theta E_0' = i\eta(\theta) E_0'' \quad (2)$$

On déduit, de (1) et (2), $\frac{E_0''}{E_0} = \frac{2 \sin \theta}{\sin \theta - i\eta(\theta)}$ et $\frac{E_0'}{E_0} = \frac{\sin \theta + i\eta(\theta)}{\sin \theta - i\eta(\theta)}$. Comme

attendu dans la situation de réflexion totale, $\left| \frac{E_0''}{E_0} \right| = 1$; on a $\frac{E_0'}{E_0} = e^{i\varphi_2}$,

le déphasage à la réflexion φ_2 étant donné par

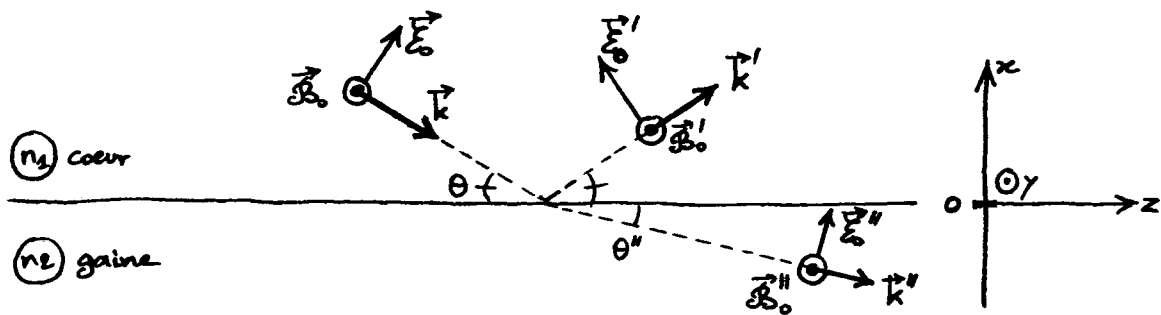
$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} = \frac{\eta(\theta)}{\sin \theta} = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_c}{\sin^2 \theta} - 1}, \quad 0 < \varphi_2 < \pi.$$

φ_2 varie de π à zéro lorsque θ va de zéro à θ_c .

c) Dans le cas d'une onde incidente polarisée parallèlement au plan d'incidence

("onde p"), les relations de continuité des composantes tangentielles s'écrivent, pour

le champ électrique : $E_0 \sin \theta - E_0' \sin \theta = E_0'' \sin \theta''$



(avec $\vec{\Sigma} = \Sigma_0 \hat{y} \times \frac{\vec{k}}{k_2}$, $\vec{\Sigma}' = \Sigma'_0 \hat{y} \times \frac{\vec{k}'}{k_2}$ et $\vec{\Sigma}'' = \Sigma''_0 \hat{y} \times \frac{\vec{k}''}{k_2}$), et pour le champ

magnétique : $\frac{n_1}{c} \Sigma_0 + \frac{n_1}{c} \Sigma'_0 = \frac{n_2}{c} \Sigma''_0$.

Ces deux relations donnent, en utilisant une nouvelle fois $n_2 \sin \theta'' = -i n_1 \eta(\theta)$,

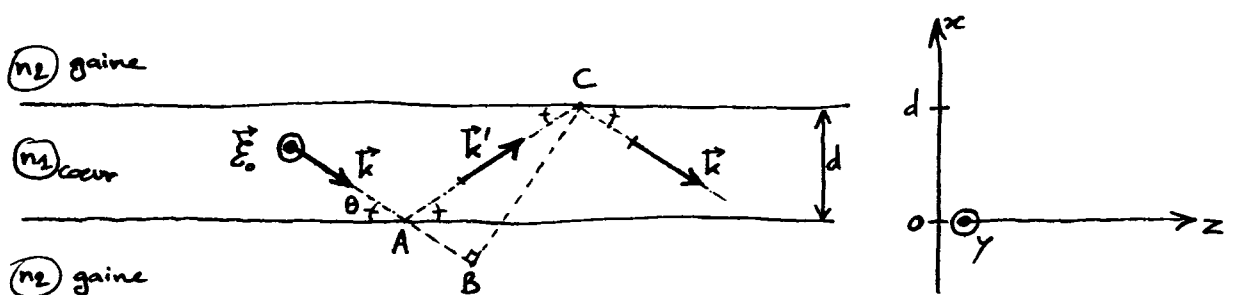
$$\frac{\Sigma''_0}{\Sigma_0} = \frac{2 n_1 n_2 \sin \theta}{n_2^2 \sin \theta - i n_1^2 \eta(\theta)} \quad \text{et} \quad \frac{\Sigma'_0}{\Sigma_0} = \frac{n_2^2 \sin \theta + i n_1^2 \eta(\theta)}{n_2^2 \sin \theta - i n_1^2 \eta(\theta)}. \quad \text{On a} \quad \frac{\Sigma'_0}{\Sigma_0} = e^{i \varphi'_2} \quad \text{avec}$$

le déphasage φ'_2 déterminé par

$$0 < \varphi'_2 < \pi \quad \text{et} \quad \text{tg} \frac{\varphi'_2}{2} = \frac{n_1^2 \eta(\theta)}{n_2^2 \sin \theta} = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_c}{\sin^2 \theta} - 1} / \cos^2 \theta_c.$$

2) Modes de propagation TE

a) On suppose que le champ électromagnétique dans le cœur est une onde plane TEM planifiée suivant \hat{y} , subissant des réflexions multiples cohérentes (cf. chapitre II, § A-2-b) sur les diélectriques cœur-gaine.



Après deux réflexions totales sur le diélectrique cœur-gaine ($\theta < \theta_c$), la troisième

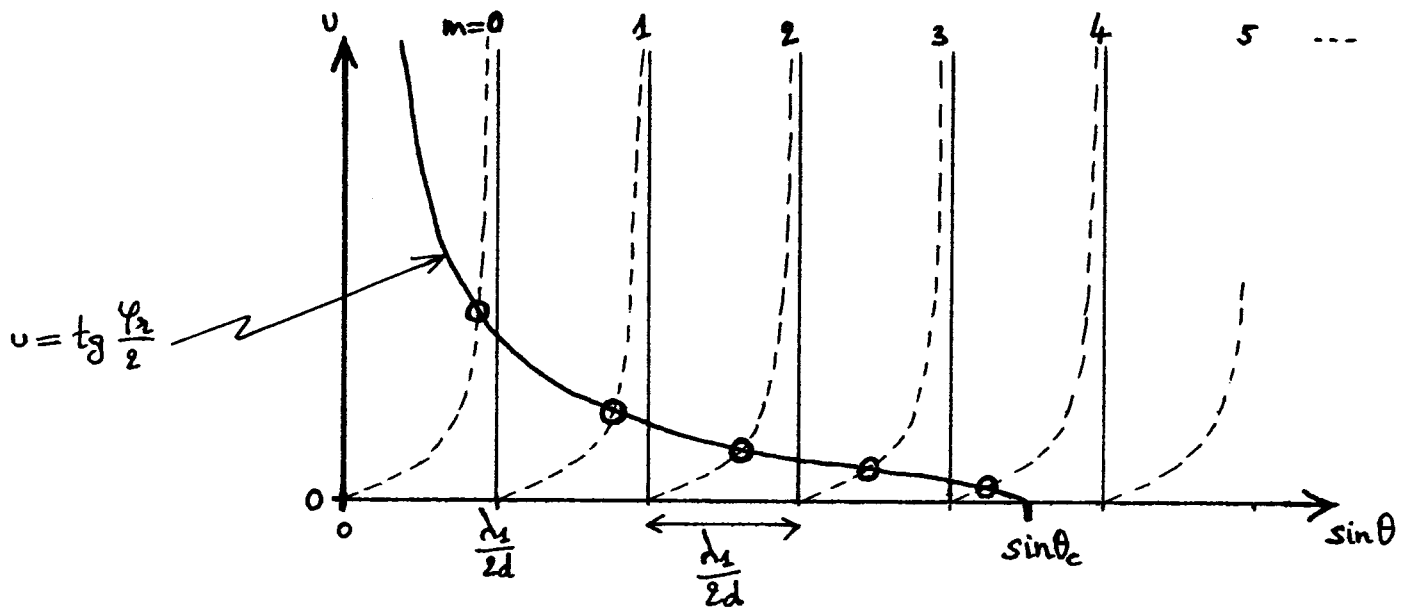
onde est identique à la première si la condition d'auto-cohérence est vérifiée :

$$(k_2 AC - 2\varphi_2) - k_1 AB = m 2\pi, \quad m \text{ entier, c'est-à-dire, puisque}$$

$$AC - AB = 2d \sin \theta : \quad \frac{\varphi_2}{2} = \frac{\pi d}{\lambda_1} \sin \theta - m \frac{\pi}{2} \quad (d_2 = \frac{d_0}{n_2}),$$

où le déphasage à la réflexion φ_2 dépend de θ . Les angles θ_m solutions de cette relation d'auto-cohérence correspondent aux modes TE_m . Ils peuvent être

$$\text{obtenus en résolvant } \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_c}{\sin^2 \theta} - 1} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi d}{\lambda_1} \sin \theta - m \frac{\pi}{2} \right).$$



D'une part, la fonction $u = \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}$ décroît de $+\infty$ à zéro lorsque $\sin \theta$

varie de 0 à $\sin \theta_c$. D'autre part, tenant compte que $0 < \frac{\varphi_2}{2} < \frac{\pi}{2}$,

$u = \operatorname{tg} \left[\frac{\pi d}{\lambda_1} \sin \theta - m \frac{\pi}{2} \right]$ est représentée comme une série de branches allant de zéro à $+\infty$ lorsque $\sin \theta$ varie de $m \frac{\lambda_1}{2d}$ à $(m+1) \frac{\lambda_1}{2d}$, $m \geq 0$.

Les points d'intersection des deux courbes déterminent les angles θ_m

associés aux modes. Le graphique montre que les modes TE sont au

nombre de $E\left(\frac{\sin\theta_c}{\left(\frac{\lambda_1}{2d}\right)}\right) + 1$, soit $E\left(\frac{2d}{\lambda_0} \sin\theta_c\right) + 1$ avec

$\sin\theta_c = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ (cf. § A-c). Si l'épaisseur du cœur est suffisamment

faible et la longueur d'onde $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$ suffisamment grande pour que soit remplie la

condition $2d \sin\theta_c < \lambda_0$, alors un seul mode TE est permis dans le guide

(il s'agit du mode $m=0$); le guide est alors dit monomode (*).

exemple: On reprend le guide $Al_x Ga_{1-x} As$ considéré au § A-c :

$d_0 = 900 \text{ nm}$, $n_1 = 3,5$ et $n_1 - n_2 = 0,05$. Dans un guide d'épaisseur $d = 10 \mu\text{m}$,

14 modes TE peuvent se propager. Pour $d < 0,76 \mu\text{m}$, un seul mode ^{TE} est autorisé.

b) Dans le cœur du guide diélectrique plan ($0 < x < d$), le champ électrique du

mode m est $\sum_y^{(m)}(x, z) = \sum_0 e^{-ik_x^{(m)} \cdot \vec{r}} + \left(\sum_0 e^{i\varphi_2^{(m)}}\right) e^{-ik_x^{(m)} \cdot \vec{r}}$, $k_x^{(m)}$, $k_z^{(m)}$

et $\varphi_2^{(m)}$ désignant les valeurs prises par k_x , k_z et φ_2 pour $\theta = \theta_m$, soit :

$$\sum_y^{(m)}(x, z) = \left(2 \sum_0 e^{i\frac{\varphi_2^{(m)}}{2}}\right) \cos\left[k_2 \sin\theta_m x - \frac{\varphi_2^{(m)}}{2}\right] e^{-i\beta_m z}$$

avec la constante de propagation $\beta_m = k_2 \cos\theta_m$.

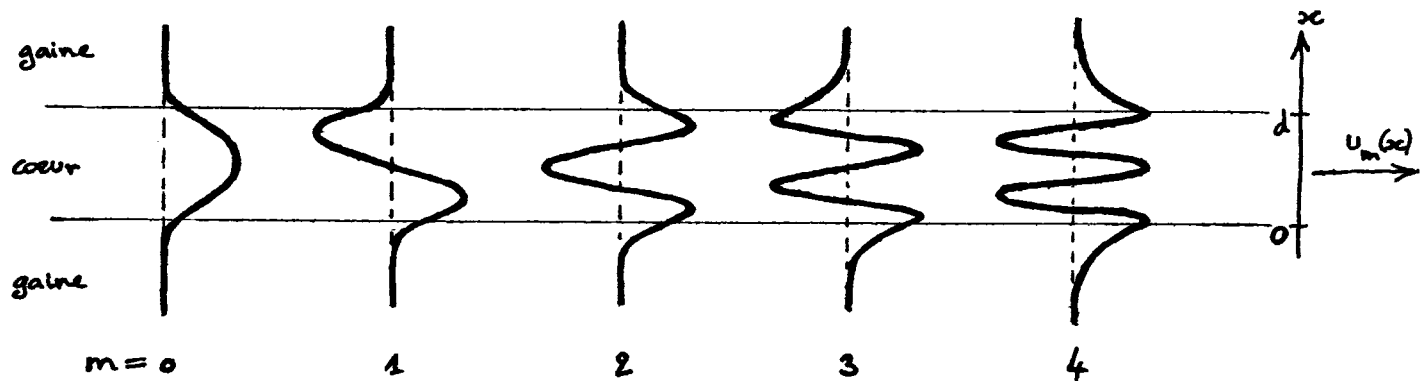
Dans la gaine, on a $\sum_y^{(m)}(x, z) = \left(2 \sum_0 e^{i\frac{\varphi_2^{(m)}}{2}}\right) \cos\frac{\varphi_2^{(m)}}{2} e^{+k_2 \eta(\theta_m) x} e^{-i\beta_m z}$

pour $x < 0$, et $\sum_y^{(m)}(x, z) = \left(2 \sum_0 e^{i\frac{\varphi_2^{(m)}}{2}}\right) \cos\left[k_2 d \sin\theta_m - \frac{\varphi_2^{(m)}}{2}\right] e^{-k_2 \eta(\theta_m) (x-d)} e^{-i\beta_m z}$

pour $x > d$.

On a donc $\sum_y^{(m)}(x, z) = \int_0^d u_m(x) e^{-i\beta_m z}$; $u_m(x)$ est tracée ci-après.

(*) Un autre mode, le $TM_{m=0}$, est également permis (cf. §3).



Les modes de m pair sont symétriques par rapport au plan médian $x = \frac{d}{2}$; les modes de m impair sont antisymétriques. Le mode TE_m possède m plans nodaux, parallèles aux dioptries cœur-gaine. La longueur caractéristique de pénétration dans la gaine est $[k_2 \eta(\theta_m)]^{-1} = \dots = \frac{d_2}{2\pi} (\sin^2 \theta_c - \sin^2 \theta_m)^{-1/2}$: plus un mode est d'ordre élevé, plus θ_m est proche de θ_c et plus le champ pénètre profondément dans la gaine.

L'onde électromagnétique la plus générale se propageant dans le guide avec une polarisation suivant \hat{y} , est une superposition linéaire de modes TE_m :

$$\vec{E}_y(x, z) = \sum_m a_m u_m(x) e^{-i\beta_m z}.$$

On a vu que la constante de propagation du mode m était

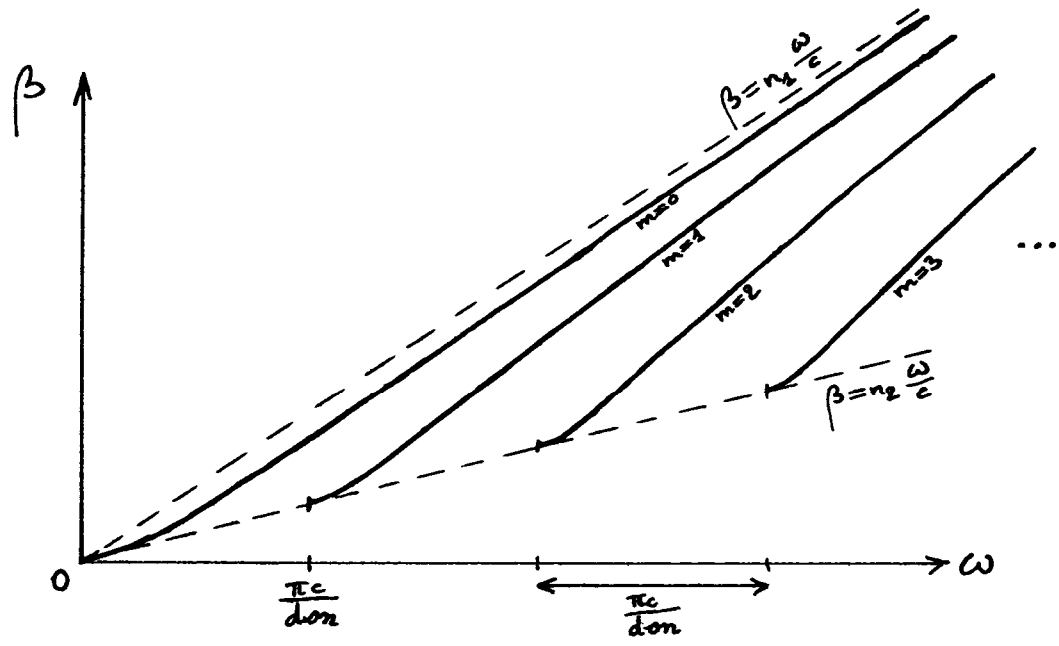
$$\beta_m = k_2 \cos \theta_m ; \text{ comme } 0 < \theta_m < \theta_c, \text{ on a } \frac{n_2}{n_1} < \cos \theta_m < 1 \text{ et}$$

$$\text{donc } k_2 < \beta_m < k_1, \text{ soit } n_2 \frac{\omega}{c} < \beta_m < n_1 \frac{\omega}{c}. \theta_m \text{ dépend de la}$$

pulsation ω par l'intermédiaire de l'équation d'auto-cohérence, où intervient

$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{n_2} = \frac{2\pi c}{n_2 \omega}$ (cf. § a ci-dessus); l'équation d'auto-cohérence

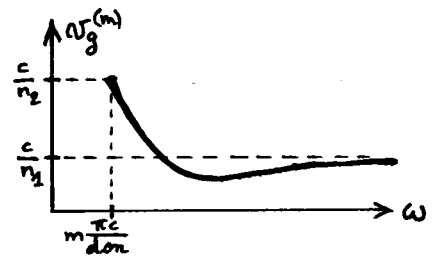
détermine donc les relations de dispersion $\beta_m = \beta_m(\omega)$ des modes, qui sont représentées schématiquement ci-dessous.



Dans cette figure, la dispersion due aux milieux est négligée : les indices de réfraction n_1 et n_2 sont considérés comme des constantes, indépendantes de la pulsation ω de l'onde. On constate que la vitesse de phase $v_p^{(m)} = \frac{\omega}{\beta_m}$ du mode m est comprise entre $\frac{c}{n_2}$ (vitesse de phase dans la gaine), lorsque ω est proche de la pulsation de coupure $m \frac{\pi c}{don}$, et $\frac{c}{n_1}$ (vitesse de phase dans le cœur), lorsque $\omega \gg m \frac{\pi c}{don}$: $\frac{c}{n_2} < v_p^{(m)} < \frac{c}{n_1}$.

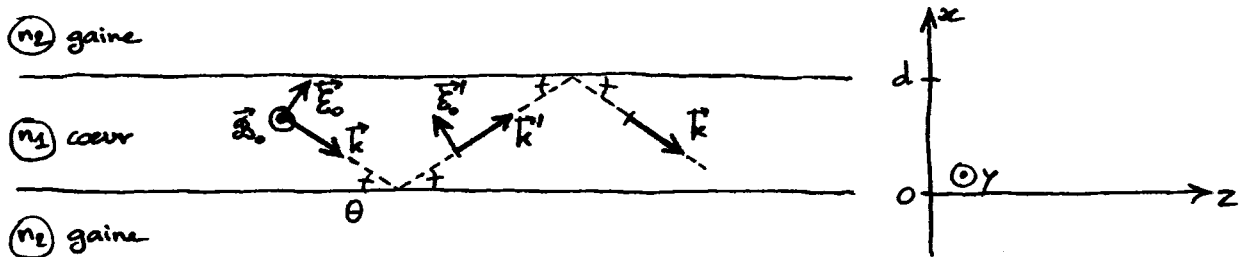
On observe également que la vitesse de groupe $v_g^{(m)} = \frac{d\omega}{d\beta_m} = \left(\frac{d\beta_m}{d\omega}\right)^{-1}$ du mode m est comprise entre les mêmes bornes : $\frac{c}{n_2} \lesssim v_g^{(m)} < \frac{c}{n_1}$, qui sont approchées pour les mêmes valeurs de la pulsation.

La vitesse de groupe $v_g^{(m)}(\omega)$ possède l'allure ci-contre :



3) Modes de propagation TM

Les modes de propagation TM sont formés d'une onde électromagnétique plane, polarisée parallèlement au plan zx , qui subit des réflexions multiples cohérentes



sur les diélectriques cœur-gaine. La relation d'auto-cohérence s'écrit de la même façon que celle rencontrée au § 2-a pour les modes TE, la seule modification étant que le déphasage à la réflexion φ_2 est remplacé par φ_2' , et

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_c}{\sin^2 \theta} - 1} \quad \text{par} \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi_2'}{2} = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_c}{\sin^2 \theta} - 1} / \cos^2 \theta_c \quad (\text{cf. § 1-c}).$$

Dans la discussion graphique concernant les angles d'inclinaison associés aux modes (cf. § 2-a), la courbe $v = \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}$ est donc remplacée par la courbe $v = \operatorname{tg} \frac{\varphi_2'}{2}$, qui lui est proportionnelle. On en déduit que les inclinaisons θ_m' associées aux modes TM sont différentes (*) des inclinaisons θ_m des modes TE. Cependant, il apparaît qu'il y a autant de modes TM que de modes TE, soit $E(\frac{2d}{\lambda_0} \cos \theta) + 1$; lorsque $\lambda_0 > 2d \cos \theta$, 1 seul mode TM peut être supporté par le guide (il s'agit du mode $\text{TM}_{m=0}$).

La constante de propagation du mode TM_m est $\beta_m' = k_1 \cos \theta_m'$, et vérifie

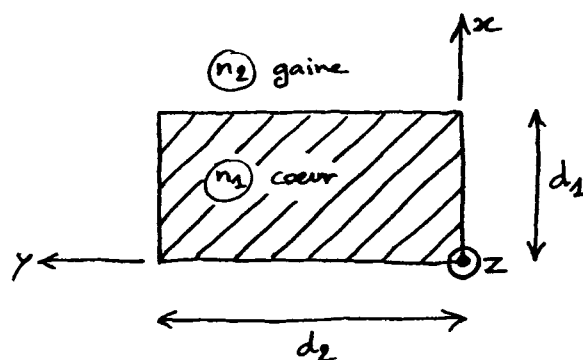
(*) Plus précisément, $\theta_m' > \theta_m$.

$n_2 \frac{\omega}{c} < \beta_m' < n_1 \frac{\omega}{c}$, puisque $0 < \theta_m' < \theta_c$; les relations de dispersion $\beta_m' = g_m(\omega)$ ont la même allure que celles des modes TE, voir au § 2-c.

Les composantes non nulles $E_z^{(m)}$, $E_x^{(m)}$ et $\beta_y^{(m)}$ du mode TM_m , que l'on peut calculer, montrent les caractères déjà observés au § 2-b sur la composante $E_y^{(m)}$ du mode TE_m : leur profil transverse (suivant x) oscille spatialement d'autant plus rapidement dans le cœur, et pénètre d'autant plus profondément dans la gaine, que l'ordre du mode est élevé^(*).

③ Guide diélectrique à section rectangulaire

Un guide diélectrique plan confine la lumière dans une direction transverse, suivant x , tandis qu'elle se propage suivant z . Pour que le confinement ait lieu à deux dimensions, il faut que le cœur du guide soit de taille finie non seulement suivant x , mais aussi suivant y . Cette condition est remplie dans un guide à section rectangulaire; cette géométrie de guide, en forme de ruban, est utilisée extensivement dans les dispositifs de l'optique intégrée (cf. chapitre IV).



(*) Dans la limite de guidage faible $n_1 - n_2 \rightarrow 0$, $\theta_c \rightarrow 0$ et donc $\theta_m, \theta_m' \rightarrow 0$: les modes TE_m et TM_m sont alors approximativement TEM. Par ailleurs, ils ont la même relation de dispersion.

On considère ici le guide-ruban le plus simple que l'on puisse imaginer, formé d'un cœur de section rectangulaire et d'indice de réfraction n_1 , entouré d'une gaine d'indice n_2 ($n_2 < n_1$). Le guidage de la lumière dans cette structure peut être étudié de manière formelle, en écrivant le champ électromagnétique

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(x, y) e^{-i\beta z}, \quad \vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_0(x, y) e^{-i\beta z}$$

et en cherchant les champs \vec{E}_0, \vec{B}_0 et la constante de propagation β qui satisfont aux équations de Maxwell et aux conditions aux limites sur les frontières du cœur. Cette démarche a été empruntée pour décrire la propagation d'une onde électromagnétique dans un guide métallique de section rectangulaire (cf. chapitre II, § B^(*)).

Cependant, l'analyse du guide diélectrique en forme de ruban est extrêmement délicate, et aucun résultat analytique ^{exact} n'a pu être obtenu le concernant. Les résultats cités ici sont issus d'une étude numérique sur ordinateur.

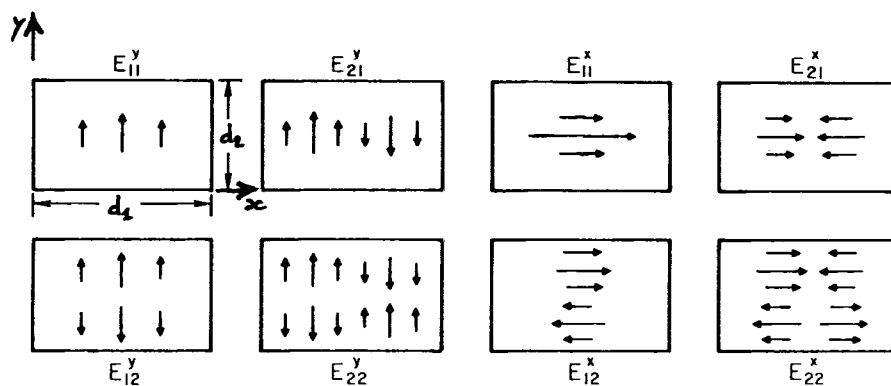
1) Structures des modes de propagation

Dans le guide diélectrique rectangulaire, il n'y a pas de mode à $E_z = 0$ ou à $B_z = 0$: les modes TE et TM sont interdits. Les modes de propagation du guide sont désignés par E_{pq}^x et E_{pq}^y suivant que le champ électrique s'aligne _{sur} \vec{e}_x ou \vec{e}_y .

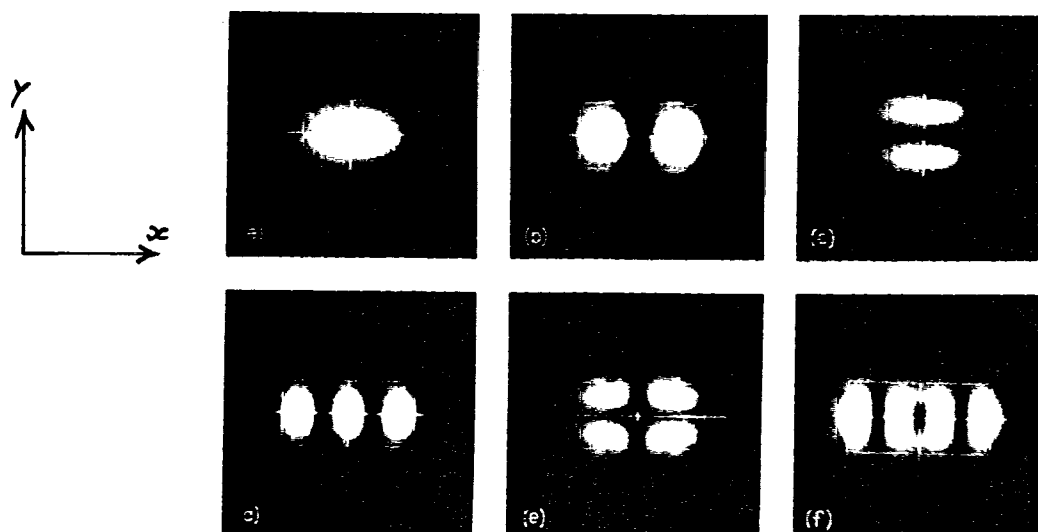
(*) Une telle procédure peut être employée pour trouver les modes de propagation du guide diélectrique plan.

avec l'axe des x ou l'axe des y à la limite de faible guidage $n_1 - n_2 \rightarrow 0$;
 p et q sont les nombres d'extrema de E_{0x} , ou E_{0y} , suivant la direction x et
 suivant la direction y , respectivement.

Un schéma de section droite du champ électrique dans les modes de plus bas
 ordres est donné ci-dessous.



Le carré du champ électrique, dans une section droite du guide, donne
 pour quelques modes de bas ordres (figure obtenue sur ordinateur) :



(a) E_{11}^y ; (b) E_{21}^y ; (c) E_{12}^y ; (d) E_{31}^y ; (e) E_{22}^y ; (f) E_{41}^y .

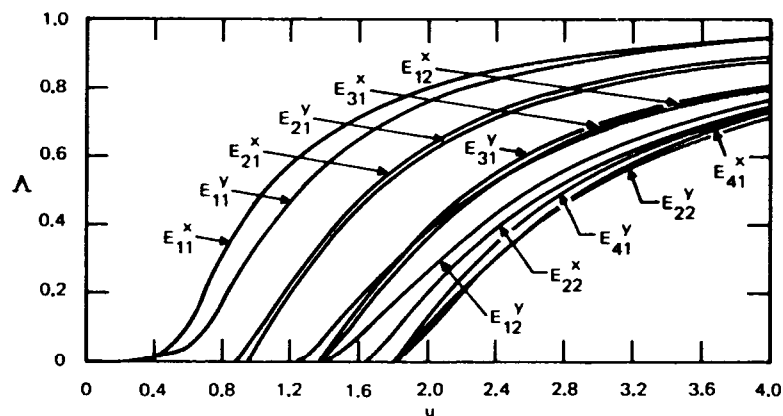
(Cette figure est obtenue avec $\frac{d_1}{d_2} = 2$, $u = 2$ et $\frac{n_1}{n_2} = 1,01$,

où $u = \frac{d_1}{d_0} \omega n_2$, $\omega n_2 = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$.)

Comme attendu, on observe que le champ électrique oscille d'autant plus rapidement dans l'espace et pénètre d'autant plus dans la gaine, que l'ordre du mode considéré est élevé.

2) Relations de dispersion

Les relations de dispersion des modes de propagation de plus bas ordre sont représentés graphiquement ci-dessous, avec $u = \frac{d_1}{d_0} \omega n_2$ et $\Lambda = \frac{(\frac{\beta}{k_0})^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}$.



La figure est tracée dans le cas $\frac{d_1}{d_2} = 2$, $\frac{n_1}{n_2} = 1,5$.

On constate que Λ est compris entre zéro et 1 pour tout mode, c'est-à-dire que $n_2 k_0 < \beta < n_1 k_0$ pour tout mode. Lorsque la longueur d'onde λ_0 est suffisamment grande (c'est-à-dire la pulsation $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$ suffisamment faible), seuls les modes $E_{11}^{x,y}$ peuvent se propager; le guide est alors dit monomode.

Sans l'illustrer ici, mentionnons pour finir que dans la limite de faible guidage $n_1 - n_2 \rightarrow 0$, les modes de propagation dégénèrent deux à deux : le mode E_{pq}^x et le mode E_{pq}^y ont la même relation de dispersion. Si, de plus, $d_1 = d_2$ (cœur à section carrée), les modes E_{pq}^y et E_{qp}^x dégénèrent également; les modes avec $p \neq q$ sont alors dégénérés quatre fois et ceux à $p = q$ deux fois.

Toutes les figures ^{non manuscrites} du paragraphe c sont tirées du livre :

Kapany, Burke - Optical Waveguides (Academic Press, 1972)

OPTIQUE GUIDÉE : TD III

1) De la lumière à $\lambda_0 = 0,87 \mu\text{m}$ est guidée dans un guide diélectrique plan. L'indice de réfraction du cœur, d'épaisseur $d = 2 \mu\text{m}$, est $n_1 = 1,6$ et celui de la gaine $n_2 = 1,4$.

a) Déterminer l'angle d'inclinaison critique θ_c , l'ouverture numérique ON et l'angle d'acceptance θ_a . (θ_a a-t-il un sens ici ?)

b) Quel est le nombre de modes TE supportés par la guide ?

c) Déterminer l'angle θ_0 et la vitesse de groupe $v_g^{(0)}$ du mode $TE_{m=0}$.

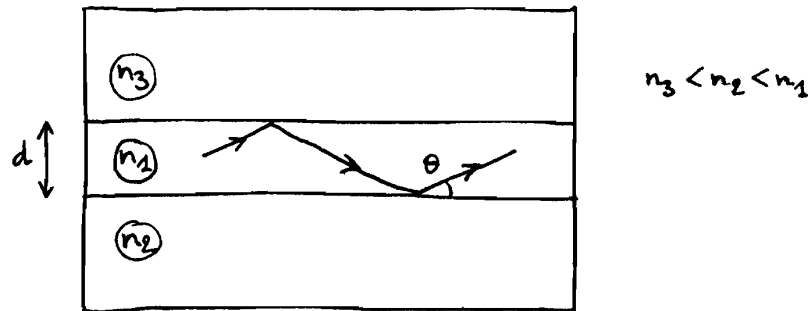
2) Reprendre l'exercice précédent avec le cœur maintenant entouré d'air ($n_2 = 1$). Comparer les résultats des deux exercices.

3) Quelle est l'épaisseur maximale d du cœur d'un guide diélectrique ^{plan} ($n_1 = 1,50$, $n_2 = 1,46$) pour laquelle il n'y a qu'un seul mode TE à $\lambda_0 = 1,3 \mu\text{m}$? Quel est le nombre de modes TE si un guide de cette largeur est utilisé à $\lambda_0 = 0,87 \mu\text{m}$?

4) Montrer que le mode TE_m , $m \neq 0$, ^{d'un guide plan} cesse d'exister dès que la longueur d'onde utilisée est plus grande que $\lambda_0 = \frac{n_1 d}{m} \sqrt{8\Delta}$, lorsque $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2} \ll 1$.

5) Montrer que, dans un guide diélectrique plan, la différence de temps maximale mis par les différents rayons pour parcourir une distance L , vaut $\delta t = \left(\frac{n_1^2}{n_2^2} - n_1\right) \frac{L}{c}$. Lorsque $n_2 - n_1 = 0,03$, à quelle distance a-t-on $\delta t = 1 \text{ ns}$? Rechercher l'expression de δt en raisonnant sur les modes de propagation du guide ; en déduire une précision sur la figure de la p. III-12 représentant $v_g^{(m)}$ en fonction de ω . Pourquoi peut-on négliger les modes à $v_g^{(m)} > c/n_1$?

6) On considère un guide diélectrique plan asymétrique, formé d'un cœur d'épaisseur d et d'indice de réfraction n_1 ; le cœur est déposé sur un substrat d'indice n_2 , et recouvert d'un milieu d'indice n_3 ($n_3 < n_2 < n_1$). On cherche les modes TE.



a) Déterminer l'inclinaison maximale des ondes planes subissant des réflexions totales à l'intérieur du cœur. Quelle est l'ouverture numérique du guide d'onde ?

b) Écrire la relation d'auto-cohérence.

c) Déterminer une expression approchée du nombre de modes \sqrt{TE} , valable lorsqu'il est grand.

d) Montrer qu'aucun mode n'existe si $2\pi \frac{d}{\lambda_0} \sin \theta < \text{Arctg} \sqrt{\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_3^2}}$.

7) Le cœur d'un guide diélectrique plan est compris entre $x = -d/2$ et $x = +d/2$ (indice n_1). La gaine occupe le restant de l'espace, $x < -d/2$ et $x > +d/2$ (indice n_2). On s'intéresse à la propagation d'un mode TE, de champ électrique de la forme $\vec{E}_y(x, z) e^{i\omega t}$ avec $\vec{E}_y(x, z) = \vec{E}_0 u(x) e^{-i\beta z}$.

a) Dédurre des équations de Maxwell que le profil $u(x)$ suit $u''(x) + [k_0^2 n(x)^2 - \beta^2] u(x) = 0$, où $n(x) = n_1$ dans le cœur et $n(x) = n_2$ dans la gaine ($k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda_0$).

Montrer que $\beta > n_2 k_0$ (on admettra que $\beta < n_1 k_0$).

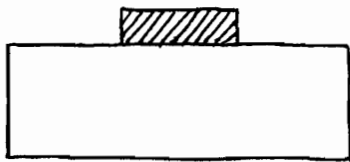
b) Les modes TE symétriques sont recherchés sous la forme : $u(x) = A_1 e^{-\gamma(x-d/2)}$ pour $x > d/2$, $u(x) = A_2 \cos k_T x$ pour $-d/2 < x < d/2$, et $u(x) = A_1 e^{\gamma(x+d/2)}$ pour $x < -d/2$.

Préciser les expressions de k_T et γ . On pose $X := k_T d/2$ et $Y := \gamma d/2$; montrer que $X^2 + Y^2 = V^2$, où V est un paramètre constant que l'on précisera. Dédurre alors des relations de continuité en $x = \pm d/2$ que l'équation caractéristique est $\text{tg} X = \sqrt{\frac{V^2}{X^2} - 1}$; quel est le nombre de modes TE symétriques ? pour quelles valeurs de V n'y en a-t-il qu'un seul ?

c) Étudier, suivant la même démarche que précédemment, les modes TE antisymétriques, c'est-à-dire de profil $u(x)$ impair. On montrera en particulier qu'ils sont déterminés par l'équation caractéristique $-\text{cotg} X = \sqrt{\frac{V^2}{X^2} - 1}$.

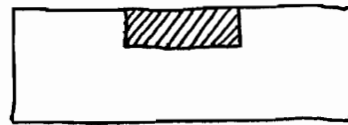
IV- Quelques dispositifs de l'optique guidée

Les guides d'onde diélectriques utilisés en optique guidée confinent la lumière dans les deux dimensions transverses à la direction de propagation. Leur section droite peut adopter différentes géométries. Le cœur du guide, en forme de ruban, peut être déposé sur un substrat d'indice de réfraction plus faible, ou être encastré (cf. figures ci-dessous, dans laquelle l'axe z est suivant la direction



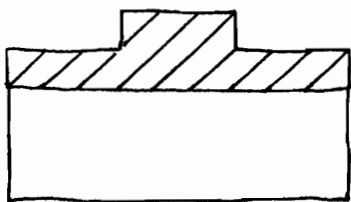
ruban déposé

\odot^z

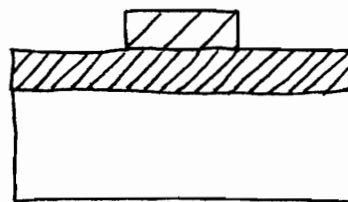


ruban encastré

de propagation). Le ruban enterré, considéré au chapitre III, § C, peut aussi être utilisé. Des structures plus complexes, comme le ruban déposé sur un film de même indice ou d'indice plus élevé, forment également des guides d'onde :



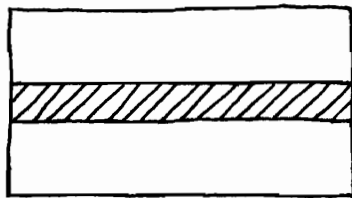
\odot^z



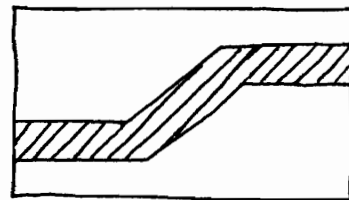
Ces structures confinent la lumière dans les deux directions transverses à la direction de propagation. L'ordre de grandeur de leur taille transverse est le μm .

La recherche des modes de propagation dans ces guides d'onde diélectriques est difficile, et nécessite des approximations. Une telle étude sort du cadre de ce cours.

Les guides d'onde peuvent être fabriqués dans différentes configurations. La ligne droite est la plus simple; le zig-zag permet de décaler l'axe de

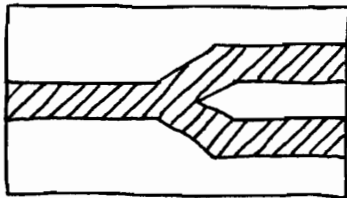


ligne droite

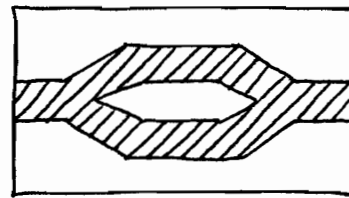


zig-zag

propagation. Une branche en Y peut jouer le rôle de séparateur ou de combineur; deux branches en Y permettent de former un interféromètre de

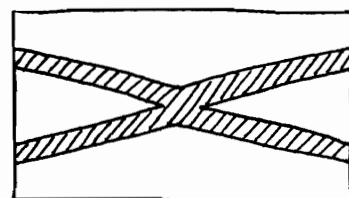
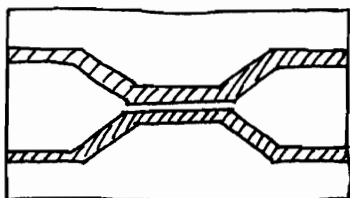


branche en Y



interféromètre de Mach-Zehnder

Mach-Zehnder. Deux guides très proches, ou formant une intersection, peuvent échanger de la puissance lumineuse:



La technologie la plus développée pour la fabrication des guides d'onde diélectriques est celle utilisant le niobate de lithium (LiNbO_3) comme substrat ; les zones d'indice de réfraction plus élevées sont réalisées par diffusion de titane (Ti). Les alliages semi-conducteurs GaAs et AlGaAs, d'indice plus faible, permettent également la fabrication de guides diélectriques.

L'optique intégrée, qui miniaturise l'optique comme l'électronique intégrée a miniaturisé l'électronique, utilise les types de guides d'onde décrits précédemment, dans des dispositifs de focalisation, de séparation, de combinaison, d'isolation, de polarisation, de couplage, de modulation et de commutation. Les dispositifs peuvent éventuellement inclure des éléments émetteurs ou récepteurs de lumière.

Ce chapitre décrit quelques systèmes simples de l'optique guidée, qui concernent le couplage de lumière dans un guide d'onde et le couplage de lumière entre guides. Quelques dispositifs élémentaires de l'optique intégrée mettant en œuvre un effet électro-optique, sont également introduits.

① Couplage de lumière dans un guide

1) Excitation des modes

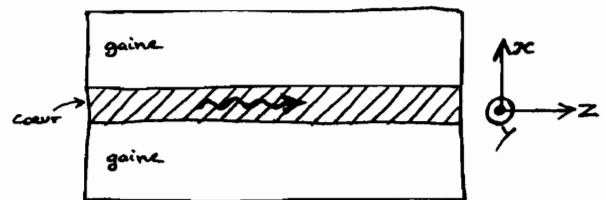
Dans un guide d'onde, la lumière se propage sous forme de modes. Par exemple, dans un guide plan, une onde polarisée parallèlement au plan est

une superposition de modes TE : $E_y(x, z) = \sum_m a_m u_m(x) e^{-i\beta_m z}$,

où a_m est l'amplitude du mode m ,

$u_m(x)$ son profil transverse (réel) et

β_m sa constante de propagation



(cf. chapitre III, § B-2). Les amplitudes des différents modes dépendent de la source de lumière extérieure utilisée pour exciter le guide d'onde. Si la source possède une distribution correspondant exactement au profil transverse d'un mode, alors seul ce mode est excité. Une source de distribution $s(x)$ quelconque excite les modes en proportion du degré de similarité de $s(x)$ avec leur profil transverse : le mode m est excité avec une amplitude^(*)

$$a_m \propto \int dx u_m(x) s(x).$$

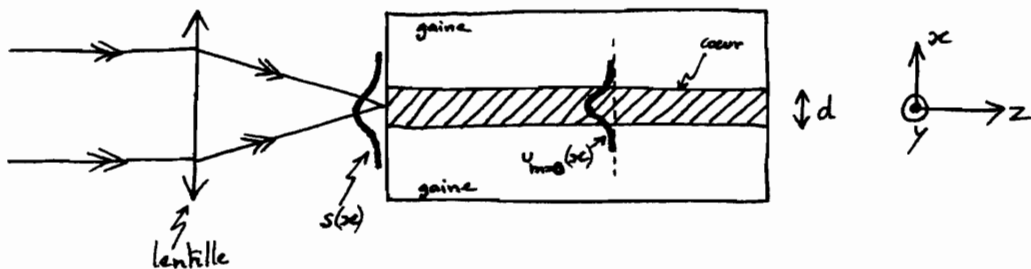
La polarisation de la lumière incidente doit aussi correspondre, à celle des modes à

(*) cf. Annexe IV, § 1.

exciter. Il est clair, toujours dans le cas du guide plan, qu'une source polarisée suivant \hat{u}_x n'excitera aucun mode TE. (Mais elle ^{peut} exciter les modes TM.)

2) Couplage à l'entrée

a) La lumière peut être couplée dans un guide d'onde simplement en la focalisant sur l'entrée du guide. La taille transverse du cœur du guide étant de l'ordre du μm ,

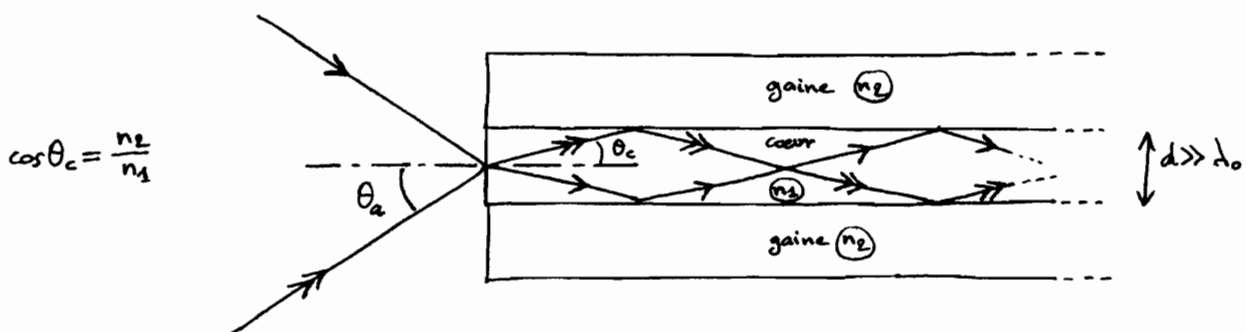


le montage expérimental réalisant ce couplage doit être extrêmement précis et stable.

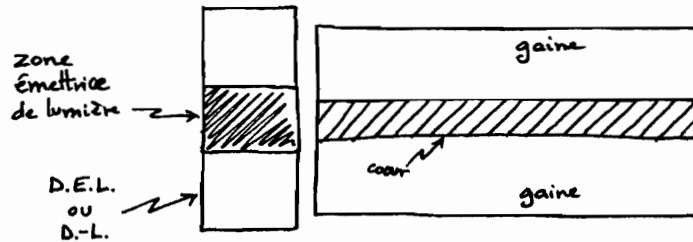
Le couplage de lumière dans le guide est évidemment plus facile ^{à réaliser} lorsque le guide est multimode ($d \gg \lambda_0$); une description par l'optique ^{géométrique} est alors possible et il

apparaît que le couplage est maximal lorsque le cône de focalisation possède un demi-angle au sommet inférieur à l'angle d'acceptance $\theta_a = \text{Arcsin } n_2$,

$n_2 = \sqrt{n_1^2 - n_c^2}$ (cf. chapitre III, § A).



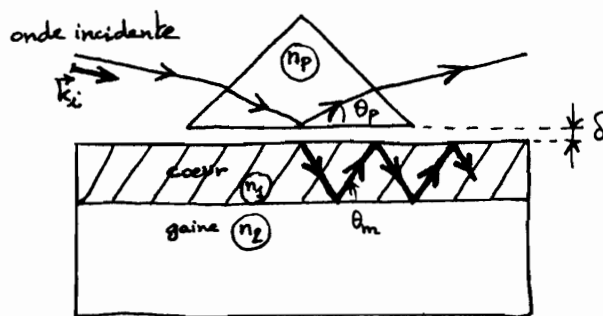
b) La lumière peut également être couplée dans un guide à partir d'une diode électroluminescente ou d'une diode-laser, en alignant la zone émettrice de ces sources avec le cœur du guide. (Dans les diodes électroluminescentes, la lumière provient d'une



jonction semiconductrice et est émise dans toutes les directions. Dans les diodes-lasers, la lumière est confinée dans un très court guide, aux extrémités semi-réfléchissantes.)

3) Couplage latéral

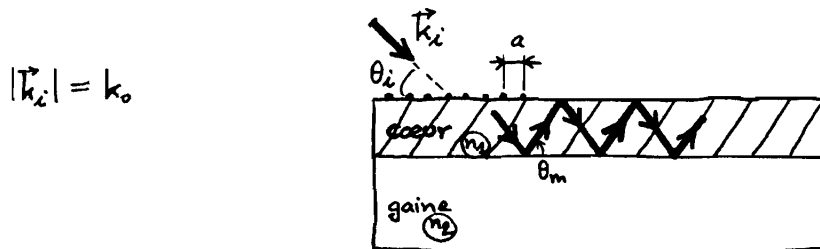
a) Il est possible de faire entrer la lumière dans un guide de façon latérale, par le biais d'un prisme. On considère ici un guide diélectrique plan, afin de présenter simplement le principe de ce couplage. Un prisme d'indice de réfraction n_p est placé



à la distance δ du guide. Une onde optique est incidente sur le prisme de telle sorte qu'elle subisse, à l'angle θ_p , une réflexion totale interne sur la face

parallèle au guide. À l'extérieur de cette face, le champ est exponentiellement décroissant lorsque l'on s'en éloigne, et se propage parallèlement à elle avec la constante de propagation $\beta_p = n_p k_0 \cos \theta_p$ (cf. § III-B-1). Si la distance δ est assez faible, l'onde est couplée à un mode du guide dont la constante de propagation $\beta_m = n_2 k_0 \cos \theta_m$ coïncide avec $\beta_p^{(*)}$. Le prisme agit ainsi comme un coupleur d'entrée; il peut aussi être utilisé comme coupleur de sortie, pour faire passer la lumière du guide vers l'espace libre.

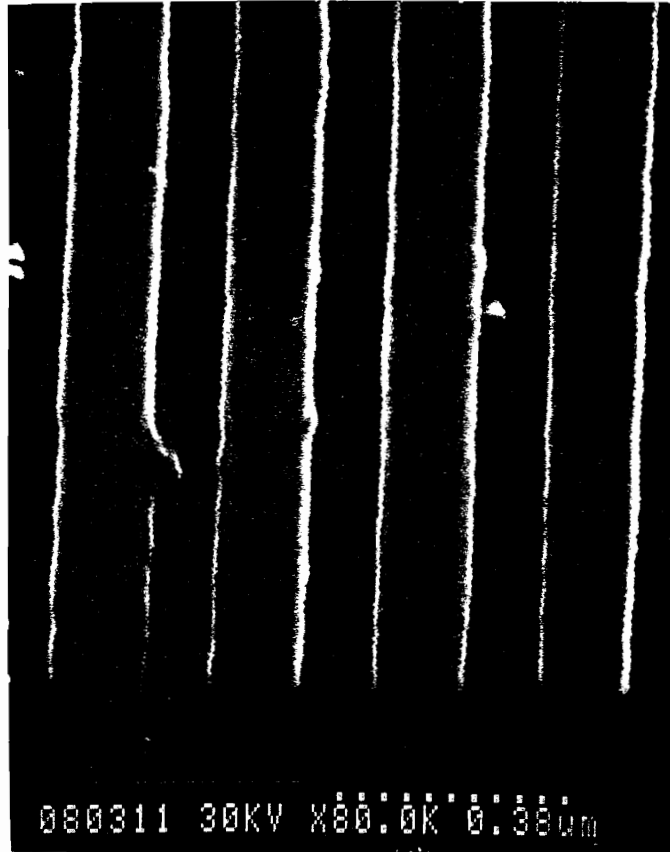
b) Un couplage latéral de lumière dans un guide peut aussi être réalisé avec un réseau gravé sur le guide. L'angle d'inclinaison de l'onde incidente est θ_i . Si a



est le pas du réseau, les angles de diffraction θ_q dans le cœur sont donnés par $k_1 a \cos \theta_q - k_0 a \cos \theta_i = q 2\pi$, q entier. En choisissant l'angle θ_i de telle sorte que $k_1 a \cos \theta_q = k_0 a \cos \theta_i + q \frac{2\pi}{a}$ coïncide, pour une valeur de q , avec la constante de propagation $\beta_m = k_1 a \cos \theta_m$ d'un mode guidé, on parvient à réaliser l'excitation de ce mode^(*). En fin de guide, un réseau permet de coupler de la lumière vers l'extérieur.

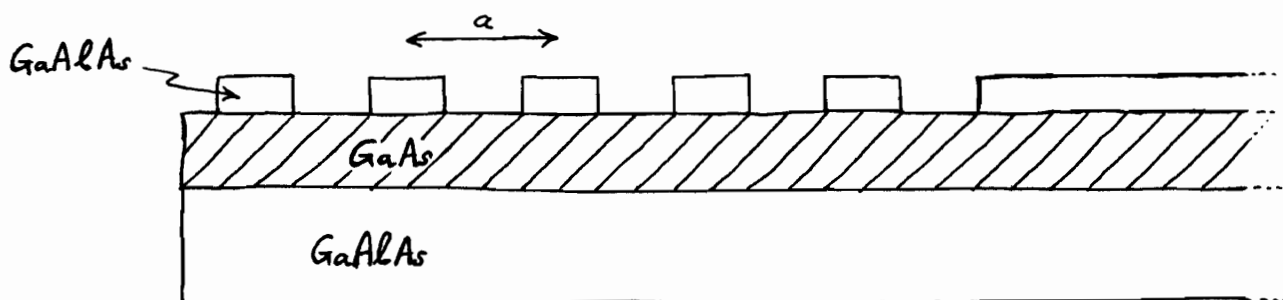
(*) Une simple réfraction air-cœur ne convient pas pour coupler de la lumière dans un guide: la plus faible inclinaison alors obtenue dans le cœur est $\theta_2 = \text{Arccos} \frac{1}{n_2}$, qui est trop grande pour correspondre à l'inclinaison d'un mode guidé ($\theta_c = \text{Arccos} \frac{n_2}{n_1} < \theta_2$).

La photographie ci-dessous, obtenue par microscopie électronique, représente en vue de dessus un réseau GaAlAs gravé sur un guide d'onde GaAs. Le

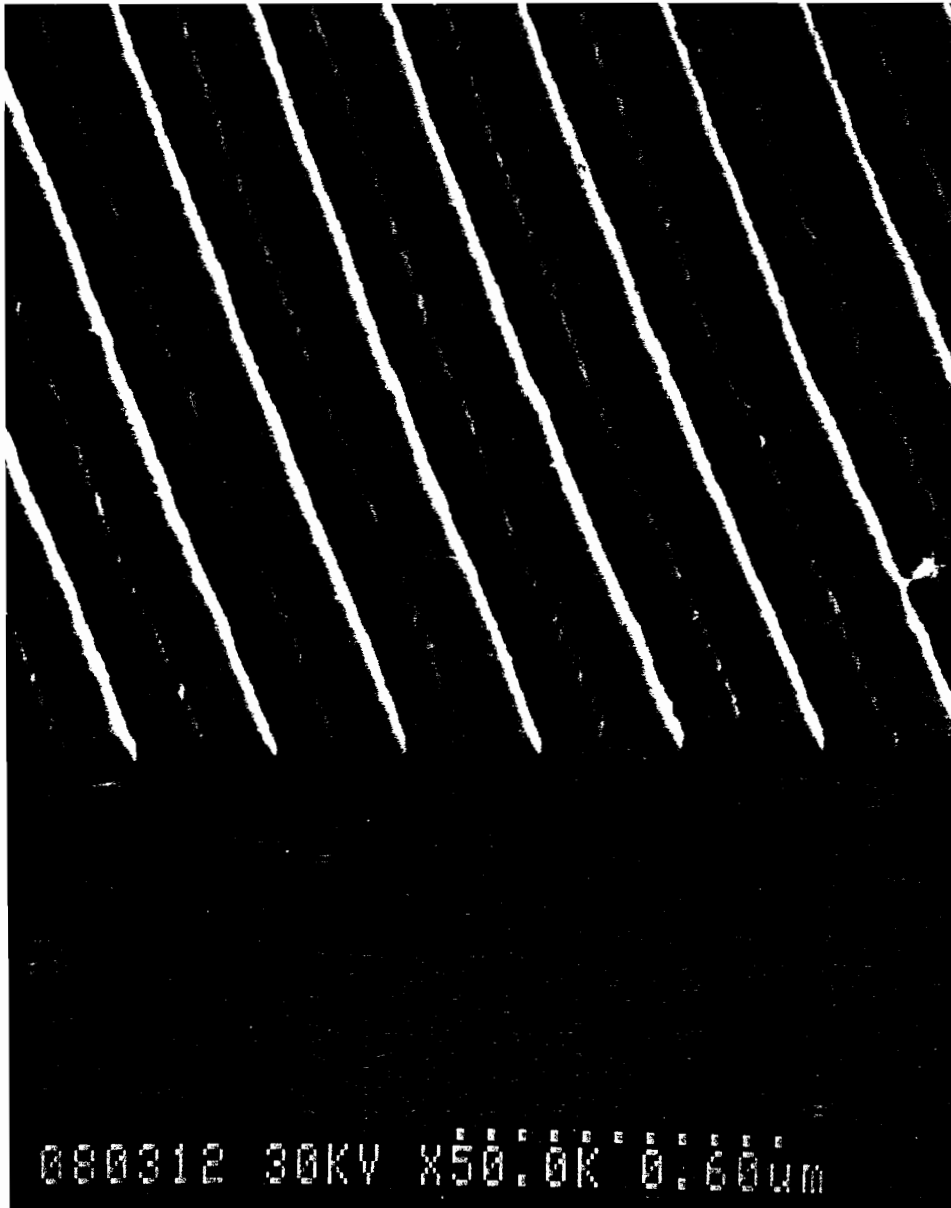


aimables prêt et automatisation
de R. Grousseau
(Groupe de Physique des Solides,
Jussieu, Paris)

réseau est fabriqué par lithographie ; son pas est $a = 2,7 \mu\text{m}$. Le profil longitudinal du guide d'onde est schématisé ci-dessous :



Le cliché ci-dessous représente le même système, observé à plus grande échelle :



aimables prêt et autorisation de R. Grousseau
(Groupe de Physique des Solides, Jussieu, Paris)

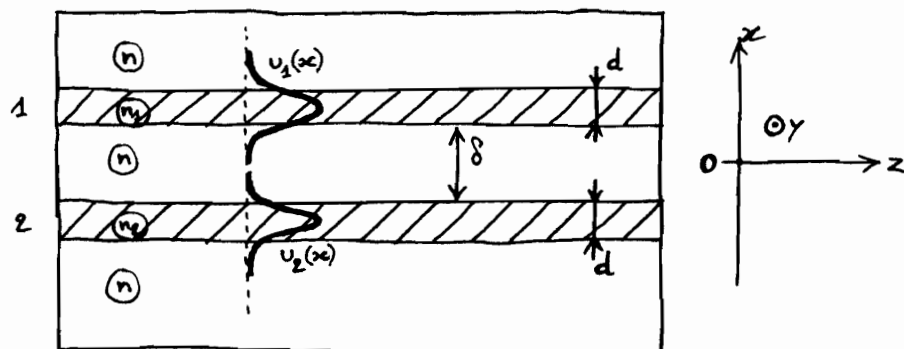
② Couplage entre guides

Une onde électromagnétique guidée n'est pas confinée strictement dans le cœur du guide, mais existe dans la gaine au voisinage immédiat du cœur (cf. § III-B-2-b).^(*)

Lorsque deux guides d'onde sont suffisamment proches pour que leurs modes aient un recouvrement spatial, la lumière peut passer d'un guide à l'autre. Cet effet est utilisé dans les coupleurs et dans les interrupteurs optiques.

1) Théorie de modes couplés

On considère deux guides diélectriques plans parallèles, d'indices de cœur n_1 et n_2 ; leurs cœurs ont une épaisseur d et sont séparés de δ . Le milieu qui



les entoure est d'indice de réfraction plus faible n ($n_1, n_2 > n$). Chaque guide d'onde, considéré en l'absence de l'autre, est supposé monomode ; le guide 1 supporte le mode TE de profil $u_1(x)$ et de constante de propagation β_1 , et le

(*) Cf. également § III-C-1.

mode TE supporté par le guide 2 est défini par $u_2(x)$ et β_2 .

Lorsque les profils $u_1(x)$ et $u_2(x)$ se recouvrent, la propagation de la lumière dans les deux guides parallèles doit être étudiée, dans l'absolu, en considérant la structure dans son ensemble. Il s'agit alors d'écrire les équations de Maxwell dans chaque milieu et d'utiliser les conditions aux limites pour déterminer les modes de propagation. Ces modes sont différents de ceux des deux guides considérés isolément. Cette analyse exacte est difficile à mener, et sort du cadre de ce cours.

Lorsque le recouvrement de $u_1(x)$ et $u_2(x)$ est faible, on peut utiliser une théorie de modes couplés. Dans cette théorie approchée, les modes dans chaque guide sont ^{supposés} inchangés, soit $u_1(x) e^{-i\beta_1 z}$ et $u_2(x) e^{-i\beta_2 z}$, et l'effet du couplage entre les guides est de modifier leur amplitude $a_1(z)$ et $a_2(z)$ au long de la propagation. On peut montrer (cf. Annexe IV, §3) que $a_1(z)$ et $a_2(z)$ suivent ^{alors} les deux équations différentielles couplées suivantes :

$$\begin{cases} a_1'(z) = -i \mathcal{C}_{12} \exp(i\Delta\beta z) a_2(z) \\ a_2'(z) = -i \mathcal{C}_{21} \exp(-i\Delta\beta z) a_1(z), \end{cases}$$

où $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2$ est le désaccord des constantes de propagation, et $\mathcal{C}_{12}, \mathcal{C}_{21}$ ^{sont} des coefficients de couplage (réels et positifs).^(*)

(*) L'étude de deux guides-rubans couplés conduit aux mêmes équations.

2) Coupleurs

Lorsque les deux guides du § précédent sont identiques, $n_1 = n_2$, $\beta_1 = \beta_2$ et

$\mathcal{C}_{12} = \mathcal{C}_{21} = \mathcal{C}_0$. Les équations d'évolution des amplitudes $a_1(z)$ et $a_2(z)$ deviennent :

$a_1'(z) = -i\mathcal{C}_0 a_2(z)$, $a_2'(z) = -i\mathcal{C}_0 a_1(z)$. Il vient alors $a_1''(z) + \mathcal{C}_0^2 a_1(z) = 0$, d'où

$$a_1(z) = A \cos \mathcal{C}_0 z + B \sin \mathcal{C}_0 z \quad \text{puis} \quad a_2(z) = \frac{i}{\mathcal{C}_0} a_1'(z) = -iA \sin \mathcal{C}_0 z + iB \cos \mathcal{C}_0 z.$$

Dans le cas où l'amplitude lumineuse entrant dans le guide 1 est $a_1(0)$ et où l'amplitude est nulle à l'entrée du guide 2 ($a_2(0) = 0$), on a $a_1(z) = a_1(0) \cos \mathcal{C}_0 z$ et

$$a_2(z) = -i a_1(0) \sin \mathcal{C}_0 z \quad \text{pour } z > 0.$$

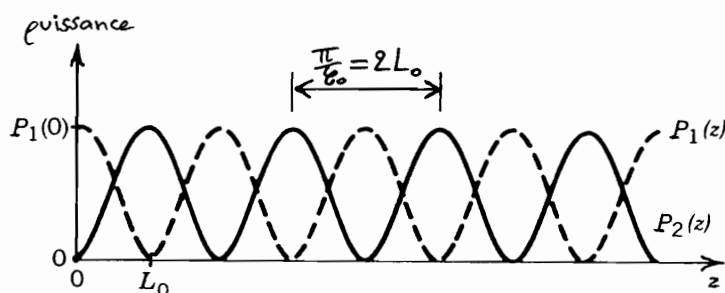
Les puissances optiques dans les guides 1 et 2 sont $P_1(z) \propto |a_1(z)|^2$ et $P_2(z) \propto |a_2(z)|^2$. Elles s'écrivent $P_1(z) = P_1(0) \cos^2 \mathcal{C}_0 z$ et $P_2(z) = P_1(0) \sin^2 \mathcal{C}_0 z$. La

puissance lumineuse s'échange ainsi intégralement entre les deux guides, avec la

période spatiale $\frac{\pi}{\mathcal{C}_0}$. Sur une longueur $L_0 = \frac{\pi}{2\mathcal{C}_0}$, appelée distance de transfert^(*),

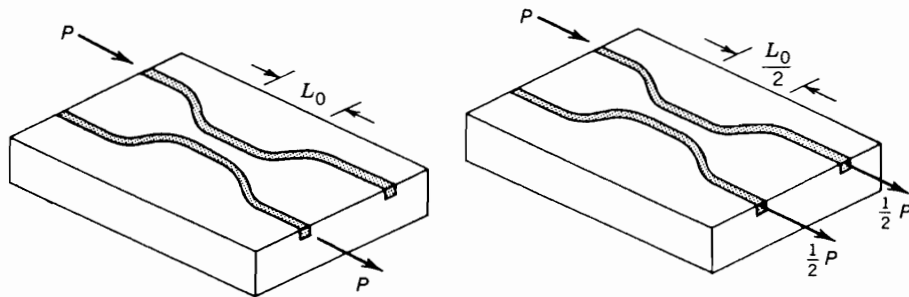
comprise entre $z=0$ et $z=L_0$, la puissance lumineuse passe entièrement du guide

1 au guide 2 :



(*) L_0 est aussi appelée longueur de couplage. Dans les guides Ti:LiNbO_3 , $L_0 \sim 1 \text{ mm}$.

Ainsi, deux guides diélectriques (non nécessairement plans) qui interagissent sur une longueur de transfert L_0 , échangent totalement leur puissance optique. Si l'interaction a lieu sur une longueur $L_0/2$, la puissance à l'entrée d'un guide se retrouve pour moitié à la sortie de l'autre ; un tel système est un coupleur 3 dB ($-10 \log_{10} \frac{1}{2} = 3 \text{ dB}$).



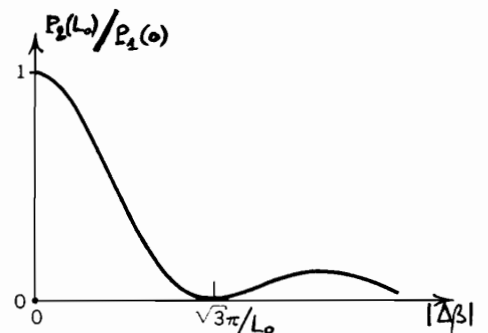
3) Commutateur

Lorsqu'une différence de constantes de propagation $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2$ est introduite entre les modes supportés par les guides plans en interaction — guides par ailleurs identiques —, les puissances lumineuses dans les guides deviennent (cf. Annexe IV, § 4) :

$$P_1(z) = P_1(0) \left\{ 1 - \frac{C_0^2}{\gamma^2} \sin^2 \gamma z \right\} \quad \text{et} \quad P_2(z) = P_1(0) \frac{C_0^2}{\gamma^2} \sin^2 \gamma z, \quad \text{où } \gamma = \sqrt{\left(\frac{\Delta\beta}{2}\right)^2 + C_0^2}.$$

Dans le cas où les guides interagissent sur une distance égale à la longueur de couplage L_0 , le taux de transfert de puissance du guide 1 vers

le guide 2 est
$$\frac{P_2(L_0)}{P_1(0)} = \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta\beta L_0}{\pi} \right)^2} \right)}{1 + \left(\frac{\Delta\beta L_0}{\pi} \right)^2}.$$



Le taux de transfert est maximal (et égal à 1) quand $\Delta\beta = 0$, décroît quand $|\Delta\beta|$ croît et s'annule en $|\Delta\beta| = \sqrt{3}\pi/L_0$ (qui correspond au premier zéro de $\sin^2 \gamma L_0$).

Si $|\Delta\beta|$ est commuté entre les valeurs 0 et $\sqrt{3}\pi/L_0$, la lumière est commutée du guide 2 au guide 1. Une telle commutation est réalisée par application d'un champ électrique, qui modifie par effet électro-optique l'indice de réfraction des guides (*).

© Dispositifs électro-optiques

1) Modulateur de phase

On considère un guide diélectrique fonctionnant en régime monomode. En première approximation, la constante de propagation du mode supporté par le guide est écrite

$\beta \approx n_1 \frac{2\pi}{\lambda_0}$, de la forme du nombre d'onde dans un milieu d'indice de réfraction n_1 ^{et} $\sqrt{\text{illimité}}$; cette hypothèse est plausible lorsque les indices de cœur n_1 et de gaine n_2 sont

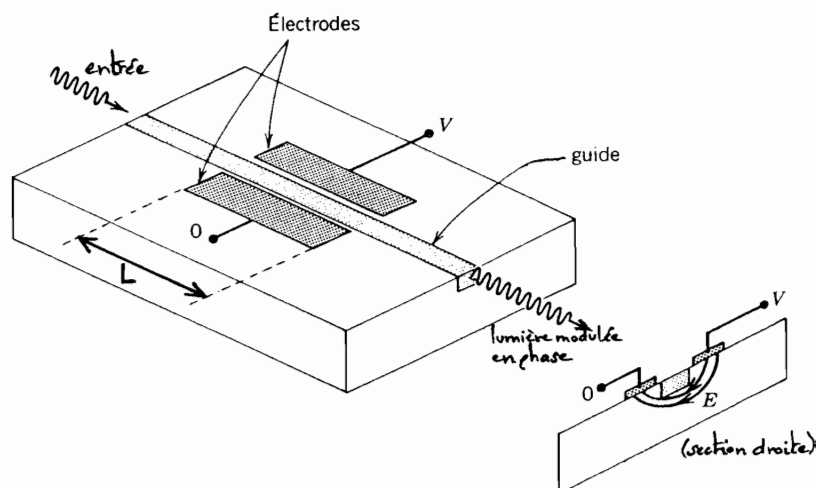
très proches l'un de l'autre ($\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \ll 1$) (cf. les relations de dispersion du guide

plan, § III-B-2-c : les β_m sont

comprises entre $n_2 \frac{\omega}{c}$ et $n_1 \frac{\omega}{c}$,

bornes qui se confondent à

la limite $\Delta \rightarrow 0$).

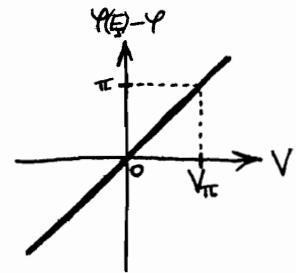


(*). Cf. § C-3.

Lorsque la lumière parcourt un tronçon de longueur L dans le guide, elle subit un décalage de phase $\varphi = \beta L \approx 2\pi n_1 \frac{L}{\lambda_0}$ entre l'entrée et la sortie de ce tronçon. Le guide est supposé être un milieu Pockels (c'est le cas de LiNbO_3); l'indice n_1 varie linéairement avec un champ électrostatique appliqué E_s : $n_1(E_s) = n_1 + a_1 E_s$, où $n_1 = n_1(E_s=0)$ et $a_1 = \frac{\partial n_1}{\partial E_s}(E_s=0)$ ^(*). Le décalage de phase devient, en présence de E_s sur une longueur L , $\varphi(E_s) = 2\pi n_1(E_s) \frac{L}{\lambda_0}$, donc $\varphi(E_s) - \varphi = 2\pi \frac{L}{\lambda_0} a_1 E_s$.

Si le champ E_s est obtenu en appliquant une tension V entre deux plaques métalliques séparées de la distance d , alors $E_s = \frac{V}{d}$, et l'on a $\varphi(E_s) - \varphi = \pi \frac{V}{V_\pi}$, avec la tension de demi-onde $V_\pi = \frac{d}{L} \frac{\lambda_0}{2a_1}$ ($V_\pi \sim$ quelques volts).

La phase de l'onde lumineuse dans le guide peut donc être modulée par variation de la tension V . Des fréquences ^{de modulation} de plusieurs GHz sont couramment atteintes.



2) Modulateur d'intensité

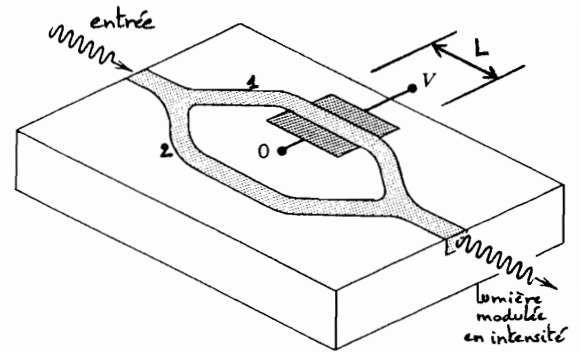
Un modulateur de phase permet de réaliser un modulateur d'intensité lumineuse en le plaçant sur l'un des bras d'un interféromètre de Mach-Zehnder. Si à l'entrée de l'interféromètre des puissances lumineuses identiques sont envoyées dans chacun des bras, l'intensité transmise à la sortie du dispositif est $I_{\text{sortie}} = I_{\text{max}} \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$,

(*) Le coefficient Pockels r est défini par $n_1(E_s)^{-2} = n_1^{-2} + r E_s$, d'où $a_1 = -\frac{1}{2} r n_1^3$.

où $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ est la différence des décalages de phase subis par la lumière dans son trajet sur chacun des bras. Sur le bras 1, on a

$$\varphi_1(E) = \varphi_1 + 2\pi \frac{L}{\lambda_0} a_1 E_s, \text{ d'où l'intensité lumineuse}$$

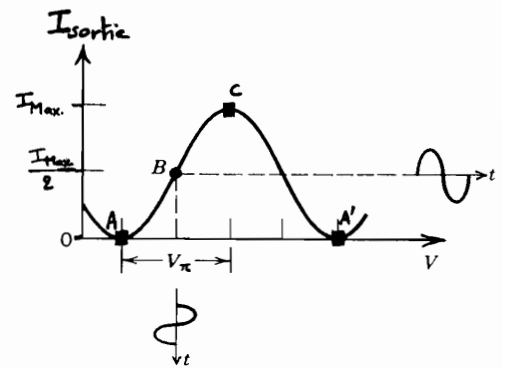
émergeante $I_{\text{sortie}} = I_{\text{Max.}} \cos^2 \left(\frac{\Delta\varphi_0}{2} + \frac{\pi}{2} \frac{V}{V_\pi} \right)$. I_{sortie} est tracé ci-dessous en fonction de la tension V , pour une différence de phase géométrique $\Delta\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2$ arbitraire.



Le dispositif peut fonctionner comme modulateur linéaire d'intensité, par modulation de la tension autour de la valeur V_B telle que $I_{\text{sortie}}(V_B) = \frac{I_{\text{Max.}}}{2}$:

$$I_{\text{sortie}}(V_B + \delta V(t)) = \frac{I_{\text{Max.}}}{2} + \frac{\partial I_{\text{sortie}}}{\partial V}(V_B) \delta V(t) + O(\delta V(t)^3),$$

soit la modulation d'intensité $\delta I_{\text{sortie}}(t) = \frac{\pi}{2} I_{\text{Max.}} \frac{\delta V(t)}{V_\pi} + O(\delta V^3)$, linéaire en $\delta V(t)$ avec une excellente approximation lorsque $|\delta V(t)| \ll V_\pi$.



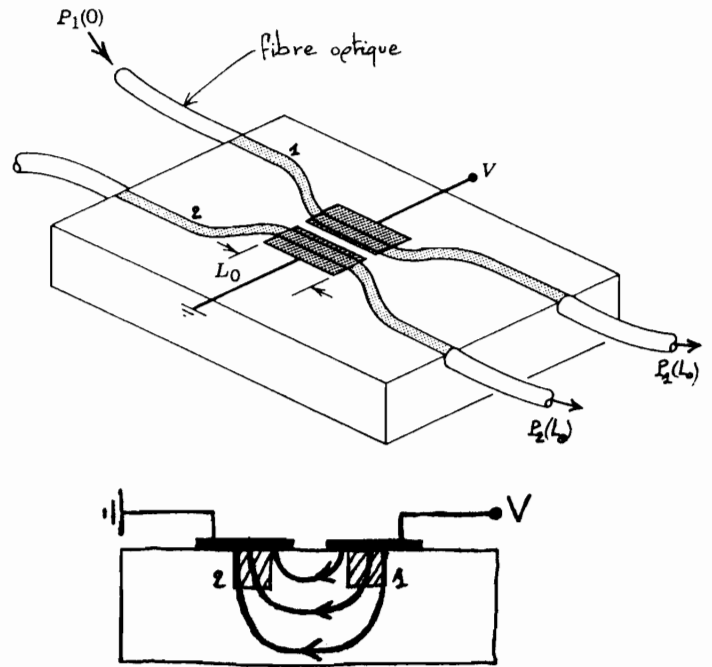
Le dispositif peut également faire fonction d'interrupteur optique : une tension appliquée V_c permet d'allumer la lumière en sortie ; l'application de V_A (ou $V_{A'}$) permet de l'éteindre.

3) Commutation électro-optique

On a vu au paragraphe B-3 que deux guides d'onde monomodes interagissant sur une longueur de couplage L_0 se transfèrent de la lumière de l'un à l'autre, avec un taux

de transfert final $\frac{P_2(L_0)}{P_1(0)} = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta\beta L_0}{\pi}\right)^2}\right) / \left\{1+\left(\frac{\Delta\beta L_0}{\pi}\right)^2\right\}$ dépendant de la différence $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2$ des constantes de propagation dans chaque guide.

Les guides sont identiques, et $\Delta\beta \neq 0$ est réalisé par l'application d'un champ électrique. Dans la géométrie de la figure, une tension V entre les plaques métalliques crée un champ $E_s = \frac{V}{d}$ dans le guide 1 et $-\frac{V}{d}$ dans le guide 2 (le champ électrique est vers le bas dans

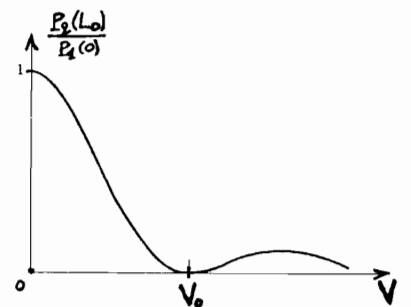


le guide 1 et vers le haut dans le guide 2 ; d est une distance effective). Dans la région où règne le champ, les indices de réfraction des guides sont $n_1(E_s) = n_1 + a_1 E_s$ et $n_2(E_s) = n_1 + a_1(-E_s)$; on tire $\Delta\beta = (n_1(E_s) - n_2(E_s)) \frac{2\pi}{\lambda_0} = 2a_1 \frac{V}{d} \frac{2\pi}{\lambda_0}$.

En définissant la tension de commutation V_0 comme la tension pour laquelle $\Delta\beta = \frac{\sqrt{3}\pi}{L_0}$, qui réalise un taux de transfert $\frac{P_2(L_0)}{P_1(0)} = 0$, il vient $V_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d}{L_0} \frac{\lambda_0}{2a_1}$

($V_0 \sim$ quelques volts). Le taux de transfert en fonction de la tension s'écrit $\frac{P_2(L_0)}{P_1(0)} = \frac{\sin^2\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{1+3\left(\frac{V}{V_0}\right)^2}\right]}{1+3\left(\frac{V}{V_0}\right)^2}$. Quand

$V=0$, toute la lumière injectée dans le guide 1 sort dans le guide 2 ; lorsque $V=V_0$, elle ressort intégralement



dans le guide 1 (après être partiellement passée par le guide 2). Un tel dispositif est dénommé coupleur directionnel électro-optique. Sa vitesse de commutation peut facilement atteindre plusieurs GHz.

Les figures non manuscrites des paragraphes B, C et A IV-4 sont tirées de
Saleh, Teich - Fundamentals of Photonics (Wiley, 1991).

La photographie expérimentale du paragraphe B-2 est extraite de
Ghatak, Thyagarajan - Optical Electronics (Cambridge U.P., 1989).

Annexe IV

1) Excitation des modes TE d'un guide plan

On considère les modes TE_m d'un guide diélectrique plan, de profils transverses $u_m(x)$ et de constantes de propagation β_m (cf. p. II-4). Si une source lumineuse

extérieure fait se propager un champ électrique $E_y(x, z) = \sum_m a_m u_m(x) e^{-i\beta_m z}$

dans le guide, c'est que à l'entrée ^{$z=0$} de ce guide la distribution de champ

électrique de la source $s(x)$, polarisé suivant \hat{y} , se projette sur les profils $u_m(x)$

avec les poids (complexes) a_m : $s(x) = \sum_{m'} a_{m'} u_{m'}(x)$. En multipliant cette

relation par $u_m(x)$, puis en intégrant sur x , on trouve, en utilisant la

propriété d'orthogonalité des $u_m(x)$ ($\int dx u_m(x) u_{m'}(x) = 0$ si $m \neq m'$, cf. § 2) :

$$a_m = \int dx u_m(x) s(x) / \int dx u_m(x)^2.$$

a_m est proportionnel à la fonction de corrélation de $s(x)$ et $u_m(x)$, $\int dx u_m(x) s(x)$.

2) Orthogonalité des modes TE d'un guide plan

On se place dans la situation où un champ électrique superposition de deux

modes TE se propage dans le guide plan : $E_y(x, z) = A_1 u_1(x) e^{-i\beta_1 z} + A_2 u_2(x) e^{-i\beta_2 z}$.

Le champ magnétique associé est donné par l'équation de Maxwell $\text{rot } \vec{E} = -i\omega \vec{B}$.

Le champ électromagnétique ^{physique} $\vec{E}(x,z,t) = \Re e[\vec{E}(x,z)e^{i\omega t}]$, $\vec{B}(x,z,t) = \Re e[\vec{B}(x,z)e^{i\omega t}]$

obéit à l'identité de Poynting $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r(x) \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) + \text{div} \vec{S} = 0$ (qui est une

équation de conservation ^{locale} de l'énergie électromagnétique, dérivée des équations de

Maxwell), où $\epsilon_r(x)$ ^{$= n(x)^2$} est le profil de permittivité du guide plan et $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$ est

le vecteur de Poynting. Moyennée sur une période du champ, $\frac{2\pi}{\omega}$, l'identité de

Poynting devient $\text{div} \langle \vec{S} \rangle = 0$, où $\langle \vec{S} \rangle$ est la moyenne temporelle du vecteur

de Poynting : $\langle \vec{S} \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt \vec{S}$.

Pour le champ électromagnétique considéré, le champ électrique $E_y(x,z) = A_1 u_1(x) e^{-i\beta_1 z} + A_2 u_2(x) e^{-i\beta_2 z}$, l'égalité $\text{div} \langle \vec{S} \rangle = 0$ s'écrit, en utilisant $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \Re e(\vec{E}^* \times \vec{B})$

et tous calculs faits : $\text{Im}[\beta_1^2 A_1 A_2^* e^{-i(\beta_1 - \beta_2)z} + \beta_2^2 A_2^* A_1 e^{i(\beta_1 - \beta_2)z}] \int dx u_1(x) u_2(x) = 0$ ^(*).

Comme $\beta_1 \neq \beta_2$ pour deux modes TE différents du guide plan, la seule façon

que cette dernière égalité soit vérifiée pour tout z est que $\int dx u_1(x) u_2(x) = 0$.

3) Couplage de deux guides diélectriques plans

On considère les deux guides plans parallèles de la figure du § B-1. Pour

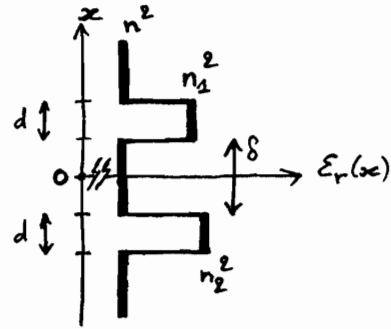
un champ électrique $E(x,z) e^{i\omega t} \hat{y}$ existant dans la structure, les équations de

Maxwell conduisent à $\Delta E + k_0^2 E = -\mu_0 \omega^2 \mathcal{P}$, où la polarisation \mathcal{P} vaut

(*) Soit $(\beta_1^2 - \beta_2^2) \text{Im}[A_1 A_2^* e^{-i(\beta_1 - \beta_2)z}] \int dx u_1(x) u_2(x) = 0$.

$\mathcal{P}(x,z) = \epsilon_0 (\epsilon_r(x) - 1) \mathcal{E}(x,z)$; la constante diélectrique $\epsilon_r(x)$ a le profil suivant :

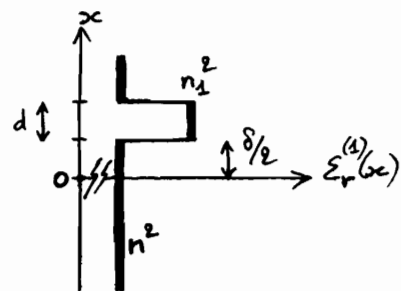
Dans le cas où les guides sont supposés faiblement couplés, le champ dans le guide 1 (et à son voisinage)



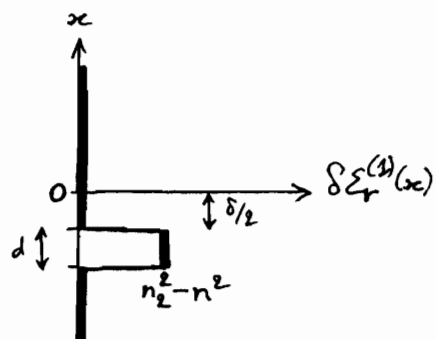
est pris égal à $\mathcal{E}_1(x,z) = a_1(z) u_1(x) \exp(-i\beta_1 z)$: le profil $u_1(x)$ et la constante de propagation β_1 sont ceux du guide monomode 1 considéré seul, et l'amplitude $a_1(z)$ est admise à varier avec z , lentement à l'échelle de $\beta_1^{-1} \sim \lambda_0$. De même, le champ dans et autour du guide monomode 2 est pris sous la forme $\mathcal{E}_2(x,z) = a_2(z) u_2(x) \exp(-i\beta_2 z)$, où l'amplitude $a_2(z)$ varie lentement. On cherche les équations pour les amplitudes $a_1(z)$ et $a_2(z)$.

La constante diélectrique $\epsilon_r^{(1)}(x)$ du guide 1 considéré seul a l'allure :

La polarisation est alors $\mathcal{P}^{(1)} = \epsilon_0 (\epsilon_r^{(1)} - 1) \mathcal{E}^{(1)}$
 et $\mathcal{E}^{(1)}(x,z) = u_1(x) e^{-i\beta_1 z}$ est solution
 de $\Delta \mathcal{E}^{(1)} + k_0^2 \mathcal{E}^{(1)} = -\mu_0 \omega^2 \mathcal{P}^{(1)}$.



La présence du guide 2 apporte une modification $\delta \epsilon_r^{(1)} = \epsilon_r - \epsilon_r^{(1)}$ à la constante diélectrique $\epsilon_r^{(1)}$. $\delta \epsilon_r^{(1)}(x)$ est tracée ci-contre :



Il y a donc une contribution supplémentaire à

la polarisation, valant $\delta \mathcal{P}^{(1)} = \epsilon_0 \delta \mathcal{E}_r^{(1)}(x) (\xi_1 + \xi_2) \approx \epsilon_0 \delta \mathcal{E}_r^{(1)}(x) \xi_2$, le champ ξ_1 étant négligeable devant ξ_2 dans le cœur du guide 2. La polarisation totale est donc $\mathcal{P}_1 = \epsilon_0 (\mathcal{E}_r^{(1)}(x) - 1) \xi_1 + \epsilon_0 \delta \mathcal{E}_r^{(1)}(x) \xi_2$.

En injectant dans $\Delta \xi_1 + k_0^2 \xi_1 = -\mu_0 \omega^2 \mathcal{P}_1$ les formes pressenties pour les champs $\xi_1(x, z)$ et $\xi_2(x, z)$, on obtient $[a_1''(z) - 2i\beta_1 a_1'(z)] v_1(x) e^{-i\beta_1 z} = \dots$

$\dots = -k_0^2 \delta \mathcal{E}_r^{(1)}(x) a_2(z) v_2(x) e^{-i\beta_2 z}$. $a_1(z)$ variant lentement, a_1'' est négligeable devant $\beta_1 a_1'$; la multiplication des deux membres par $v_2(x)$ et l'intégration sur

x donnent finalement : $a_1'(z) = -i \mathcal{C}_{12} e^{i\Delta\beta z} a_2(z)$, avec $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2$

et le coefficient de couplage $\mathcal{C}_{12} = \frac{k_0^2}{2\beta_1} (n_2^2 - n_1^2) \int_{-\delta/2}^{\delta/2} dx v_1(x) v_2(x) / \int dx v_1(x)^2$.

En examinant de la même façon la perturbation apportée par le guide 1 sur

le guide 2, on obtient : $a_2'(z) = -i \mathcal{C}_{21} e^{-i\Delta\beta z} a_1(z)$, où le coefficient \mathcal{C}_{21}

vaut $\mathcal{C}_{21} = \frac{k_0^2}{2\beta_2} (n_1^2 - n_2^2) \int_{\delta/2}^{\delta/2+d} dx v_2(x) v_1(x) / \int dx v_2(x)^2$. L'étude de l'échange de

puissance lumineuse entre les deux guides (cf. §4) permet de lier \mathcal{C}_{12} et \mathcal{C}_{21} .

4) Échange de puissance lumineuse entre deux guides plans

On considère les deux guides diélectriques plans, parallèles, abordés au § B.1. Les

deux guides sont supposés monomodes, lorsqu'ils sont pris isolément. En régime de

couplage faible entre les deux guides, les amplitudes $a_1(z)$ et $a_2(z)$ des modes

supportés par le guide 1 et le guide 2 respectivement, suivent les équations

couplées (cf. §3 précédent) : $a_1'(z) = -i\epsilon_{12} e^{i\Delta\beta z} a_2(z)$, $a_2'(z) = -i\epsilon_{21} e^{-i\Delta\beta z} a_1(z)$,

où $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2$ et $\epsilon_{12}, \epsilon_{21}$ sont des constantes de couplage (réelles positives).

Le changement de fonctions $a_1(z) = A_1(z) e^{i\frac{\Delta\beta}{2}z}$, $a_2(z) = A_2(z) e^{-i\frac{\Delta\beta}{2}z}$

permet d'obtenir un système linéaire à coefficients constants :

$$\begin{pmatrix} A_1(z) \\ A_2(z) \end{pmatrix}' + iM \begin{pmatrix} A_1(z) \\ A_2(z) \end{pmatrix} = 0, \quad M = \begin{pmatrix} \frac{\Delta\beta}{2} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & -\frac{\Delta\beta}{2} \end{pmatrix}. \text{ La diagonalisation}$$

de la matrice M fournit la solution générale comme superposition de

$$e^{-i\gamma z} \begin{pmatrix} \frac{\Delta\beta}{2} + \gamma \\ \epsilon_{21} \end{pmatrix} \text{ et } e^{+i\gamma z} \begin{pmatrix} \frac{\Delta\beta}{2} - \gamma \\ \epsilon_{21} \end{pmatrix}, \text{ avec } \gamma = \sqrt{\left(\frac{\Delta\beta}{2}\right)^2 + \epsilon^2} \text{ et } \epsilon = \sqrt{\epsilon_{12}\epsilon_{21}}.$$

Dans le cas où l'amplitude de la lumière entrant dans le guide 1 est $a_1(0)$

et où aucune lumière n'entre dans le guide 2, $a_2(0) = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} a_1(z) = a_1(0) e^{i\frac{\Delta\beta}{2}z} \left\{ \cos \gamma z - i \frac{\Delta\beta}{2\gamma} \sin \gamma z \right\} \\ a_2(z) = a_1(0) \frac{\epsilon_{21}}{i\gamma} e^{-i\frac{\Delta\beta}{2}z} \sin \gamma z. \end{cases}$$

La puissance lumineuse dans le guide 1 est le flux du vecteur de Poynting sur une section droite du guide

moyen $\langle \vec{S}_1 \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \mathcal{P} e (\vec{E}_1^* \times \vec{D}_1)$ associé au mode qui se propage dans ce guide :

$$\vec{E}_1(x, z) = a_1(z) u_1(x) e^{-i\beta_1 z} \hat{y}, \quad \vec{D}_1 = \frac{i}{\omega} \text{rot} \vec{E}_1. \text{ Il vient } \langle S_{1z} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\beta_1}{\omega} u_1(x)^2 |a_1(z)|^2,$$

d'où la puissance $P_1(z) \propto \beta_1 \left(\int dx u_1(x)^2 \right) |a_1(z)|^2$. De la même façon, la puissance

lumineuse dans le guide 2 est $P_2(z) \propto \beta_2 \left(\int dx u_2(x)^2 \right) |a_2(z)|^2$ (avec la même

constante de proportionnalité)

Lorsque seul le guide 1 est éclairé en entrée, l'usage des expressions précédentes de

$a_1(z)$ et $a_2(z)$ donne $P_1(z) \propto \beta_1 \left(\int dx u_1(x)^2 \right) |a_1(0)|^2 \left\{ 1 - \frac{\xi^2}{\gamma^2} \sin^2 \gamma z \right\}$ et

$P_2(z) \propto \beta_2 \left(\int dx u_2(x)^2 \right) |a_1(0)|^2 \frac{\xi_{21}^2}{\gamma^2} \sin^2 \gamma z$. Par conservation de l'énergie électromagnétique,

$P_1(z) + P_2(z) = Cte = P_1(0)$, d'où $\beta_1 \left(\int dx u_1(x)^2 \right) \xi_{12} = \beta_2 \left(\int dx u_2(x)^2 \right) \xi_{21}$.

Finalement, les puissances lumineuses dans les guides s'écrivent :

$$\begin{cases} P_1(z) = P_1(0) \left\{ 1 - \frac{\xi^2}{\gamma^2} \sin^2 \gamma z \right\} \\ P_2(z) = P_1(0) \frac{\xi^2}{\gamma^2} \sin^2 \gamma z . \end{cases}$$

Une fraction $\frac{\xi^2}{\gamma^2} = \frac{\xi^2}{(\frac{\Delta\beta}{2})^2 + \xi^2}$ de la

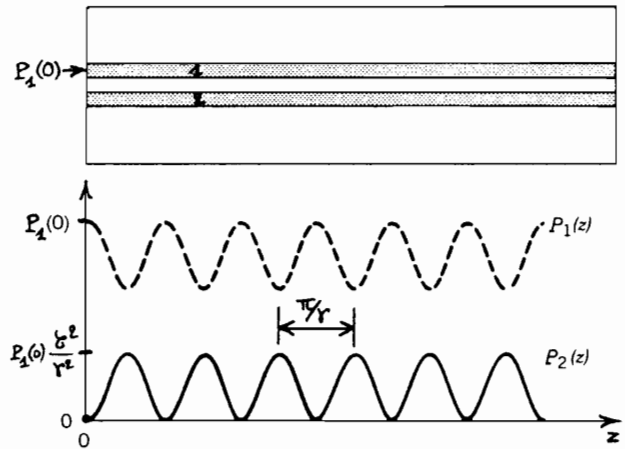
puissance $P_1(0)$ s'échange donc entre les

deux guides, avec la période spatiale $\frac{\pi}{\gamma}$.

L'échange de puissance est intégral lorsque les constantes de propagation coïncident ($\Delta\beta =$

$\beta_1 - \beta_2 = 0$); la période est alors $\frac{\pi}{\xi}$; au bout d'une distance $\frac{\pi}{2\xi}$, toute la

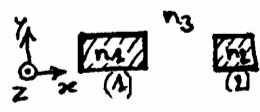
puissance lumineuse injectée à l'entrée du guide 1 se trouve dans le guide 2.



OPTIQUE GUIDÉE : TD IV

1 - Guides diélectriques couplés

Deux guides diélectriques à section rectangulaire sont assez proches l'un de l'autre pour être couplés. Leurs indices de cœur sont n_1 et n_2 ; ils sont entourés d'un milieu d'indice n_3 ($n_1, n_2 > n_3$).

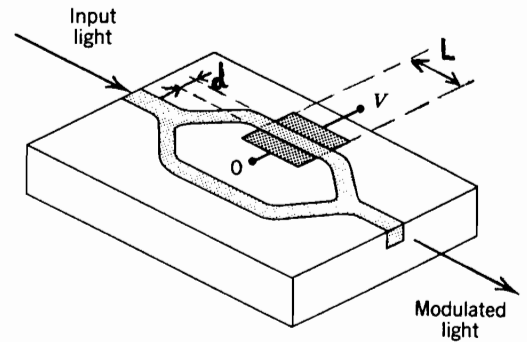


Isolé, le guide (1) (resp. (2)) est monomode et propage le champ électrique de structure $\vec{U}_1(x, y)$ (resp. $\vec{U}_2(x, y)$) avec la constante de propagation β_1 (resp. β_2). En régime de couplage faible, le champ électrique dans la structure est cherché sous la forme $\vec{E}(x, y, z) = a_1(z) \vec{U}_1(x, y) e^{-i\beta_1 z} + a_2(z) \vec{U}_2(x, y) e^{-i\beta_2 z}$, où les amplitudes $a_1(z)$ et $a_2(z)$ sont lentement variables.

Écrire l'équation de Helmholtz suivie par $\vec{E}(x, y, z)$. En déduire que les équations d'évolution de $a_1(z)$ et $a_2(z)$ sont $a_1'(z) = -i\mathcal{C}_{12} e^{+i\Delta\beta z} a_2(z)$, $a_2'(z) = -i\mathcal{C}_{21} e^{-i\Delta\beta z} a_1(z)$, où l'on déterminera les coefficients de couplage \mathcal{C}_{12} et \mathcal{C}_{21} ($\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2$).

2 - Modulateur d'intensité

Un interféromètre de Mach-Zehnder intégré est utilisé en modulateur linéaire d'intensité. La lumière entrante est supposée se séparer équitablement sur les deux bras de l'interféromètre, et se superposer à poids égaux en sortie du dispositif. Les deux bras ont la même longueur ; un champ électrique $E = \frac{V}{d}$ est appliqué sur une longueur L de l'un des deux.



Montrer que l'intensité lumineuse en sortie du dispositif est $I_f = I_{max} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{V}{V_\pi}\right)$, où $V_\pi = \frac{d}{L} \frac{\lambda_0}{rn^3}$ est la tension de demi-onde (n est l'indice du guide, r son coefficient Pockels). Pour LiNbO_3 à $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$, $r = 30,9 \text{ pm/V}$ et $n = 2,2$; que

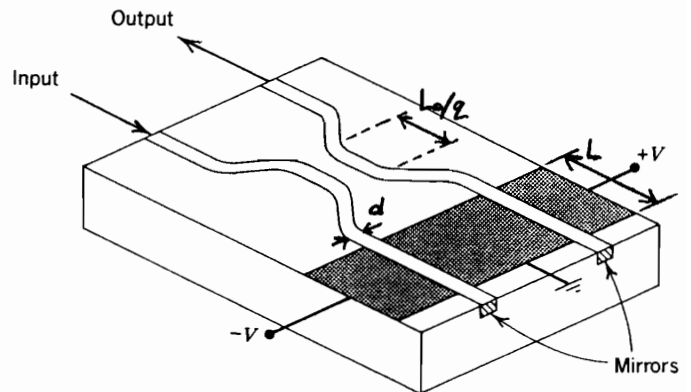
vaut V_{π} lorsque $d = 2 \mu\text{m}$ et $L = 0,4 \text{ mm}$?

Pour quelle(s) tension(s) de polarisation le dispositif fonctionne-t-il en modulateur linéaire d'intensité ? Quelle est la sensibilité de modulation (variation de transmittance par unité de variation de tension) ?

3 - Modulateur d'intensité "push-pull"

Le modulateur d'intensité ci-contre utilise deux modulateurs de phase et un coupleur 3 dB (L_0 : distance de transfert). L'onde entrante est séparée en deux ondes de mêmes amplitudes ;

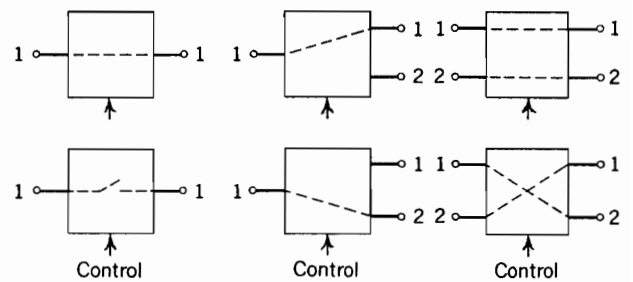
chacune est modulée en phase, réfléchiée sur un miroir, modulée en phase une nouvelle fois ; les deux ondes de retour sont additionnées par le coupleur directionnel, pour former l'onde de sortie.



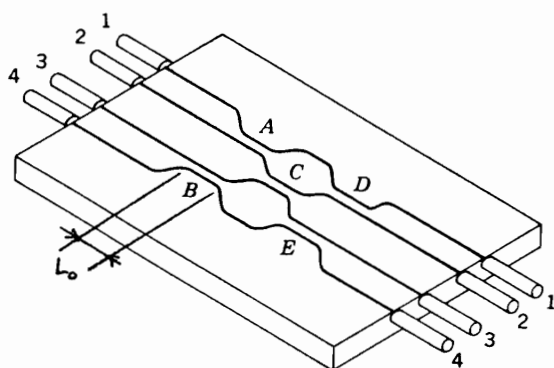
Trouver l'expression de l'intensité de l'onde sortante en fonction de la tension, la longueur d'onde, les dimensions et les paramètres physiques du modulateur de phase.

4 - Commutateurs électro-optiques

Quelle(s) dispositif(s) électro-optique(s) peuvent faire fonction de commutateur 1x1 ? de commutateur 1x2 ? de commutateur 2x2 ?



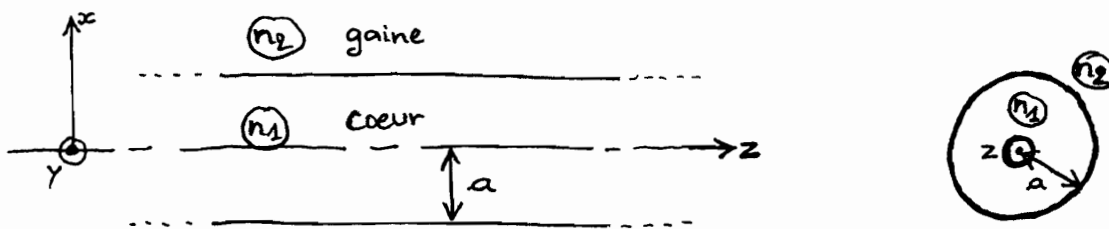
Le dispositif ci-dessous est un commutateur 4x4 utilisant cinq coupleurs directionnels électro-optiques A, B, C, D et E. Quelles sont les entrées-sorties



lorsque $V_A = V_E = V_0$, $V_B = V_C = V_D = 0$ (V_0 : tension de commutation) ? Quelles sont les tensions à appliquer pour que les entrées-sorties soient : $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$, $3 \rightarrow 3$, $4 \rightarrow 4$?

V - Fibres optiques I

Une fibre optique est un guide d'onde diélectrique de symétrie cylindrique. Le cœur central, d'indice de réfraction n_1 et de rayon a , guide la lumière; il est entouré d'une gaine optique d'indice n_2 , $n_2 < n_1$. La fibre optique est le plus



largement utilisé des guides diélectriques, du fait de son utilisation ~~aujourd'hui~~ ^{terrestres} systématique en télécommunications — domaine pour lequel elle a été développée depuis le début des années 1970.

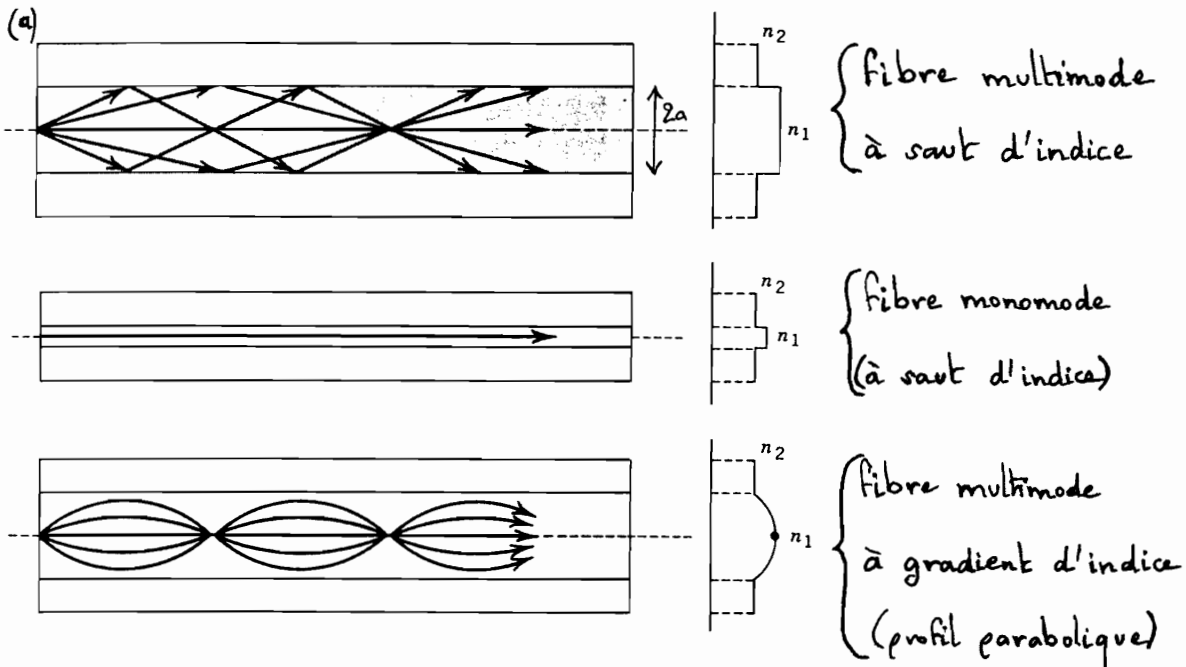
Les principes du guidage de la lumière dans une fibre optique sont essentiellement les mêmes que ceux qui s'appliquent dans un guide diélectrique plan (cf. § III); la seule nouveauté est la géométrie cylindrique, qui a l'avantage de confiner la lumière à deux dimensions. Dans les deux types de guide, la lumière se propage sous forme de modes; chaque mode est caractérisé par sa constante de propagation et sa structure spatiale, qui progresse sans déformation avec une vitesse de groupe qui lui est propre. Lorsque le diamètre $2a$ du cœur de la fibre est suffisamment petit, un seul mode de propagation est permis et la fibre est dite monomode. Les fibres

de grand diamètre ^{de cœur} sont des fibres multimodes.

Un pulse lumineux envoyé dans une fibre multimode répartit sa puissance sur les modes de propagation, qui ont des vitesses de groupe différentes dans la fibre. Il en résulte un élargissement temporel du ^{pulse lumineux} détecté en fin de fibre. Cet effet de dispersion modale limite le taux de répétition avec lequel des pulses lumineux peuvent être envoyés à l'entrée d'une fibre et séparés temporellement en sortie, c'est-à-dire qu'il limite le débit d'information d'un système de communication par fibre optique (cf. § VI).

Une façon d'éviter tout à fait le phénomène de dispersion modale consiste à employer une fibre monomode^(*); c'est la solution pratiquée actuellement dans les communications à longue distance. Cependant, une solution intermédiaire consiste à utiliser toujours une fibre multimode, mais dont le cœur a un indice spatialement variable, compris entre une valeur maximale en son centre $r=0$ et une valeur minimale, égale à l'indice de gaine, à sa périphérie $r=a$. Une telle fibre est appelée fibre à gradient d'indice, tandis qu'une fibre dont l'indice de cœur est uniforme est dénommée fibre à saut d'indice. Les vitesses de groupe des modes d'une fibre à gradient d'indice sont égalisées au mieux lorsque le profil d'indice du cœur est

(*) Une autre forme de dispersion, plus faible, intervient alors (cf. § VI).



parabolique^(*); la dispersion modale est alors fortement réduite par rapport à celle d'une fibre ^{multimode} à saut d'indice.

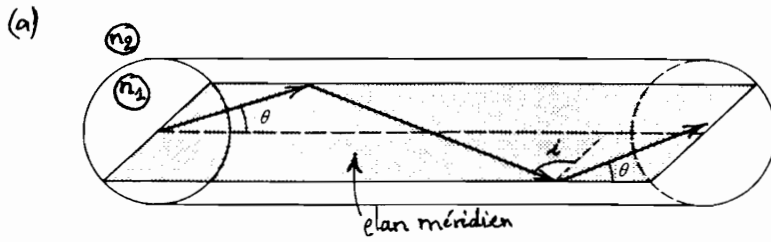
Après une brève description du guidage des rayons lumineux dans une fibre à saut ou à gradient d'indice, ce chapitre traite des modes optiques dans une fibre à saut d'indice. Le chapitre suivant abordera le cas d'une fibre multimode à gradient d'indice, et présentera les phénomènes de dispersion et d'atténuation.

A) Guidage des rayons lumineux dans les fibres optiques multimodes ($\lambda_0 \ll a$)

1) Fibre à saut d'indice

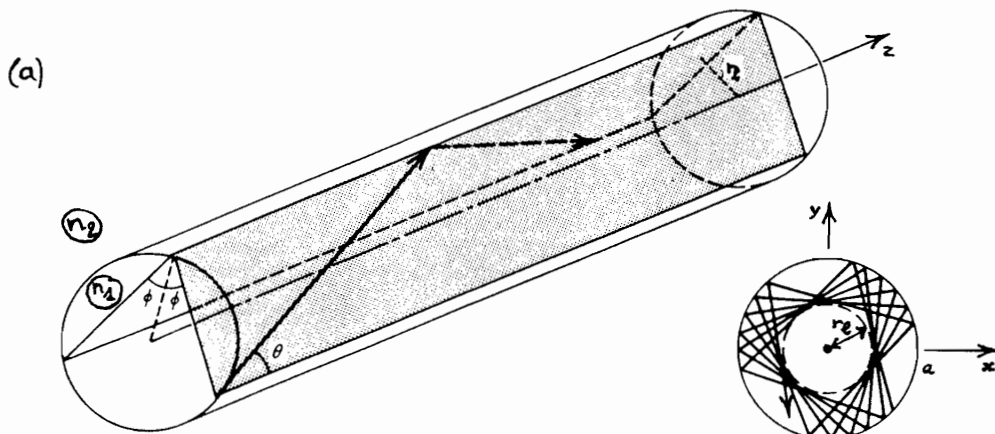
a) La condition de guidage est simple à voir pour un rayon méridien. Le plan méridien qui le contient est le plan d'incidence du rayon sur le dioptré cœur-gaine; après réflexion,

(*) cf. § VI-A-3



Le rayon reste dans ce même plan, en gardant la même inclinaison θ avec l'axe de la fibre. Tout se passe donc comme dans un guide diélectrique plan (cf. § III-A) : un rayon méridien est guidé le long de la fibre si son angle d'incidence $i = \frac{\pi}{2} - \theta$ est plus grand que l'angle d'incidence critique $i_c = \text{Arcsin} \frac{n_2}{n_1}$, ie si son inclinaison θ est plus faible que l'inclinaison critique $\theta_c = \text{Arccos} \frac{n_2}{n_1}$. Les indices de réfraction n_1 et n_2 sont usuellement très proches l'un de l'autre, et les rayons guidés sont paraxiaux : $\theta < \theta_c \ll 1$.

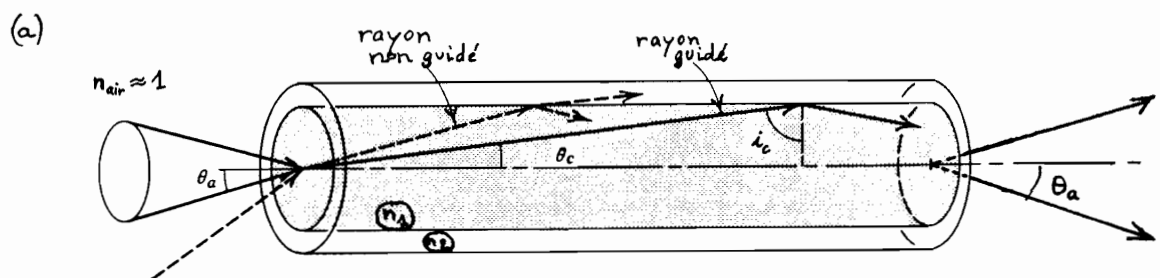
b) Un rayon quelconque dans le cœur est contenu dans un plan parallèle à l'axe de la fibre, faisant un angle ϕ avec la normale au dioptre cœur-gaine. Le rayon est caractérisé par son inclinaison θ avec l'axe et par l'angle ϕ ; ses réflexions successives sont contenues dans des plans ayant le même angle ϕ , et ont la même inclinaison θ . La projection, dans un plan transverse, de la trajectoire d'un rayon lumineux guidé le long de la fibre, est un polygone régulier, non nécessairement fermé, contenu entre le



cylindre-limite $r=r_2$ et la frontière cœur-gaine $r=a$.

L'angle d'incidence i_ϕ d'un rayon quelconque sur le dioptré cœur-gaine est donné par $\cos i_\phi = \cos i_{\phi=0} \cos \phi = \sin \theta \cos \phi$; i_ϕ est plus grand que $i_{\phi=0} = \frac{\pi}{2} - \theta$, et un rayon quelconque est guidé si son inclinaison est plus faible que l'inclinaison critique, $\theta < \theta_c$ (condition suffisante).

c) Pour être guidé à l'intérieur de la fibre optique, un rayon provenant de l'extérieur doit avoir une incidence sur le cœur inférieure à l'angle d'acceptance θ_a tel



que $\sin \theta_a = n_2 \sin \theta_c$ (voir également § III-A-c). L'ouverture numérique de la fibre est définie par $on = \sin \theta_a$, soit $on = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$; lorsque les indices sont proches l'un de l'autre, $on \approx n_1 \sqrt{2\Delta}$ où $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$ est la différence relative d'indice, $\Delta \ll 1$.

En fin de fibre, les rayons sont réfractés vers l'extérieur, dans un cône d'angle θ_a essentiellement.

Ainsi, non seulement l'angle d'acceptance θ_a (ou l'ouverture numérique $on = \sin \theta_a$) renseigne sur la façon de coupler de la lumière dans une fibre, mais il indique également la façon dont la lumière sort de la fibre.

exemple: Dans une fibre en silice (SiO_2), ie une fibre de verre, avec $n_1 \approx 1,5$ et

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \approx 10^{-2}, \text{ l'inclinaison critique est } \theta_c \approx 8^\circ, \text{ ce qui correspond à une ouverture}$$

numérique $\text{on} \approx 0,2$ et à un angle d'acceptance $\theta_a \approx 12^\circ$. En l'absence de gaine

($n_1 \approx 1,5$, $n_2 = n_{\text{air}} \approx 1$), on aurait $\theta_c \approx 48^\circ$, $\text{on} = 1$ et $\theta_a = 90^\circ$; si cette dernière

constitution de fibre peut sembler meilleure que la précédente, puisqu'elle permet que tous les

rayons extérieurs soient guidés quelle que soit leur incidence sur le cœur, elle n'est

cependant pas adaptée aux communications optiques à cause du grand nombre de modes

que la fibre supporte alors (cf. § VI-B).

2) Fibre à gradient d'indice

a) Une fibre à gradient d'indice possède le profil d'indice $n(r)$ indiqué sur la figure de la page V-3. Sur l'axe de la fibre, l'indice prend sa valeur maximale $n(r=0) = n_1$; il

atteint sa valeur minimale, égale à l'indice ^{uniforme} de la gaine, à la périphérie du cœur :

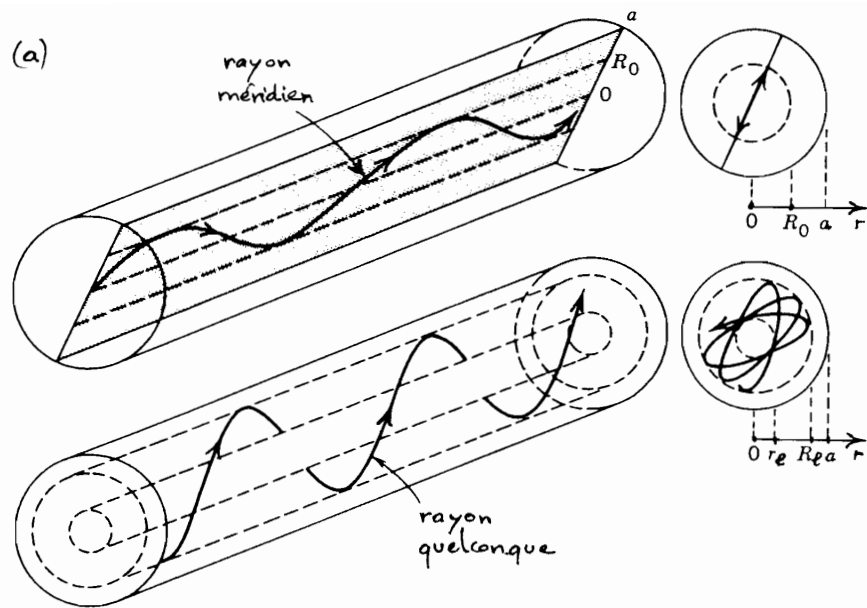
$n(r=a) = n_2$. Un rayon lumineux dans la fibre, déterminé par $\vec{r}(z) = [x(z), y(z), z]$, suit

l'équation $\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \vec{\text{grad}} n$, où s est l'abscisse curviligne le long du rayon.

D'après le profil d'indice $n(r)$, $\vec{\text{grad}} n$ est centripète, ce qui permet d'assurer le

confinement du rayon le long de l'axe de la fibre. En effet, à l'approximation paraxiale

(approximation utile puisque n_1 et n_2 sont très proches en pratique), on a $s \approx z$ et le



rayon lumineux est déterminé par $\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x}$, $\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y}$; or $\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{dn}{dr} \frac{x}{r}$ et $\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{dn}{dr} \frac{y}{r}$ (car $r = \sqrt{x^2 + y^2}$), avec $\frac{dn}{dr} < 0$: la courbure $\frac{d^2x}{dz^2}$ (resp. $\frac{d^2y}{dz^2}$) est de signe opposé à celui de x (resp. y). On en déduit que $x(z)$ et $y(z)$ sont des fonctions oscillantes, et que le rayon lumineux peut donc être confiné au voisinage de l'axe de la fibre. Un rayon guidé quelconque suit une trajectoire en hélice, comprise entre les cylindres-limites $r=r_e$ et $r=R_g$, avec $R_g < a$: les rayons guidés sont confinés dans le cœur, et n'atteignent pas la gaine (ceux qui l'atteignent ne sont pas guidés). Pour un rayon méridien, $r_e \rightarrow 0$.

b) Dans le cas particulier d'un profil d'indice parabolique ($n(r) = n_1 - (n_1 - n_2) \frac{r^2}{a^2}$), un rayon est déterminé par $\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{2\Delta}{a^2} x$, $\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{2\Delta}{a^2} y$ ($\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$), et $x(z)$ et $y(z)$ sont donc des fonctions sinusoïdales de z , dont la période spatiale est une caractéristique de la fibre. La projection, dans un plan transverse, de la trajectoire

d'un rayon guidé est une ellipse. Par ailleurs, en particulier, un rayon méridien intercepte l'axe de la fibre avec un intervalle régulier indépendant de l'inclinaison du rayon avec l'axe; quelques rayons méridiens appartenant au même plan sont représentés sur la figure de la page I-3.

c) La propriété la plus remarquable d'une fibre à profil d'indice parabolique, est que tous les rayons guidés dans cette fibre mettent quasiment le même temps à traverser. Dans une fibre à gradient d'indice, de manière générale, la célérité de la lumière $c/n(r)$ croît avec la distance à l'axe (puisque l'indice de réfraction décroît): les rayons les plus inclinés parcourent une plus grande distance, avec une plus grande ^{moyenne} célérité. D'un rayon à l'autre, l'accroissement de distance à parcourir dans la fibre et ^{celui} de la célérité se compensent plus ou moins dans le temps de transit de la lumière au travers de la fibre. Il s'avère que cette compensation est réalisée au mieux lorsque le profil d'indice est parabolique; tous les rayons mettent alors approximativement le même temps à traverser la fibre, soit $n_1 \frac{L}{c}$, qui est le temps de transit de la lumière sur le rayon axial (L : longueur de la fibre).

Cette propriété des fibres à profil d'indice parabolique sera revisitée au § VII-A, dans le cadre d'une description électromagnétique de la propagation de la lumière dans une fibre à gradient d'indice.

③ Modes de propagation d'une fibre à saut d'indice

1) Distribution spatiale des modes

a) Un champ électromagnétique ^{monochromatique (ω)} se propageant suivant l'axe z d'une fibre à saut d'indice, est de la forme $\vec{E}(r, \varphi, z) = \vec{E}_0(r, \varphi) e^{-i\beta z}$, $\vec{B}(r, \varphi, z) = \vec{B}_0(r, \varphi) e^{-i\beta z}$; β est la constante de propagation du champ; r, φ sont les coordonnées polaires dans les plans $z = \text{cte}$: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Chaque composante cartésienne des champs électrique et magnétique suit l'équation de Helmholtz $\Delta U + k_0^2 n^2 U = 0$ (cf. § I-B-2), soit:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k_0^2 n^2 U = 0,$$

où $n = n_1$ dans le cœur ($r < a$) et $n = n_2$ dans la gaine ($r > a$); $k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$.

Puisque U est de la forme $U(r, \varphi, z) = U_0(r, \varphi) e^{-i\beta z}$, et en cherchant à résoudre l'équation précédente par séparation des variables: $U_0(r, \varphi) = f(r)g(\varphi)$, il vient:

$$r^2 \frac{f''(r)}{f(r)} + r \frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{g''(\varphi)}{g(\varphi)} + r^2 (k_0^2 n^2 - \beta^2) = 0.$$

b) La dérivation de cette dernière équation par rapport à φ montre que $\frac{g''(\varphi)}{g(\varphi)}$ est une constante, que l'on écrit $-l^2$: $g''(\varphi) + l^2 g(\varphi) = 0$. Lorsque $l^2 > 0$, $g(\varphi)$ s'écrit $g(\varphi) = A_1 \cos l\varphi + A_2 \sin l\varphi$, l réel positif; $g(\varphi)$ obéissant à $g(\varphi + 2\pi) = g(\varphi)$ (le même champ doit être retrouvé si l'on tourne de 2π autour de l'axe z , à z et r constants^(*)), seules les valeurs entières de l sont acceptables: $l = 1, 2, 3, \dots$. Le cas $l^2 = 0$

(*) Et à t constant.

(ie $l=0$) donne également une solution : $g''(\varphi) = 0$ se résout en $g(\varphi) = \beta_1 + \beta_2 \varphi$, la périodicité imposant $\beta_2 = 0$ et finalement $g(\varphi) = \beta_1 = C e^{i\beta z}$; cette solution est retrouvée si l'on fait $l=0$ dans les solutions oscillantes précédentes. Enfin, le cas $l^2 < 0$ ne fournit pas de solution : la résolution de $g''(\varphi) - (-l^2)g(\varphi) = 0$ donne $g(\varphi) = \beta_1 \operatorname{ch} \sqrt{-l^2} \varphi + \beta_2 \operatorname{sh} \sqrt{-l^2} \varphi$, et l'absence de périodicité des fonctions hyperboliques conduit à $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

Ainsi, les composantes cartésiennes d'un champ électromagnétique se propageant dans la fibre s'écrivent sous la forme

$$f(r) \cos l\varphi e^{-i\beta z} \quad \text{ou} \quad f(r) \sin l\varphi e^{-i\beta z}$$

avec $l = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$, ou sous la forme d'une superposition linéaire de ces expressions pour différents l . $f(r) \cos l\varphi e^{-i\beta z}$ ou $f(r) \sin l\varphi e^{-i\beta z}$ s'annulent, dans chaque plan $z = C e^{i\beta z}$, suivant l lignes nodales, les mêmes quel que soit z ; autrement dit, $f(r) \begin{cases} \cos l\varphi \\ \sin l\varphi \end{cases} e^{-i\beta z}$ s'annule sur l plans méridiens (qui font entre eux un angle π/l).

c) L'insertion de l'expression $f(r) \cos l\varphi e^{-i\beta z}$, ou de $f(r) \sin l\varphi e^{-i\beta z}$, dans la dernière forme obtenue de l'équation de Helmholtz, donne l'équation suivie par $f(r) (= f_l(r))$:

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) + \left(k_0^2 n^2 - \beta^2 - \frac{l^2}{r^2} \right) f(r) = 0.$$

Un mode guidé possède une constante de propagation comprise entre les nombres d'onde dans le cœur et dans la gaine : $n_2 k_0 < \beta < n_1 k_0$. Les mêmes inégalités ont été rencontrées dans le guide diélectrique plan ou à section rectangulaire (cf. § III-B-2-c et § III-C-2) ; on admet

qu'elles restent valables dans la fibre à saut d'indice: on ne discutera pas ici des éventualités $\beta > n_2 k_0$ ou $\beta < n_2 k_0$, qui aboutissent à des impossibilités de mode guidé. Il est alors pratique de définir les paramètres k_r et γ , réels et positifs, par

$$k_r = \sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2} \quad \text{et} \quad \gamma = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_2^2}.$$

Dans le cœur et dans la gaine, $f(r)$ suit les équations

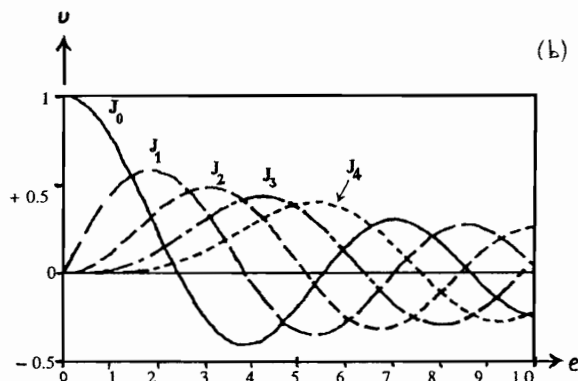
$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) + \left(k_r^2 - \frac{l^2}{r^2}\right) f(r) = 0 \quad (r < a)$$

$$\text{et} \quad f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \left(\gamma^2 + \frac{l^2}{r^2}\right) f(r) = 0 \quad (r > a).$$

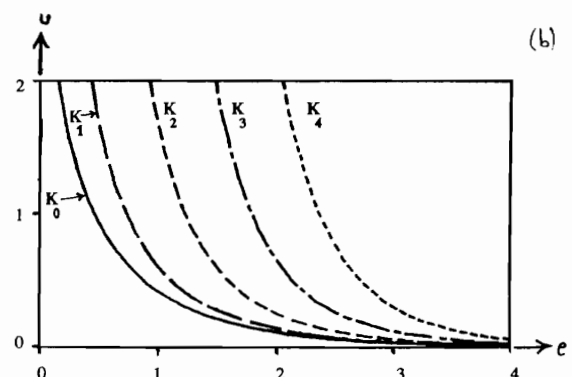
Ces équations sont des équations différentielles bien connues, dont les solutions appartiennent à la famille des fonctions de Bessel (cf. annexe V, § 1 et § 2). En écartant les fonctions qui divergent en $r=0$ ou en $r \rightarrow \infty$, on obtient

$$f(r) = A J_l(k_r r) \text{ dans le cœur } (r < a) \text{ et } f(r) = B K_l(\gamma r) \text{ dans la gaine } (r > a),$$

où J_l est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre l , et K_l la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce et d'ordre l .



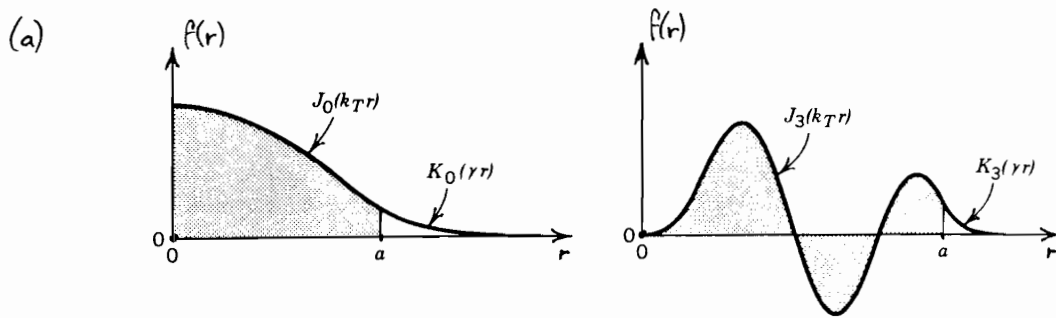
$u = J_l(e), \quad l = 0, 1, 2, 3, 4.$



$u = K_l(e), \quad l = 0, 1, 2, 3, 4.$

Les fonctions $J_l(\rho)$ sont des fonctions oscillant autour de zéro, dont l'amplitude d'oscillation décroît avec ρ . Les fonctions $K_l(\rho)$ sont monotones décroissantes ; leur décroissance est exponentielle pour les grandes valeurs de ρ .

Un exemple de distribution radiale $f(r)$ est donné sur la figure ci-dessous pour $l=0$, ainsi qu'un autre pour $l=3$; les paramètres k_T, γ et le rapport $\frac{J_l'}{J_l}$ ont été choisis de façon que $f(r)$ et sa dérivée $f'(r)$ soient continues sur le dioptre cœur-gaine $r=a$ (*) (il y a plusieurs solutions pour un l donné).



Les paramètres k_T et γ déterminent le taux de variation de $f(r)$ dans le cœur et dans la gaine, respectivement. Plus k_T est grand, plus les oscillations de $f(r)$ sont nombreuses dans le cœur ; plus γ est grand, plus $f(r)$ décroît rapidement dans la gaine et y pénètre donc moins. Cependant, k_T et γ sont liés par

$$k_T^2 + \gamma^2 = k_0^2 n_2^2 \quad (n_2 = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}) ;$$

donc si k_T croît, alors γ décroît et le champ pénètre plus profondément dans la gaine, et vice versa. (Si $k_T > k_0 n_2$, ie $\beta < k_0 n_2$, alors γ est imaginaire : il n'y a pas de confinement.)

(*) Ce sont bien les conditions suivies par les modes de propagation, dans la limite $n_1 - n_2 \rightarrow 0$ (cf. § 3).

2) Paramètre de fibre

Dans la suite, il sera pratique de manipuler, plutôt que k_T et γ , les paramètres sans dimension $X = k_T a$ et $Y = \gamma a$. La relation existant entre k_T et γ s'écrit

$$X^2 + Y^2 = V^2,$$

avec $V = k_0 a \omega z = 2\pi \frac{a}{\lambda_0} \omega z$.

Ce paramètre V est caractéristique de la fibre et de la fréquence de l'onde électromagnétique qui s'y propage; c'est un paramètre important, qui va contrôler le nombre de modes autorisés dans la fibre. V est appelé paramètre de fibre (parfois, fréquence réduite).

Pour un mode guidé, on a $X < V$ (et $Y < V$).

3) Modes LP

a) Les modes de propagation de la fibre optique à saut d'indice peuvent être exactement déterminés, de la façon suivante. Les composantes longitudinales E_z et B_z d'un champ électromagnétique étant écrites sous la forme trouvée au § 1, les équations de Maxwell permettent d'exprimer les composantes transverses E_r , E_ϕ , B_r et B_ϕ comme une somme de dérivées spatiales premières de E_z et B_z . Les relations de continuité suivies par E_z , B_z , E_ϕ , B_r et B_ϕ sur le dioptre cœur-gaine $r=a$, conduisent alors aux modes se propageant dans la fibre. Cependant, si le principe

de cette démarche est simple, l'extrême lourdeur de son développement la fait sortir du cadre de ce cours.

On décrit ici les modes de propagation d'une fibre à saut d'indice dans l'approximation de guidage faible $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \ll 1$; cette condition est remplie dans une très large majorité de fibres optiques. Les modes sont alors quasiment TEM^(*), avec un champ électrique polarisé suivant x ou suivant y (cf. annexe I, § 3). Pour une polarisation suivant x , un champ électromagnétique guidé possède, à l'ordre un^{inclus} en $\sqrt{\Delta}$, la structure suivante :

- le champ électrique a pour composantes transverses $E_{0y} = 0$ et

$$\begin{cases} E_{0x}(r, \varphi) = \beta J_\ell(k_r r) \begin{cases} \cos \ell \varphi \\ \text{ou} \\ \sin \ell \varphi \end{cases} & \text{dans le cœur } (r < a) \\ E_{0x}(r, \varphi) = \beta' K_\ell(\gamma r) \begin{cases} \cos \ell \varphi \\ \text{ou} \\ \sin \ell \varphi \end{cases} & \text{dans la gaine } (r > a) ; \end{cases}$$

- les composantes transverses du champ magnétique sont $B_{0x} = 0$, $B_{0y} = \frac{\beta}{\omega} E_{0x}$

- les composantes longitudinales E_{0z} et B_{0z} sont plus petites que les composantes transverses E_{0x} et B_{0y} , dans un rapport de l'ordre de $\sqrt{\Delta}$.

Les relations de continuité du champ électromagnétique sur le diélectrique cœur-gaine

$$r=a \text{ donnent alors : } \begin{cases} \beta J_\ell(k_r a) = \beta' K_\ell(\gamma a) \\ \beta k_r J'_\ell(k_r a) = \beta' \gamma K'_\ell(\gamma a). \end{cases}$$

(*) La connexion entre guidage faible et modes quasi TEM a été faite au chapitre III, p. III-14.

Ainsi, à l'approximation $\Delta \ll 1$, tout se passe comme si l'on avait manipulé une théorie scalaire de la lumière, d'amplitude $\tilde{E}_x(r, \varphi) e^{-i\beta z}$, dans laquelle on aurait imposé des conditions de continuité sur \tilde{E}_x et ses dérivées spatiales (les calculs sont présentés à l'annexe I, § 3). Ces conditions sont remplies si

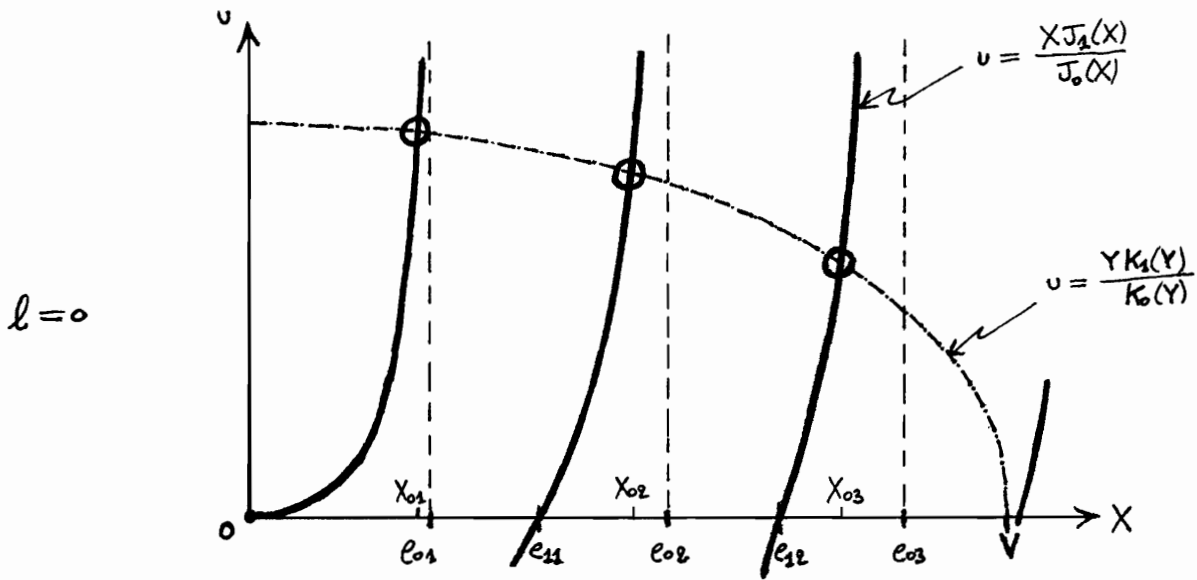
$$\frac{k_r J'_l(k_r a)}{J_l(k_r a)} = \frac{\gamma K'_l(\gamma a)}{K_l(\gamma a)},$$

c'est-à-dire, en utilisant $X = k_r a$ et $Y = \gamma a$:

$$\frac{X J'_l(X)}{J_l(X)} = \frac{Y K'_l(Y)}{K_l(Y)} \quad (\text{équation caractéristique}).$$

C'est une équation à une seule inconnue X , puisque $Y^2 = V^2 - X^2$. À l (et V) fixé, chaque solution X_{lm} , $m=1, 2, 3, \dots$, de cette équation correspond à un mode de propagation. Une équation doit être résolue pour chaque valeur de l .

b) Pour $l=0$, en utilisant $J'_0 = -J_1$ et $K'_0 = -K_1$, l'équation caractéristique prend la forme $\frac{X J_1(X)}{J_0(X)} = \frac{Y K_1(Y)}{K_0(Y)}$. La courbe $u = \frac{X J_1(X)}{J_0(X)}$ est formée de branches, d'asymptotes verticales en les zéros de J_0 , qui croisent l'axe des abscisses en les zéros de J_1 . On note e_{lm} , $m=1, 2, 3, \dots$, les zéros strictement positifs de $J_l(e)$, classés par ordre croissant. Comme $J_0(e=0) = 1$ et $J_1(e) \approx \frac{e}{2}$ pour $e \sim 0$, $u = \frac{X J_1(X)}{J_0(X)}$ démarre comme $\frac{X^2}{2}$ au voisinage de $X=0$. De son côté, la courbe $u = \frac{Y K_1(Y)}{K_0(Y)}$ est monotone décroissante de $X=0$ ($Y=V$) à $X=V$ ($Y=0$). Les points d'intersection des deux courbes, d'abscisses $X_{0,m}$

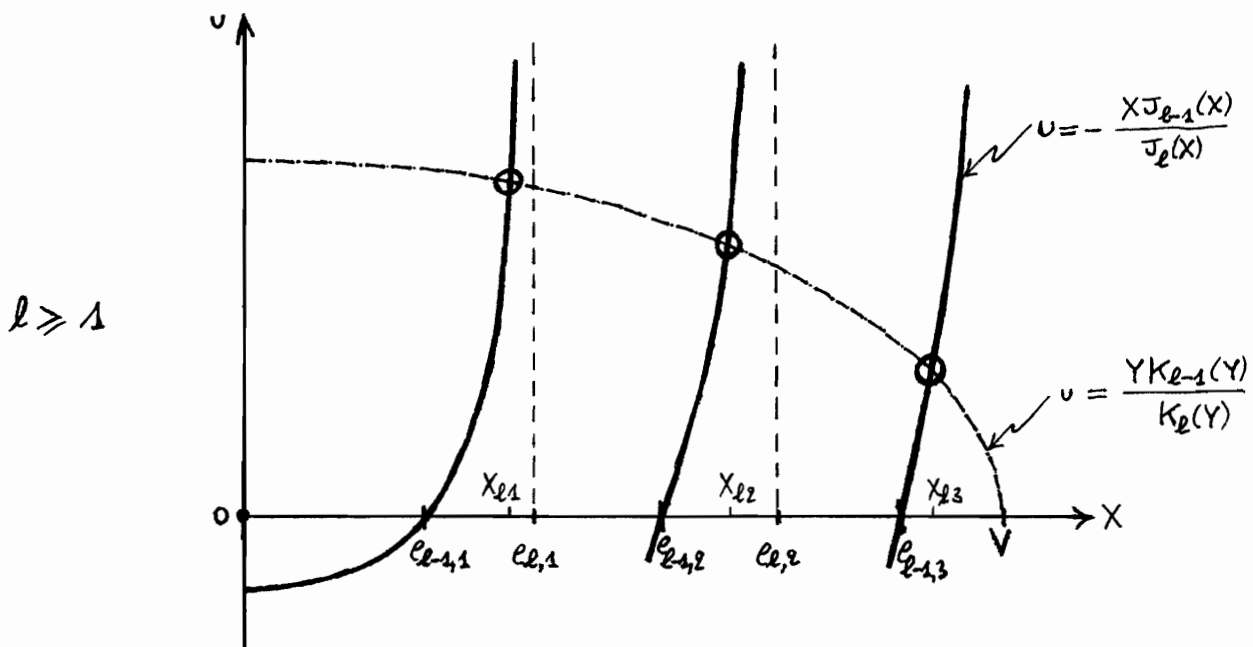


($m=1,2,3,\dots$), correspondent aux modes à $l=0$. Le mode $l=0, m=1$ existe toujours, quelle que soit la valeur du paramètre V ; le mode $l=0, m=2$ n'existe que si $V > e_{11}$; le mode $l=0, m=3$ que si $V > e_{12}$; etc.

Pour $l \geq 1$, l'équation caractéristique s'écrit, à l'aide des relations

$$J'_l(e) = J_{l-1}(e) - l \frac{J_l(e)}{e} \quad \text{et} \quad K'_l(e) = -K_{l-1}(e) - l \frac{K_l(e)}{e}, \quad \text{sous la forme}$$

$$-\frac{XJ_{l-1}(X)}{J_l(X)} = \frac{YK_{l-1}(Y)}{K_l(Y)}. \quad \text{La résolution graphique de cette équation, obtenue par}$$



intersection des courbes $u = -\frac{XJ_{l-1}(X)}{J_l(X)}$ et $u = \frac{YK_{l-1}(Y)}{K_l(Y)}$, est très semblable

à la discussion précédente qui concernait le cas $l=0$; le changement

essentiel est maintenant que $-\frac{XJ_{l-1}(X)}{J_l(X)}$ atteint une valeur finie strictement

négative (*) en $X=0$. Le mode $l, m=1$ n'existe que si $V > e_{l-1,1}$; le mode

$l, m=2$ si $V > e_{l-1,2}$; etc.

c) Une fois les X_{lm} trouvés, la structure des modes est fixée : pour une polarisation

suyant l'axe x , $E_{ox}^{lm}(r, \varphi) = A J_l(k_T r) \begin{cases} \cos l\varphi \\ \sin l\varphi \end{cases}$ dans le cœur ($r < a$) et

$$E_{ox}^{lm}(r, \varphi) = A \frac{J_l(X_{lm})}{K_l(Y_{lm})} K_l(r^{lm} r) \begin{cases} \cos l\varphi \\ \sin l\varphi \end{cases} \text{ dans la gaine } (r > a),$$

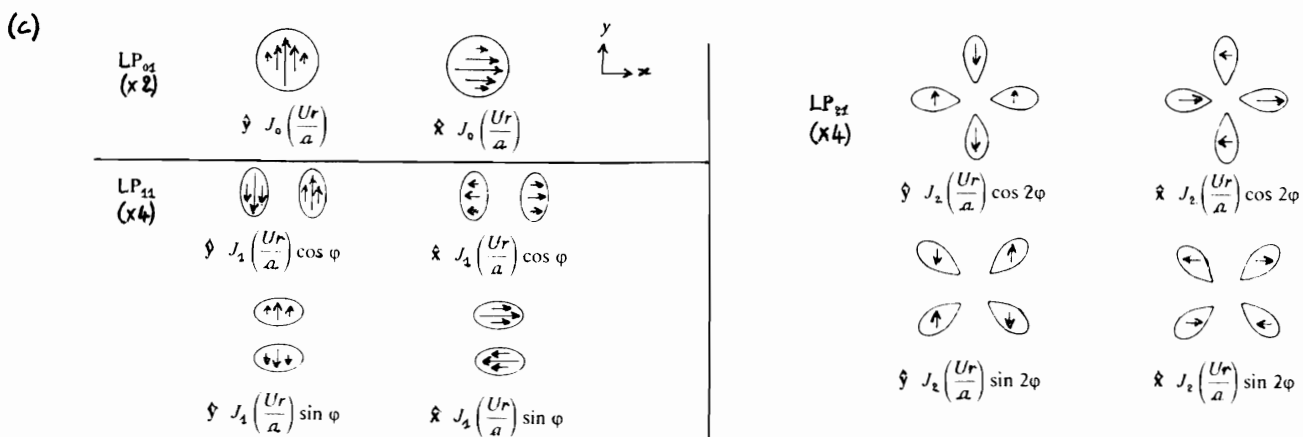
avec $k_T^{lm} = \frac{1}{a} X_{lm}$ et $r^{lm} = \frac{1}{a} Y_{lm} = \frac{1}{a} \sqrt{V^2 - X_{lm}^2}$. Un mode lm est

dégénéré en polarisation (linéaire suivant x ou suivant y) et en dépendance

angulaire ($\cos l\varphi$ ou $\sin l\varphi$); un mode à $l=0$ est donc dégénéré deux fois,

et un mode à $l \geq 1$ quatre fois. Le mode lm est traditionnellement noté LP_{lm}

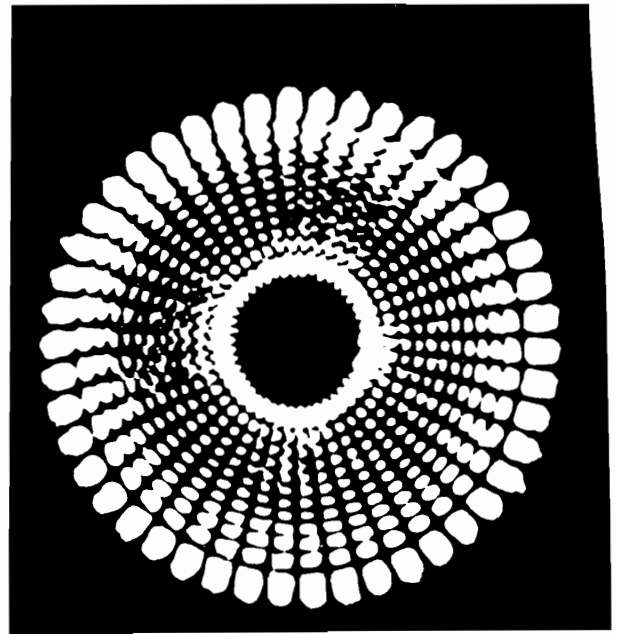
(LP pour linéairement polarisé). La figure ci-dessous représente trois modes de



(*) $J_l(e) \approx \left(\frac{e}{2}\right)^l \frac{1}{l!}$ pour $e \sim 0$, d'où $-\frac{XJ_{l-1}(X)}{J_l(X)} \rightarrow -2l$ lorsque $X \rightarrow 0$.

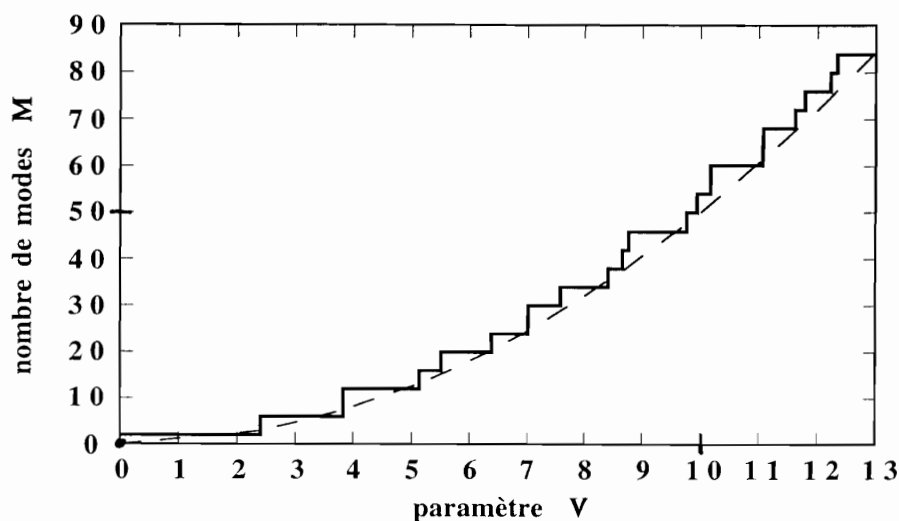
(c)

bas ordre (dans cette figure, $U = k_T a$). On notera que l'indice l d'un mode LP est le nombre de lignes nodales de E_{ox} (ou E_{oy}) dans le plan xy (cf. § 1-b), et que m est le nombre d'extrema ($\neq 0$) de E_{ox} (ou E_{oy}) dans une direction radiale; il est facile de constater



que les figures de la p. V-12 correspondent aux modes LP_{01} et LP_{33} , un peu plus long de vérifier que la figure ci-dessus représente le mode $LP_{23,12}$.

d) Le nombre M de modes supportés par la fibre à saut d'indice est représenté sur la figure suivante, en fonction du paramètre de fibre V ; ce dénombrement tient compte de la dégénérescence de chaque mode.



Pour des valeurs de V croissantes, un nouveau mode LP est autorisé chaque fois que V dépasse un zéro d'une fonction de Bessel J_l . $V = c_{lm}$, $l \neq 1$,

est le seuil d'existence du mode $LP_{l+1,m}$; $V = e_{1,m}$ est à la fois celui du mode $LP_{2,m}$ et celui du mode $LP_{0,m+1}$. Le plus petit zéro e_{lm} est $e_{01} = 2,405$, et donc seul le mode fondamental LP_{01} est guidé dans la fibre lorsque $V < 2,405$: la fibre est alors dite monomode. (La courbe en pointillés sur la figure précédente représente la relation $M = \frac{V^2}{2}$, valable lorsque $V \gg 1$, cf. § VI-A.)

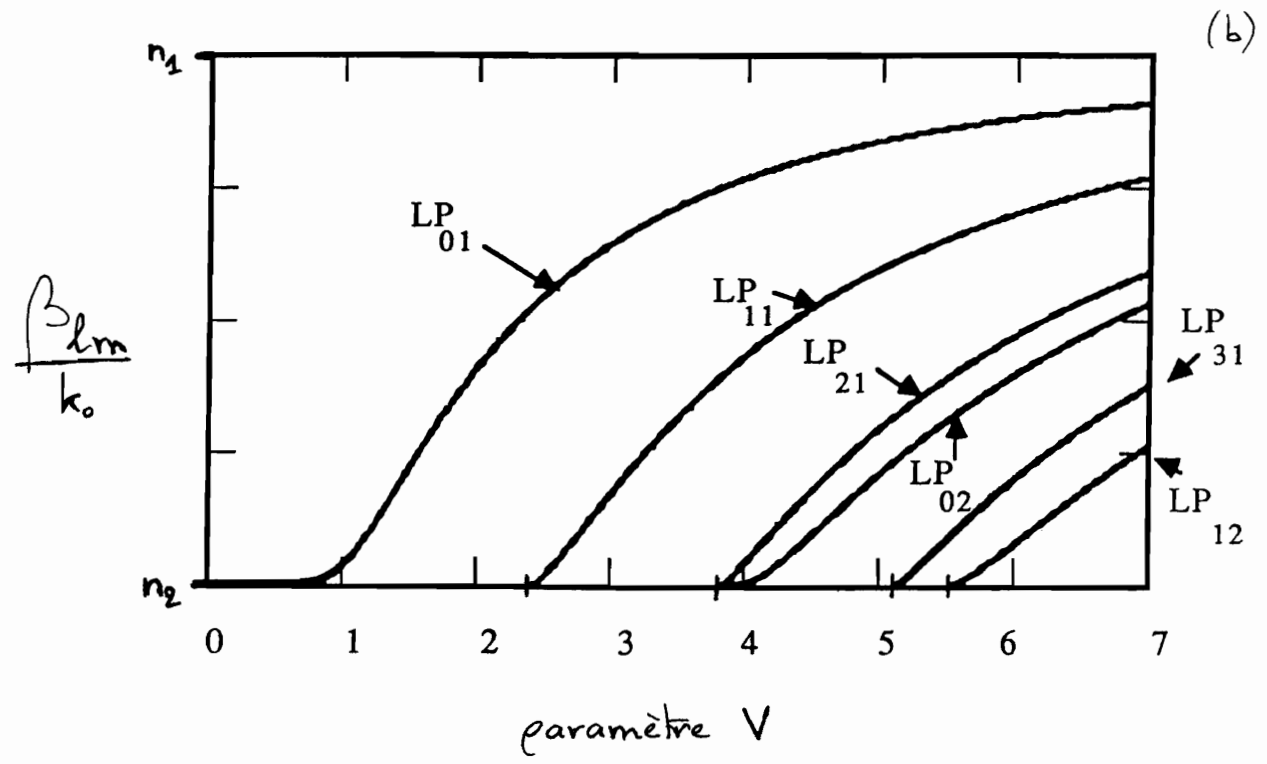
exemple : Une fibre à saut d'indice en silice possède un indice de cœur $n_1 = 1,5$ et un indice de gaine $n_2 = n_1(1 - \Delta)$ avec $\Delta = 5 \cdot 10^{-3}$, à la longueur d'onde $\lambda_0 = 1,3 \mu\text{m}$. On calcule $on = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \approx n_1 \sqrt{2\Delta} = 0,15$. La fibre est monomode à $\lambda_0 = 1,3 \mu\text{m}$ lorsque $2\pi \frac{a}{\lambda_0} on < 2,405$, c'est-à-dire si son diamètre de cœur $2a$ est plus petit que $\frac{2,405}{\pi} \frac{\lambda_0}{on} \approx 6,6 \mu\text{m}$.

e) La constante de propagation du mode LP_{lm} s'obtient en inversant la relation de définition de k_T (cf. § 1-c) : $\beta_{lm} = \sqrt{k_0^2 n_1^2 - (k_T^{lm})^2}$, soit, avec $k_T^{lm} = \frac{1}{a} X_{lm}$ et $V = k_0 a on$:

$$\frac{\beta_{lm}}{k_0} = \sqrt{n_1^2 - \frac{on^2}{V^2} X_{lm}^2} ;$$

dans cette expression, X_{lm} dépend de V (cf. la discussion graphique du § b). Le rapport $\frac{\beta_{lm}}{k_0}$, appelé indice effectif associé au mode LP_{lm} , est représenté sur

la figure ci-dessous en fonction du paramètre de fibre V, pour les modes de plus bas ordres.



Cette figure néglige la dispersion due au matériau : les indices de

réfraction n_1 et n_2 y sont supposés indépendants de la pulsation optique ω .

On constate que la vitesse de phase $v_p^{lm} = \frac{\omega}{\beta_{lm}} = \frac{c}{\left(\frac{\beta_{lm}}{k_0}\right)}$ du mode LP_{lm}

est proche de $\frac{c}{n_2}$ (vitesse de phase dans la gaine) au voisinage du seuil

d'existence, et qu'elle tend vers $\frac{c}{n_1}$ (vitesse de phase dans le cœur) quand

V devient grand; v_p^{lm} reste comprise entre ces deux bornes: $\frac{c}{n_2} < v_p^{lm} < \frac{c}{n_1}$.

La vitesse de groupe $v_g^{lm} = \left(\frac{d\beta_{lm}}{d\omega}\right)^{-1}$ du mode LP_{lm} vérifie

$$\frac{1}{v_g^{lm}} = \frac{1}{c} \frac{\beta_{lm}}{k_0} + \frac{V}{c} \frac{d}{dV} \left(\frac{\beta_{lm}}{k_0}\right);$$

il est alors évident d'après le graphe ci-dessus que les vitesses de groupe sont différentes d'un mode à l'autre.

Annexe V

1) Fonctions de Bessel d'ordre entier

Au § B-1-c, il a été montré que le profil radial $F(r)$ de toute composante cartésienne d'un champ guidé le long d'une fibre à saut d'indice, suivait l'équation

$$F''(r) + \frac{1}{r} F'(r) + \left(k_r^2 - \frac{l^2}{r^2}\right) F(r) = 0 \quad \text{pour } r < a \quad (\text{à l'intérieur du cœur}); k_r \text{ est}$$

réel positif et $l = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$. En posant $\rho = k_r r$ et en effectuant le

changement de fonction $F(\rho) = F(r)$, il vient :

$$F''(\rho) + \frac{1}{\rho} F'(\rho) + \left(1 - \frac{l^2}{\rho^2}\right) F(\rho) = 0.$$

Cette équation est l'équation différentielle de Bessel, d'ordre l entier. Sa solution

générale est une superposition linéaire de la fonction de Bessel de première

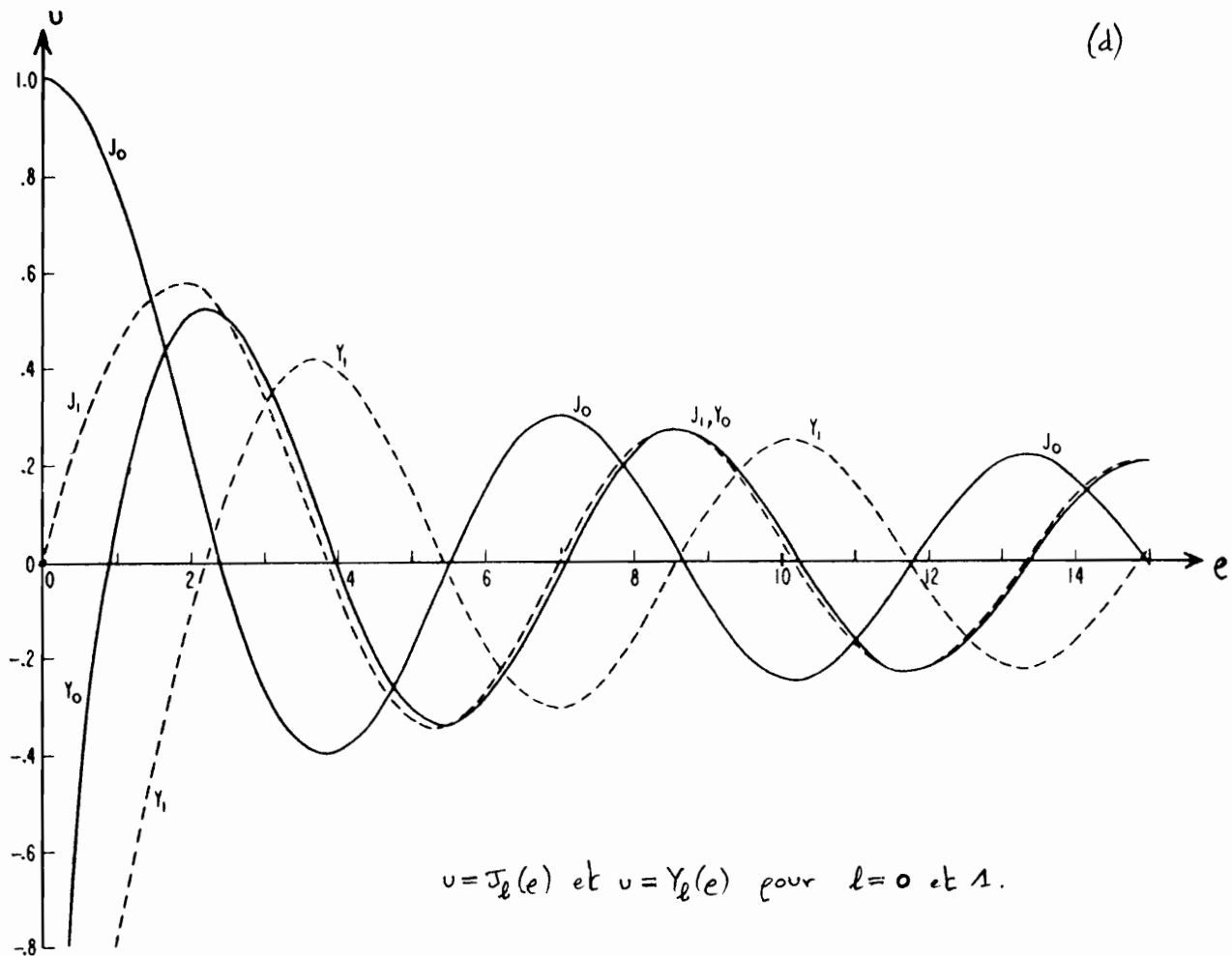
espèce $J_l(\rho)$ et de la fonction de Bessel de seconde espèce $Y_l(\rho)$; ces fonctions

oscillent autour de zéro, avec une amplitude d'oscillation décroissant avec ρ

(cf. figure ρ suivante).

Pour l'étude du champ électromagnétique se propageant dans la fibre à saut d'indice, la solution Y_l est à écarter car $Y_l(\rho)$ diverge lorsque $\rho \rightarrow 0$. De son côté, $J_l(\rho)$ est régulière en $\rho = 0$, et on a donc

$$F(r) = A J_l(k_r r) \quad \text{dans le cœur de la fibre } (r < a).$$



2) Fonctions de Bessel modifiées, d'ordre entier

Dans la gaine d'une fibre à saut d'indice, le profil radial $f(r)$ de toute composante cartésienne d'un champ électromagnétique qui se propage suivant l'axe de la fibre, obéit à l'équation^(*) :

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \left(\gamma^2 + \frac{l^2}{r^2} \right) f(r) = 0 \quad (r > a);$$

γ est une constante réelle et positive, et $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$. En posant $e = \gamma r$ et avec le changement de fonction $F(e) = f(r)$, il vient :

$$F''(e) + \frac{1}{e} F'(e) - \left(1 + \frac{l^2}{e^2} \right) F(e) = 0.$$

(*) Cf. § B-1-c.

Cette équation différentielle est l'équation de Bessel modifiée, d'ordre l entier. Sa solution générale est une superposition linéaire de la fonction de Bessel modifiée de première espèce $I_l(e)$ et de la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce $K_l(e)$.

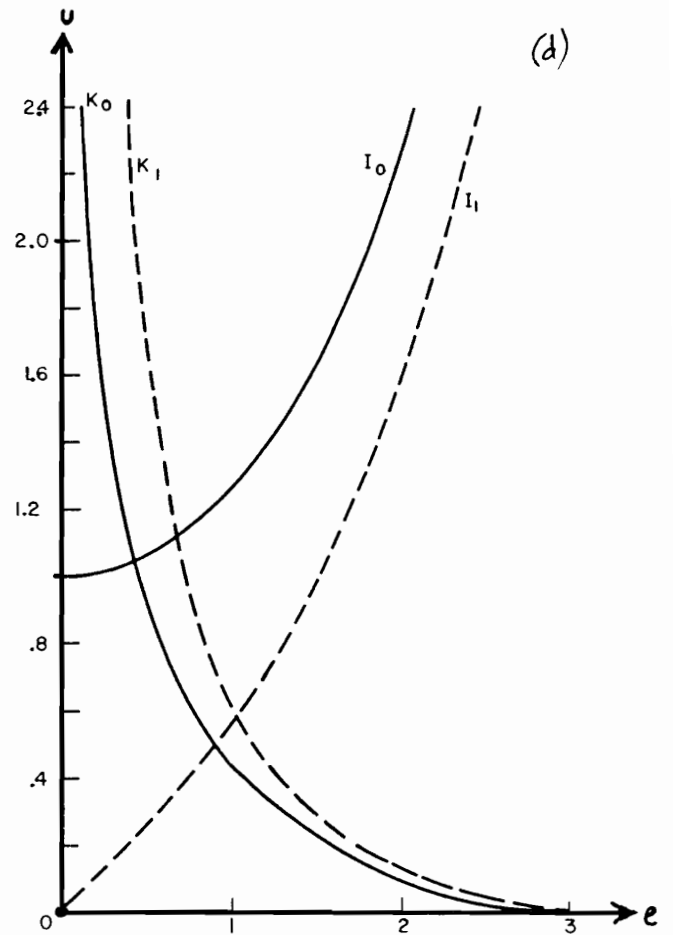
Pour l'étude du champ se propageant dans la fibre à saut d'indice, la solution I_l est à écarter car $I_l(e)$

diverge lorsque $e \rightarrow \infty$ (la divergence est exponentielle). De son côté, $K_l(e)$ décroît et tend vers zéro avec e (exponentiellement pour e assez grand), et donc

$$f(r) = A' K_l(\gamma r) \text{ dans la gaine } (r > a).$$

3) Structure des modes guidés à l'approximation de guidage faible

a) Dans l'approximation de guidage faible ($\Delta = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \ll 1$, condition remplie dans les fibres optiques courantes), un champ électromagnétique est approximativement TEM se propageant dans la fibre avec un champ électrique polarisé linéairement suivant x ou y . Pour une polarisation



$$u = I_l(e) \text{ et } u = K_l(e) \quad (l=0, l=1)$$

suivant x , Σ_{0x} prend la forme trouvée au paragraphe B-1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{0x}(r, \varphi) = \delta b J_l(k_r r) \begin{cases} \cos l\varphi \\ \text{ou} \\ \sin l\varphi \end{cases} \quad \text{dans le cœur } (r < a) \\ \Sigma_{0x}(r, \varphi) = \delta b' K_l(\gamma r) \begin{cases} \cos l\varphi \\ \text{ou} \\ \sin l\varphi \end{cases} \quad \text{dans la gaine } (r > a) \end{array} \right.$$

et $\Sigma_{0y} = \Sigma_{0z} = 0$, en première approximation ($k_r > 0$; $r > 0$; $l = 0, 1, 2, 3, \dots$).

b) Le champ magnétique associé est calculé avec l'équation de Maxwell $\text{rot } \vec{\Sigma} = -i\omega \vec{B}$.

Il vient: $B_{0x} = 0$, $B_{0y} = \frac{B}{\omega} \Sigma_{0x}$ et $B_{0z} = -\frac{i}{\omega} \frac{\partial \Sigma_{0x}}{\partial y}$, soit

$$B_{0z}(r, \varphi) = -\frac{i\delta b}{\omega} \left[k_r J_l'(k_r r) \begin{cases} \cos l\varphi \sin \varphi \\ \sin l\varphi \sin \varphi \end{cases} + l \frac{J_l(k_r r)}{r} \begin{cases} -\sin l\varphi \cos \varphi \\ \cos l\varphi \cos \varphi \end{cases} \right] \quad \text{pour } r < a \text{ et}$$

$$B_{0z}(r, \varphi) = -\frac{i\delta b'}{\omega} \left[\gamma K_l'(\gamma r) \begin{cases} \cos l\varphi \sin \varphi \\ \sin l\varphi \sin \varphi \end{cases} + l \frac{K_l(\gamma r)}{r} \begin{cases} -\sin l\varphi \cos \varphi \\ \cos l\varphi \cos \varphi \end{cases} \right] \quad \text{pour } r > a.$$

Sous cette forme, $B_{0z}(r, \varphi)$ n'apparaît pas comme on aurait pu s'y attendre d'après

le § B-1. On obtient une expression de B_{0z} satisfaisante de ce point de vue en

utilisant les propriétés^(*): $J_l'(e) = \frac{1}{2} [J_{l-1}(e) - J_{l+1}(e)]$, $l \frac{J_l(e)}{e} = \frac{1}{2} [J_{l-1}(e) + J_{l+1}(e)]$,

$K_l'(e) = -\frac{1}{2} [K_{l-1}(e) + K_{l+1}(e)]$ et $l \frac{K_l(e)}{e} = -\frac{1}{2} [K_{l-1}(e) - K_{l+1}(e)]$; on trouve:

$$B_{0z}(r, \varphi) = i \frac{k_r \delta b}{2\omega} \left[J_{l-1}(k_r r) \begin{cases} \sin(l-1)\varphi \\ -\cos(l-1)\varphi \end{cases} + J_{l+1}(k_r r) \begin{cases} \sin(l+1)\varphi \\ -\cos(l+1)\varphi \end{cases} \right] \quad (r < a)$$

$$\text{et } B_{0z}(r, \varphi) = i \frac{\gamma \delta b'}{2\omega} \left[K_{l-1}(\gamma r) \begin{cases} -\sin(l-1)\varphi \\ \cos(l-1)\varphi \end{cases} + K_{l+1}(\gamma r) \begin{cases} \sin(l+1)\varphi \\ -\cos(l+1)\varphi \end{cases} \right] \quad (r > a).$$

(*) Avec $J_{-1}(e) = -J_1(e)$ et $K_{-1}(e) = K_1(e)$.

La composante longitudinale B_{0z} apparaît ainsi plus petite que la composante transverse B_{0y} , dans un rapport de l'ordre de $\frac{k_r}{\beta}$ dans le cœur et de

$\frac{r}{\beta}$ dans la gaine ; d'après les expressions de k_r et r (cf. § B-1-c), et

puisque $n_2 k_0 < \beta < n_1 k_0$, on a $\frac{|B_{0z}|}{|B_{0y}|} \sim \sqrt{\Delta}$: le champ magnétique est quasiment transverse à l'approximation de guidage faible.

c) L'équation de Maxwell $\text{rot } \vec{B} = i\omega \frac{n^2}{c^2} \vec{E}$ doit permettre de retrouver le champ électrique \vec{E} . À l'ordre un en $\sqrt{\Delta}$, on trouve $\beta = n \frac{\omega}{c}$ avec $n = n_1 \approx n_2$ (la différence entre n_1 et n_2 est d'ordre $(\sqrt{\Delta})^2$) et on retrouve $E_{0y} = 0$; cependant,

une composante longitudinale $E_{0z} = -\frac{i}{\beta} \frac{\partial E_{0x}}{\partial x}$ apparaît, soit :

$$E_{0z}(r, \varphi) = -\frac{i\omega b}{\beta} \left[k_r J'_l(k_r r) \begin{cases} \cos l\varphi \cos \varphi \\ \sin l\varphi \cos \varphi \end{cases} + l \frac{J_l(k_r r)}{r} \begin{cases} \sin l\varphi \sin \varphi \\ -\cos l\varphi \sin \varphi \end{cases} \right] \text{ pour } r < a \text{ et}$$

$$E_{0z}(r, \varphi) = -\frac{i\omega b'}{\beta} \left[r K'_l(\gamma r) \begin{cases} \cos l\varphi \cos \varphi \\ \sin l\varphi \cos \varphi \end{cases} + l \frac{K_l(\gamma r)}{r} \begin{cases} \sin l\varphi \sin \varphi \\ -\cos l\varphi \sin \varphi \end{cases} \right] \text{ pour } r > a.$$

En suivant la même démarche que celle utilisée au paragraphe b) précédent pour le champ magnétique, il est possible d'écrire $E_{0z}(r, \varphi)$ sous la forme attendue d'après l'étude du § B-1, et d'en déduire que $\frac{|E_{0z}|}{|E_{0x}|} \sim \sqrt{\Delta}$: le champ électrique est quasiment transverse.

d) On a donc obtenu, à l'ordre un ^{inclus} en $\sqrt{\Delta}$, la forme du champ électromagnétique solution des équations de Maxwell dans le cœur et dans la gaine ; en effet, $\text{div } \vec{E} = 0$

est également vérifié (car $\xi_y = 0$ et $\xi_z = -\frac{i}{\beta} \frac{\partial \xi_x}{\partial x}$), ainsi que $\text{div } \vec{\mathcal{B}} = 0$

(puisque $\mathcal{B}_x = 0$, $\mathcal{B}_y = \frac{\beta}{\omega} \xi_x$ et $\mathcal{B}_z = -\frac{i}{\omega} \frac{\partial \xi_x}{\partial y}$).

Il reste à écrire les relations de continuité vérifiées par le champ électromagnétique sur le dioptre cœur-gaine. La continuité de $\vec{\mathcal{E}}$, \mathcal{B}_r et \mathcal{B}_φ se traduit par

$$J_0 J_\ell(k_r a) = J_0' K_\ell(\gamma a) ;$$

celle de ξ_z et \mathcal{B}_z s'écrit

$$J_0 k_r J_\ell'(k_r a) = J_0' \gamma K_\ell'(\gamma a).$$

Finalement, dans le cadre de l'approximation de guidage faible, tout se passe comme

si l'on manipulait une théorie scalaire de la lumière, d'amplitude $\xi_{0x}(r, \varphi) e^{-i\beta z}$

pour la polarisation suivant x , en imposant en $r=a$ des relations de continuité

sur ξ_{0x} et ses dérivées spatiales.

Sources bibliographiques des figures :

- (a) Saleh, Teich Fundamentals of Photonics (Wiley, 1991)
- (b) Prade, Vinet Optique Guidée (cours de l'ENSTA, années 80)
- (c) Ghatak, Thyagarajan Optical Electronics (Cambridge U.P., 1989)
- (d) Abramowitz, Stegun Handbook of Mathematical Functions (NBS, 1968)

OPTIQUE GUIDÉE: TD V

- 1) L'équation d'un rayon dans un milieu d'indice variable est $\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \vec{\text{grad}} n$. Montrer que dans une fibre à gradient d'indice où $n(r) = n_1 \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^p \Delta \right)$, $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \ll 1$, le rayon reste confiné au voisinage de l'axe de la fibre (on raisonnera dans l'approximation paraxiale). Déterminer l'équation d'un rayon lorsque le profil d'indice est parabolique, $p=2$; que vaut le pas μ de la fibre? Estimer μ pour $a=50\mu\text{m}$, $\Delta=0,01$, $n_1=1,5$.
- 2) Montrer, toujours à l'approximation paraxiale, qu'une tranche de longueur d ($d \ll \frac{\mu}{4}$) d'une fibre à gradient d'indice de profil parabolique, est une lentille de longueur focale $f = \mu / (2\pi n_1 \sin[2\pi \frac{d}{\mu}])$. (On raisonnera sur les rayons méridiens.) Une telle lentille est appelée lentille GRIN, pour gradient d'indice. Estimer f pour la fibre du 1), lorsque $d=500\mu\text{m}$.
- 3) Considérant un rayon extérieur ($n_{\text{air}}=1$) incident sur le centre de la face d'entrée d'une fibre à gradient d'indice, $p=2$, déterminer l'angle d'acceptance et l'ouverture numérique de la fibre (approximation paraxiale). Comparer avec le cas d'une fibre à saut d'indice. Évaluer l'ouverture numérique et l'angle d'acceptance de la fibre du 1).
- 4) Dans une fibre à saut d'indice où $n_1=1,5$ et $\Delta=0,01$, quelle est l'inclinaison maximale θ_c des rayons ^{guidés} avec l'axe? Déterminer l'angle d'acceptance et l'ouverture numérique de la fibre. Évaluer le paramètre de fibre V et le nombre de modes supportés par la fibre de rayon ^{de cœur} $a=50\mu\text{m}$, lorsque $\lambda_0=985\mu\text{m}$. Examiner le cas d'une fibre non gainée ($n_1=1,5$ et $n_2=1$).

5) Une source ^{lumineuse} de puissance P_0 a une distribution $I(\theta) = I_0 \cos \theta$ par unité d'angle solide, dans la direction faisant un angle θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) avec l'axe d'une fibre. Montrer que $I_0 = \frac{P_0}{\pi}$ et que la puissance collectée par la fibre est $P_0 \sin^2$.

Si la source est une LED d'indice de réfraction n_s attachée à l'entrée de la fibre, et en supposant que sa surface active est plus faible que le diamètre de cœur de la fibre, calculer l'ouverture numérique de la fibre et l'efficacité de couplage lorsque $n_1 = 1,46$, $n_2 = 1,455$ et $n_s = 3,5$.

6) La lumière sortant de la fibre précédente est détectée avec une photodiode dont la surface sensible, placée sur l'axe de la fibre, a un diamètre $D = 5 \text{ mm}$. À quelle distance maximale de la fin de la fibre peut-on placer ce détecteur, si l'on veut recueillir toute la lumière émergente ?

7) Exprimer le temps que met un rayon quelconque à traverser une fibre à gradient d'indice de longueur L . Montrer que dans une fibre à profil d'indice parabolique (cf. exercice 1), ce temps vaut $n_1 \frac{L}{c}$ à un terme correctif d'ordre Δ^2 près.

VI - Fibres optiques II

Ce chapitre s'inscrit dans la continuité du précédent. Dans la partie A, on étudie les modes de propagation dans une fibre optique multimode dont le profil d'indice du cœur appartient à une large classe, qui contient en particulier la fibre à saut d'indice et celle à profil d'indice parabolique. Cette étude, menée dans le cadre de la théorie W.K.B., conduit notamment aux expressions des vitesses de phase et de groupe des modes de propagation. Ensuite, les parties B et C présentent les deux limitations essentielles intervenant dans l'utilisation des fibres optiques, multimodes ou monomodes, à savoir la dispersion et l'atténuation. Le premier phénomène, qui provoque l'élargissement temporel d'une impulsion lumineuse progressant dans une fibre, limite le débit d'information que la fibre peut transporter. Le second phénomène, qui provoque la diminution de puissance de la lumière lorsqu'elle avance dans une fibre, limite la longueur des tronçons de fibres optiques utilisables dans une liaison de communication optique.

Ⓐ Description W.K.B. des fibres multimodes

On décrit ici, dans un point de vue électromagnétique, la propagation de la lumière dans une fibre multimode, c'est-à-dire dans une fibre dont le diamètre de cœur $2a$ est très grand devant la longueur d'onde λ_0 de la lumière guidée.

Le cœur de la fibre est supposé avoir un indice de réfraction $n(r)$ variant radialement en loi de puissance :

$$n(r) = n_1 \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^p \Delta \right] \quad (r < a) ;$$

p est appelé le paramètre de profil. L'indice de réfraction est uniforme dans la gaine ($r > a$), où il vaut $n_2 = n_1 (1 - \Delta)$. On a toujours $\Delta \ll 1$.

Cette forme du profil d'indice dans la fibre multimode permet de traiter, entre autres, le cas de la

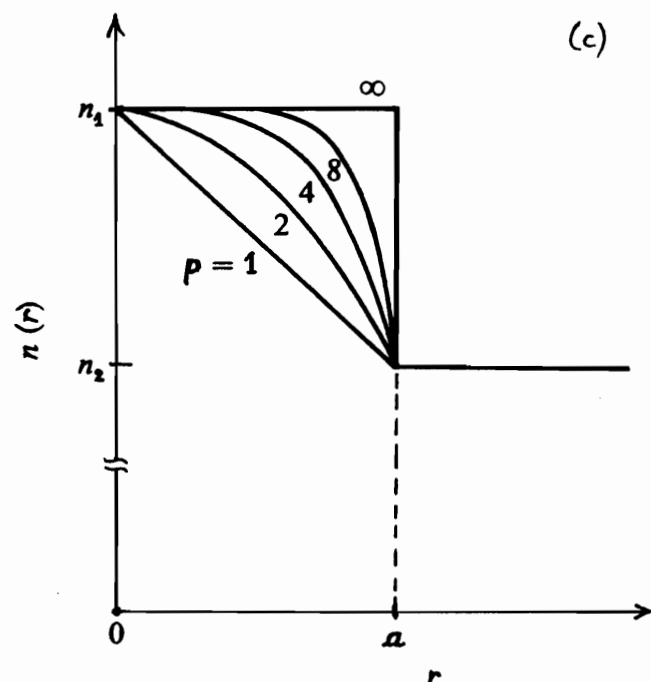
fibre multimode à saut d'indice ($p = \infty$)

et celui de la fibre multimode à profil

d'indice ^{parabolique} ($p = 2$), dont l'intérêt a déjà

été mentionné au § I-A-2-c dans le

cadre de la théorie des rayons.



1) Onde quasi plane

Il a déjà été vu (cf. § I-B-1) que toute composante cartésienne du champ électromagnétique suivait l'équation de Helmholtz

$$\Delta U + k_0^2 n(\vec{r})^2 U = 0$$

dans un milieu linéaire et isotrope, dont l'indice de réfraction $n(\vec{r})$ varie lentement à l'échelle de la longueur d'onde $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$ (ie: la variation relative d'indice est faible entre deux points quelconques de l'espace distants de λ_0).

a) Dans l'analyse W.K.B. (Wentzel, Kramers, Brillouin) de l'équation de Helmholtz, une solution est cherchée sous la forme d'une onde quasi plane:

$$U(\vec{r}) = A(\vec{r}) e^{-ik_0 S(\vec{r})},$$

où l'amplitude $A(\vec{r})$ et le chemin optique^(*) $S(\vec{r})$ (réels) sont des fonctions lentement variables. L'onde $U(\vec{r})$ est localement plane: au voisinage du point \vec{r}_0 de l'espace, $U(\vec{r})$ peut s'écrire

$$U(\vec{r}) \approx A(\vec{r}_0) e^{-ik_0 S(\vec{r}_0)} e^{-i\vec{k}(\vec{r}_0) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)}, \quad \text{où } \vec{k}(\vec{r}) = k_0 \vec{\nabla} S(\vec{r})$$

est le vecteur d'onde local^(**); $U(\vec{r})$ est une onde plane dont la direction et l'amplitude varient lentement au cours de la propagation.

L'introduction de $U(\vec{r}) = A(\vec{r}) \exp(-ik_0 S(\vec{r}))$ dans l'équation de Helmholtz (complexe)

(*) $S(\vec{r})$ est aussi appelé eikonale.

(**) $\vec{\nabla}$ est une notation rapide pour $\vec{\text{grad}}$.

fournit les deux équations (réelles) :

$$\begin{cases} (\vec{\nabla}S)^2 = n^2 + \frac{1}{k^2} \frac{\Delta A}{A} \\ 2\vec{\nabla}A \cdot \vec{\nabla}S + A \Delta S = 0 \end{cases}$$

En tenant compte que $A(\vec{r})$ est lentement variable, la première équation s'écrit :

$$(\vec{\nabla}S)^2 = n(\vec{r})^2$$

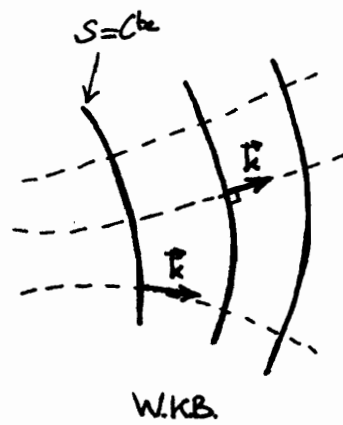
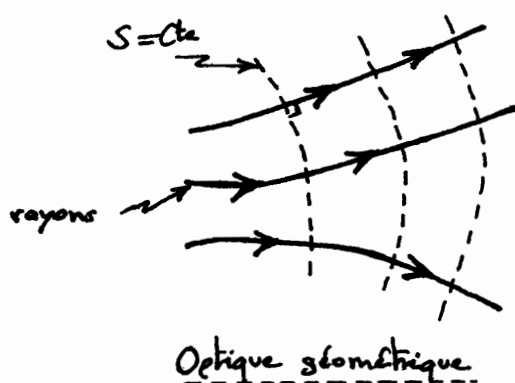
Il s'agit de l'équation eikonale, qui régit la distribution spatiale des surfaces d'onde $S(\vec{r}) = Cte$. Cette équation s'écrit aussi $\vec{k}(\vec{r})^2 = n(\vec{r})^2 k_0^2$, soit :

$$|\vec{k}(\vec{r})| = n(\vec{r}) k_0 :$$

comme attendu, le vecteur d'onde local $\vec{k}(\vec{r})$ en \vec{r} est celui d'une onde plane progressive dans un milieu homogène d'indice $n(\vec{r})$; ainsi, la longueur d'onde

$$\lambda(\vec{r}) = \frac{2\pi}{|\vec{k}(\vec{r})|} = \frac{\lambda_0}{n(\vec{r})} \text{ évolue au cours de la propagation.}$$

b) L'équation eikonale intervient aussi dans le cadre de l'Optique géométrique, les surfaces $S(\vec{r}) = Cte$ étant alors les surfaces normales aux rayons lumineux dans le milieu d'indice $n(\vec{r})$. L'approche W.K.B. construit une onde quasi plane de phase équi-phases $S(\vec{r}) = Cte$, et dont les vecteurs d'onde locaux $\vec{k} = k_0 \vec{\nabla}S$ sont suivant les rayons de l'Optique géométrique.



2) Modes

a) Considérant la fibre multimode dont le profil radial d'indice $n(r)$ a été présenté p. II-2, on en cherche les modes de propagation dans le cadre d'une description W.K.B. (cf. § précédent). Il est alors naturel d'écrire les composantes ^{cartésiennes}

$U(\vec{r})$ du champ électromagnétique avec un chemin optique ^{$S(\vec{r})$} de la forme

$$k_0 S(\vec{r}) = k_0 \rho(r) \pm l\varphi + \beta z$$

où $l = 0, 1, 2, 3, \dots$. En effet, $U(\vec{r})$ prend l'expression

$$U(\vec{r}) = f(r) e^{\mp i l \varphi} e^{-i \beta z}, \quad f(r) = A(r) e^{-i k_0 \rho(r)},$$

où apparaît la constante de propagation β et une dépendance angulaire périodique de période 2π , comme il se doit. (Comme au paragraphe II-B-1, les modes en $e^{-i l \varphi}$ ou en $e^{+i l \varphi}$ sont dégénérés; il est donc équivalent de chercher une dépendance angulaire en $(\cos l\varphi, \sin l\varphi)$ ou en $(e^{-i l \varphi}, e^{+i l \varphi})$, puisque chaque élément d'un couple est combinaison linéaire des éléments de l'autre.)

L'amplitude A est solution de $2 \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} S + A \Delta S = 0$ (cf. p. II-4); puisque

$\Delta S = \rho'' + \frac{1}{r} \rho' = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r \rho')$ est fonction de r seul, A peut être trouvée comme

fonction de r uniquement et on obtient $A(r)^2 r \rho'(r) = \text{cte}$.

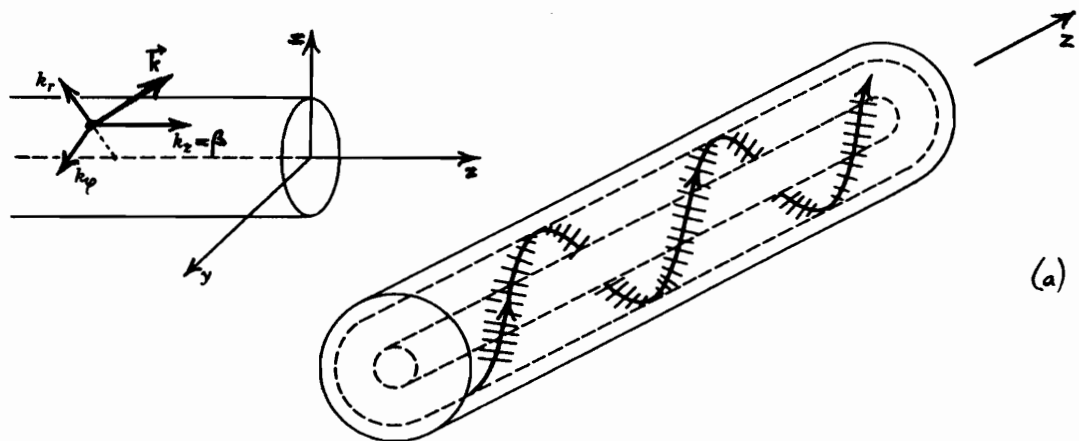
b) Le vecteur d'onde local $\vec{k} = k_0 \vec{\nabla} S$ a pour composantes cylindriques

$$k_r(r) = k_0 \rho'(r), \quad k_\varphi(r) = \pm \frac{l}{r}, \quad k_z = \beta;$$

ces composantes sont liées par l'équation eikonale :

$$k_r(r)^2 = n(r)^2 k_0^2 - \frac{l^2}{r^2} - \beta^2.$$

La direction de $\vec{k}(\vec{r})$ change lentement avec \vec{r} , fabriquant une onde en hélice^(*) qui rappelle un rayon guidé dans la fibre (cf. figure ci-dessous et celle du § V-A-2-a). Les modes à $l=0$ correspondent aux rayons méridiens.



Lorsque $k_r(r)^2$ est positif, $k_r(r)$ est réel :

$$k_r(r) = \pm k(r) \quad \text{où} \quad k(r) = \sqrt{n(r)^2 k_0^2 - \frac{l^2}{r^2} - \beta^2} ;$$

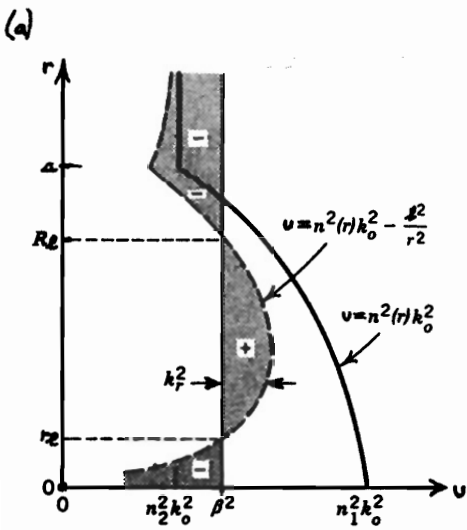
quand $k_r(r)^2$ est négatif, $k_r(r)$ est imaginaire pur :

$$k_r(r) = \pm iK(r) \quad \text{où} \quad K(r) = \sqrt{\frac{l^2}{r^2} + \beta^2 - n(r)^2 k_0^2}.$$

L'onde quasi plane $U(\vec{r})$ est essentiellement confinée dans la région où $k_r(r)$ est réel, c'est-à-dire où $k_r(r)^2 > 0$. La détermination de cette région est réalisée graphiquement sur la figure suivante. Les courbes $u = n(r)^2 k_0^2$ et

$u = n(r)^2 k_0^2 - \frac{l^2}{r^2}$ y sont tracés, en trait épais et en tirets respectivement.

(*) Les modes en $e^{-il\varphi}$ (resp. $e^{+il\varphi}$) ont une hélice positive, ie $k_\varphi > 0$ (resp. négative, ie $k_\varphi < 0$).



La valeur de β^2 ($n_2^2 k_0^2 < \beta^2 < n_1^2 k_0^2$) est marquée par la ligne verticale. Il s'ensuit que k_r^2 est représenté par la distance entre la courbe tirée et la ligne verticale, les zones où k_r^2 est positif ou négatif sont indiqués par les signes + ou -.

Ainsi, $k_r(r)$ est réel dans la région $r_2 < r < R_2$, où r_2 et R_2 sont les deux zéros de $n(r)^2 k_0^2 - \frac{l^2}{r^2} - \beta^2$. Évidemment, r_2 et R_2 dépendent de β .

On remarque que $r_{l=0} = 0$, en accord avec le tracé de rayons méridiens du §I-A; également, on a $R_2 = a$ pour une fibre à saut d'indice ($p \rightarrow \infty$), comme il se doit (cf. les tracés de rayons du §I-A-1).

À ce stade, on connaît la forme du profil radial $f(r)$ de $U(\vec{r})$:

$$f(r) \propto \frac{1}{\sqrt{k(r)r}} \exp\left(\mp i \int^r k(r') dr'\right) \text{ pour } r_2 < r < R_2$$

$$\text{et } f(r) \propto \frac{1}{\sqrt{K(r)r}} \exp\left(\pm \int^r K(r') dr'\right) \text{ pour } r < r_2 \text{ et } R_2 < r.$$

Sur ces expressions se révèle le problème central de l'approximation W.K.B.: cette méthode a certes permis d'obtenir simplement l'expression de $U(\vec{r})$, mais le profil radial $\sqrt{\frac{f(r)}{U(r)}}$ trouvé n'est pas valable au voisinage de r_2 ou de R_2 , où il diverge.

Pour traiter ces singularités, il est nécessaire de résoudre exactement l'équation de

Helmholtz autour de r_2 et de R_2 , où $n(r)^2 k_0^2 - \frac{l^2}{r^2} - \beta^2$ peut être linéarisé, et d'en

déduire comment raccorder $f(r)$ de part et d'autre de r_2 et de R_2

(cf. annexe II, §1). Il vient alors :

$$r < r_2 : f(r) = A_0 \frac{1}{\sqrt{K(r)r}} \exp\left(-\int_r^{r_2} K(r') dr'\right);$$

$$r_2 < r < R_2 : f(r) = A_0 \frac{2}{\sqrt{k(r)r}} \cos\left(\int_{r_2}^r k(r') dr' - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$r > R_2 : f(r) = A_0' \frac{1}{\sqrt{K(r)r}} \exp\left(-\int_{R_2}^r K(r') dr'\right).$$

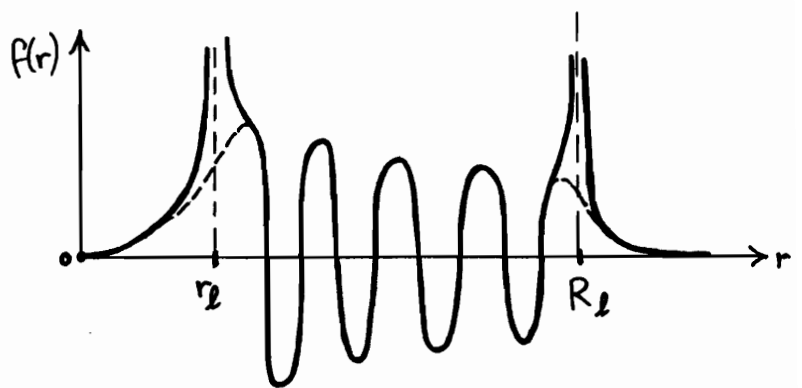
L'allure de

$f(r)$ est représentée ci-contre.

Les divergences en r_2 et en

R_2 proviennent de l'approche

W.K.B. ; les courbes en tirets,



régulières au voisinage de r_2 et de R_2 , sont issues d'une analyse exacte de

l'équation de Helmholtz.

Il s'avère que les règles de raccordement de $f(r)$ imposent également la

condition ^(*) $\int_{r_2}^{R_2} k(r) dr = (m - \frac{1}{2})\pi$, $m = 1, 2, 3, \dots$ (et $A_0' = (-1)^{m-1} A_0$),

c'est-à-dire :

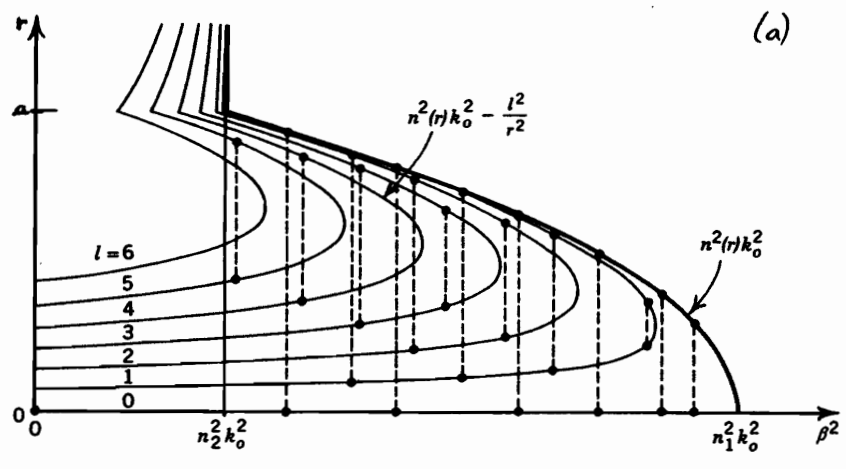
$$\int_{r_2(\beta)}^{R_2(\beta)} \sqrt{n(r)^2 k_0^2 - \frac{l^2}{r^2} - \beta^2} dr = (m - \frac{1}{2})\pi.$$

Il s'agit de l'équation caractéristique des modes ^(*) de la fibre, qui permet de

(*) Les modes sont LP_{lm} , avec $\Delta \ll 1$.

(*) Cf. annexe VI, §2.

déterminer leur constante de propagation β_{lm} , ainsi que leur profil spatial (puisque alors $k(r)$, $K(r)$, $r_2(\beta_{lm})$ et $R_2(\beta_{lm})$ sont déterminés). Les valeurs de β_{lm}^2 sont représentées ci-dessous, avec $l=0, 1, 2, \dots, 6$; chaque segment vertical associé matérialise l'intervalle radial $[r_2, R_2]$ sur lequel chaque mode lm est confiné.



¶ L'analyse de l'équation caractéristique (cf. annexe VI, §2) conduit à une expression analytique des constantes de propagation des modes :

$$\beta_q = n_1 k_0 \left[1 - 2 \left(\frac{q}{M} \right)^{\frac{p}{p+2}} \Delta \right]^{1/2},$$

où $q = 1, 2, 3, \dots, M/4$ est un entier qui numérote les modes lm par valeurs décroissantes de leur constantes de propagation, et où

$$M = \frac{p}{p+2} \frac{V^2}{2}$$

est le nombre total de modes supportés par la fibre ($V = k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = n_1 k_0 a \sqrt{2\Delta}$).

Ce dénombrement des modes tient compte que chaque mode lm est dégénéré quatre fois (les modes à $l=0$ ne sont ^{en fait} dégénérés que deux fois, mais leur nombre reste

marginal par rapport au nombre total, et l'erreur commise est négligeable).

En particulier, on a :

$$M = \frac{V^2}{2} \quad \text{pour une fibre à saut d'indice } (p=\infty),$$

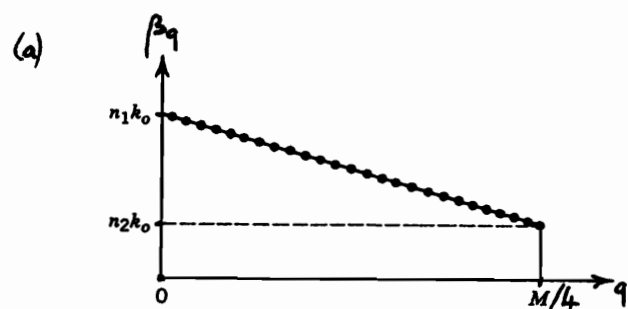
$$\text{et } M = \frac{V^2}{4} \quad \text{pour une fibre à profil d'indice parabolique } (p=2).$$

exemple: Une fibre à saut d'indice de diamètre de cœur $2a = 200 \mu\text{m}$ est utilisée à $\lambda_0 = 0,85 \mu\text{m}$; l'indice du cœur est $n_1 = 1,5$ et $\Delta = 0,005$. Il vient

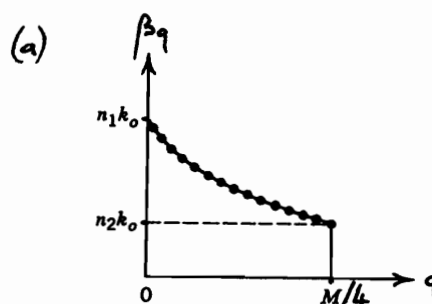
$$V = k_0 a n_1 \sqrt{2\Delta} = 2\pi \frac{a}{\lambda_0} n_1 \sqrt{2\Delta} \approx 110, \quad \text{et le nombre de modes pouvant se propager dans la fibre est } M = \frac{V^2}{2} \approx 6000.$$

À l'ordre 1 en Δ , les constantes de propagation des modes s'expriment par $\beta_q \approx n_2 k_0 \left[1 - \left(\frac{4q}{M} \right)^{\frac{p}{p+2}} \Delta \right]$, $q = 1, 2, 3, \dots, M/4$. On constate que $n_2 k_0 < \beta_q < n_1 k_0$, comme d'habitude dans un guide d'onde. Les figures ci-dessous représentent les constantes de propagation des différents modes, repérés par le paramètre q , dans le cas d'une fibre à saut d'indice ($p=\infty$) et d'une fibre à profil parabolique d'indice ($p=2$).

saut d'indice



gradient d'indice (p=2)



3) Vitesses de phase, vitesses de groupe

La constante de propagation des modes étant connue, on peut en tirer leur vitesse de phase $v_p^{(q)} = \frac{\omega}{\beta_q}$ et leur vitesse de groupe $v_g^{(q)} = \left(\frac{d\beta_q}{d\omega}\right)^{-1}$.

a) À l'ordre le plus bas en Δ , la vitesse de phase du mode q vaut

$$v_p^{(q)} = \frac{c}{n_1} \left[1 + \left(\frac{4q}{M}\right)^{\frac{p}{p+2}} \Delta \right];$$

les vitesses de phase sont comprises entre $\frac{c}{n_1}$ (pour $q=1$) et

$$\frac{c}{n_1} (1 + \Delta) \approx \frac{c}{n_2} \text{ (pour } q = \frac{M}{4} \text{)} : \quad \frac{c}{n_1} < v_p^{(q)} < \frac{c}{n_2}.$$

b) En négligeant la dispersion due au milieu (n_1 et n_2 sont supposés être des constantes indépendantes de ω), la vitesse de groupe du mode q s'écrit

$$v_g^{(q)} = \frac{c}{n_1} \left[1 - \frac{p-2}{p+2} \left(\frac{4q}{M}\right)^{\frac{p}{p+2}} \Delta \right]$$

à l'ordre 1 en Δ . Cette expression indique qu'un paramètre de profil $p=2$

donne une vitesse de groupe $v_g^{(q)} \approx \frac{c}{n_1}$ pour tout q : tous les modes

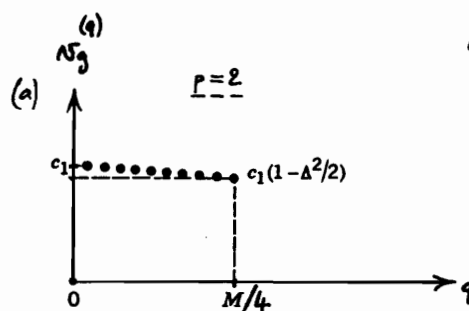
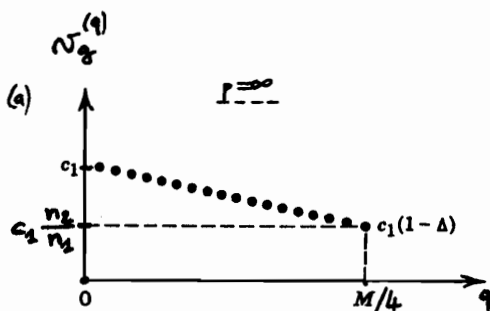
progressent dans la fibre avec approximativement la même vitesse de groupe.

Cette propriété de la fibre multimode à profil d'indice parabolique s'avère

extrêmement intéressante (cf. § B).

À l'ordre 2 en Δ , on obtient

$$v_g^{(q)} = \frac{c}{n_1} \left[1 - \left(\frac{4q}{M}\right) \frac{\Delta^2}{2} \right] \quad (p=2).$$



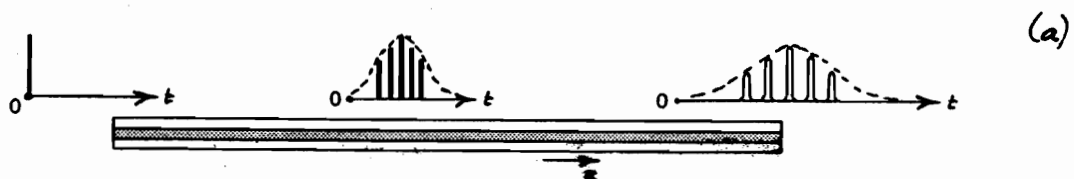
$$(c_1 = \frac{c}{n_1})$$

ⓑ Dispersion

Lorsqu'une très courte impulsion lumineuse est envoyée à l'entrée d'une fibre optique, la puissance lumineuse se disperse ensuite temporellement au cours de la propagation de l'impulsion le long de la fibre. L'impulsion en entrée étant ^{supposée} infiniment courte, la durée de l'impulsion en sortie de fibre est dénommée temps de réponse de la fibre optique. Ce temps de réponse peut avoir plusieurs origines.

1) Fibre multimode : dispersion modale

Dans une fibre multimode, une impulsion lumineuse en entrée répartit sa puissance sur les M modes de la fibre. La dispersion temporelle de l'impulsion provient alors du fait que chaque mode q traverse la fibre avec sa propre vitesse de groupe $v_g^{(q)}$. Le temps de transit du mode q , dans une fibre de longueur L , vaut $\tau_q = L/v_g^{(q)}$ ($q=1, 2, \dots, M/4$). En général, les modes ne sont pas excités équitablement et le profil temporel en sortie est en forme de cloche. On définit alors le temps



de réponse par $\sigma_z = (\tau_{\text{MAX}} - \tau_{\text{MIN}}) / 2 = (L/v_g^{\text{MIN}} - L/v_g^{\text{MAX}}) / 2$.

a) Dans une fibre à saut d'indice, $v_g^{\text{MIN}} = \frac{c}{n_1} (1 - \Delta)$ et $v_g^{\text{MAX}} = \frac{c}{n_1}$ en négligeant la dispersion due au milieu (cf. § A-3). Il vient alors

$$\sigma_z = \frac{n_1 L}{c} \frac{\Delta}{2},$$

puisque $(1 - \Delta)^{-1} \approx 1 + \Delta$ lorsque $\Delta \ll 1$: le temps de réponse σ_z est la fraction $\Delta/2$ du temps de transit $L/(c/n_1)$.

Ce temps de réponse limite le débit d'information B (en bits/s) que peut transporter la fibre. En effet, deux impulsions lumineuses séparées de $1/B$ devant être séparées en sortie de fibre, il faut que la condition $1/B > \sigma_z$ soit remplie, c'est-à-dire $B_{\text{MAX}} = \sigma_z^{-1}$.

Comme ici $\sigma_z \propto \Delta$, il est favorable que $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$ soit le plus petit possible, ie que le paramètre $V \propto \sqrt{\Delta}$ ^{soit} le plus petit possible (donc que le nombre de modes $M \propto V^2 \propto \Delta$ soit le plus petit possible).

b) Dans une fibre à profil d'indice parabolique, le temps de réponse est plus faible que dans une fibre à saut d'indice car les vitesses de groupe des modes γ sont moins différentes: $v_g^{\text{MIN}} = \frac{c}{n_1} (1 - \frac{\Delta^2}{2})$ et $v_g^{\text{MAX}} = \frac{c}{n_1}$ (cf. § A-3). Le temps de réponse prend ainsi l'expression

$$\sigma_z = \frac{n_1 L}{c} \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2.$$

σ_z n'est plus que la fraction $(\frac{\Delta}{2})^2$ du temps de transit $n_1 L/c$, c'est-à-dire un facteur $\frac{\Delta}{2}$ plus petit que dans une fibre à saut d'indice.

exemple: Dans une fibre à saut d'indice avec $n_1 \approx 1,5$ et $\Delta = 0,01$, les impulsions lumineuses s'élargissent temporellement avec le taux $\frac{\sigma_z}{L} = \frac{n_1 \Delta}{2c} \approx 25 \text{ ns/km}$. Dans une fibre à profil d'indice parabolique de mêmes n_1 et Δ , ce taux est réduit à $\frac{\sigma_z}{L} = \frac{n_1}{c} (\frac{\Delta}{2})^2 \approx 125 \text{ ps/km}$. Une fibre de longueur 1 km peut assurer un débit numérique maximal de $B_{\text{MAX}} \approx 40 \text{ MHz}$ dans le premier cas, et de $B_{\text{MAX}} \approx 8 \text{ GHz}$ dans le second cas.

Dans une situation où l'on voudrait tenir compte de la dispersion due au milieu, on peut recommencer les calculs du § A-3 (tout en négligeant la dispersion sur $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$). Pour une fibre à saut d'indice, on obtient alors $v_g^{(1)} = \frac{c}{N_1} [1 - (\frac{49}{M}) \Delta]$, où $N_1 = n_1 - \lambda_0 \frac{dn_1}{d\lambda_0}$ est l'indice de groupe du cœur (cf. § I-B-3), et $\sigma_z = \frac{N_1 L}{c} \frac{\Delta}{2}$. Pour une fibre à profil d'indice parabolique, il vient $v_g^{(1)} = \frac{c}{N_1} [1 - (\frac{49}{M}) \frac{\Delta^2}{2}]$ et un temps de réponse $\sigma_z = \frac{N_1 L}{c} (\frac{\Delta}{2})^2$. Ainsi la prise en compte de la dispersion du milieu ne corrige-t-elle que faiblement les expressions des

temps de réponse calculées précédemment (n_2 est remplacé par N_2).

2) Fibre monomode : dispersion chromatique

Dans une fibre monomode (à saut d'indice), toute la lumière d'une impulsion lumineuse envoyée en entrée de fibre se propage dans le mode fondamental LP_{01} (cf. § V-B-3-d). Comme il n'y a qu'un seul mode de propagation supporté par la fibre, la dispersion modale est exactement nulle. Cependant, l'impulsion qui voyage dans la fibre s'élargit temporellement du fait qu'elle n'est pas monochromatique.

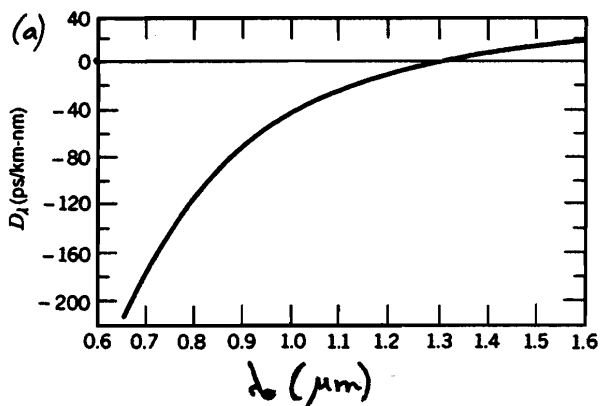
a) En première approximation, la relation de dispersion du mode LP_{01} est écrite $\beta \approx n_2 k_0$ (cf. figure de la p. V-20 : on a $n_2 < \beta/k_0 < n_1$ avec $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_2} \ll 1$). La vitesse de groupe du mode vaut $v_g = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1} = \frac{c}{N}$, avec $N = n + \omega \frac{dn}{d\omega} = n - \lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0}$ ($n = n_2 \approx n_1$). Au bout d'une longueur L de fibre, la largeur temporelle d'une impulsion infiniment fine (en temps) en entrée vaut $\sigma_z = \left| \frac{d}{d\lambda_0} \left(\frac{L}{v_g} \right) \right| \sigma_\lambda$, où σ_λ est la largeur spectrale de la source lumineuse utilisée; il vient ainsi l'expression

$$\sigma_z = |\Delta_\lambda| \sigma_\lambda L, \quad \text{avec} \quad \Delta_\lambda = -\frac{\lambda_0}{c} \frac{d^2 n}{d\lambda_0^2}.$$

Le temps de réponse d'une fibre monomode provient donc des vitesses de

groupes différents, dans l'unique mode LP₀₁, des différentes composantes spectrales de la lumière de l'impulsion; en conséquence, le temps de réponse σ_z dépend de σ_λ : σ_z n'est pas une pure caractéristique de la fibre — alors que c'était le cas de la dispersion modale (cf. § 1).

Le coefficient D_λ est le coefficient de dispersion du matériau; il dépend de la longueur d'onde λ_0 . La figure ci-dessous représente le



coefficient de dispersion de la silice, ie SiO₂ amorphe, matériau dont sont faites les fibres le plus couramment; D_λ s'annule pour

$\lambda_0 \approx 1,3 \mu\text{m}$, d'où l'intérêt des sources à cette longueur d'onde pour la télécommunication par fibre optique monomode.

exemple: À $\lambda_0 = 1,3 \mu\text{m}$, $D_\lambda \approx 1 \text{ ps/nm.km}$. Une diode laser à $1,3 \mu\text{m}$ et de largeur spectrale $\sigma_\lambda \approx 1 \text{ nm}$ permet de limiter le taux d'élargissement temporel des impulsions à $\sigma_z/L = |D_\lambda| \sigma_\lambda = 1 \text{ ps/km}$. Un débit numérique maximal $B_{\text{MAX}} = \frac{1}{\sigma_z} = 10 \text{ GHz}$ peut alors être transporté par une fibre de $L = 100 \text{ km}$.

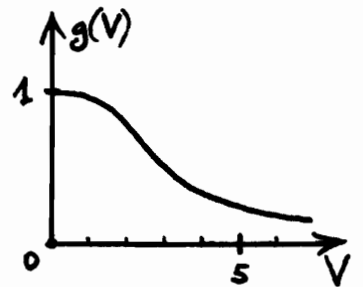
b) En seconde approximation, on tient compte de la correction à l'indice effectif β/k_0 du mode LP₀₁ qui est apportée par son expression exacte. D'après le § I-B-3-e, on a la relation

$$\frac{\beta}{k_0} = \sqrt{n_2^2 - (n_1^2 - n_2^2)g(V)}, \text{ avec } V = k_0 a_{\text{eff}} \approx n_2 k_0 a \sqrt{2\Delta},$$

où la fonction $g(V)$ a l'allure ci-contre. (*)

Comme $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \ll 1$, il vient l'expression

$$\frac{\beta}{k_0} \approx n_2(1 - g(V)\Delta).$$



On calcule ensuite la vitesse de groupe du mode LP₀₁, via v_g^{-1} :

$$v_g^{-1} = \frac{d}{d\omega} \left(k_0 \frac{\beta}{k_0} \right) = \frac{n_2}{c} - \frac{1}{c} \frac{dn_2}{dn_0} - \frac{n_2}{c} \Delta \frac{d}{dV} (Vg(V)).$$

Cette expression est obtenue en négligeant les termes en $\frac{dn_2}{dn_0} \Delta$, d'ordre supérieur, et en ne tenant pas compte de la dispersion affectant Δ .

Dans l'équation ci-dessus, le terme $-\frac{1}{c} \frac{dn_2}{dn_0}$ provient de la dispersion due au matériau (cf. § a précédent), tandis que le troisième terme $-\frac{n_2}{c} \Delta \frac{d}{dV} (Vg(V))$ trouve son origine dans la dispersion due au guidage.

Le temps de réponse $\sigma_z = \left| \frac{d}{d\lambda_0} \left(\frac{L}{v_g} \right) \right| \sigma_\lambda$ est alors trouvé sous la forme:

$$\sigma_z = |\Delta_{\text{ch.}}| \sigma_\lambda L,$$

(*) Dans les termes du § I-B-3, $g(V) = (X_{02}/V)^2$ où X_{02} dépend de V .

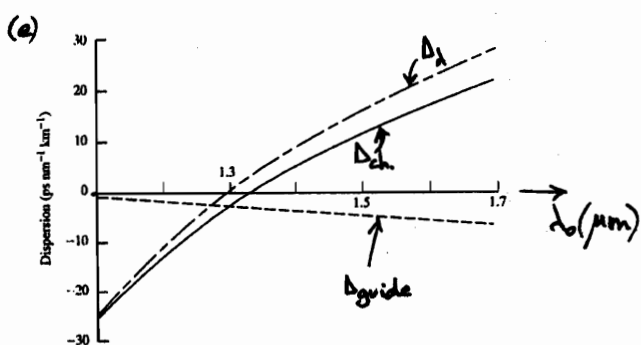
où le coefficient de dispersion chromatique

$$\Delta_{ch.} = \Delta_{\lambda} + \Delta_{guide}$$

se décompose en le coefficient de dispersion du milieu $\Delta_{\lambda} = -\frac{\lambda_0}{c} \frac{d^2 n}{d\lambda_0^2}$

(cf. § a) et en le coefficient de dispersion due au guidage

$$\Delta_{guide} = \frac{n_2}{c} \frac{V}{\lambda_0} \Delta \frac{d^2}{dV^2} (Vg(V)).$$



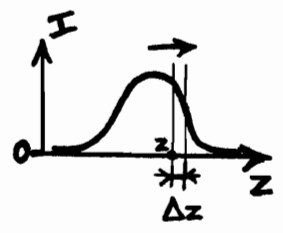
En général, Δ_{guide} n'apporte qu'une faible correction à Δ_{λ} . La figure ci-contre illustre cela dans une fibre monomode en silice typique.

Néanmoins, Δ_{guide} compte notablement au voisinage de $\Delta_{\lambda} = 0$, et son effet principal est de décaler la longueur d'onde λ_0 à laquelle la dispersion chromatique $\Delta_{ch.}$ s'annule.

c) On remarquera que la dispersion chromatique ^{tot} existe aussi dans une fibre multimode (cf. figure de la p. II-12), mais que son effet sur le temps de réponse est négligeable devant celui de la dispersion modale. L'élargissement temporel de chaque mode reste, en général, plus faible que la séparation entre les modes.

3) Fortes puissances: dispersion non linéaire

Une impulsion lumineuse de forte intensité $I(z,t)$ (en W/m^2) se propage dans une fibre monomode. Par effet Kerr optique, l'indice de la fibre varie linéairement avec I : $n_2(I) = n_2 + AI$, où A est une constante (supposée positive dans la suite).



La composante spectrale ω de l'impulsion subit

le déphasage $\frac{\omega}{c} [n_2 + AI(z,t)] \Delta z$ entre z et $z + \Delta z$. En $z + \Delta z$

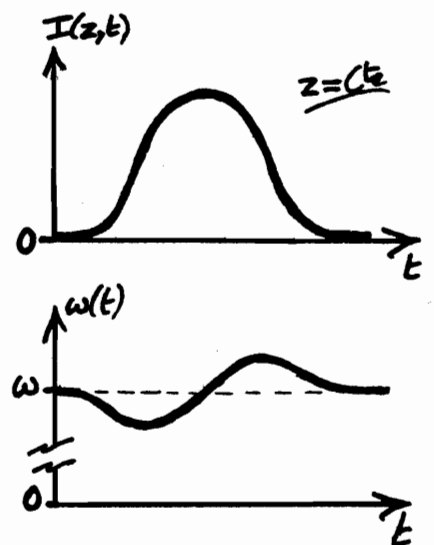
passent alors les composantes de pulsations $\omega(t) = \frac{d}{dt} \{ \omega t - \dots$

$$\frac{\omega}{c} [n_2 + AI(z,t)] \Delta z \} = \omega - \frac{\omega}{c} A \Delta z \frac{\partial I}{\partial t} :$$

des pulsations plus basses (resp. plus hautes)

que ω sont ainsi produites à l'avant

(resp. à l'arrière) de l'impulsion.



Alors, du fait de la dispersion due

au milieu, l'impulsion lumineuse s'élargit temporellement - si

$D_\lambda < 0$; pour $D_\lambda > 0$, elle commence par se comprimer avant de s'élargir.

(Dans le cas $D_\lambda > 0$, il existe un profil ^{particulier} d'impulsion lumineuse pour lequel

la dispersion non linéaire s'annule avec celle due au milieu: une telle

impulsion, dite soliton, se propage sans élargissement temporel.)

© Atténuation

L'atténuation le long d'une fibre optique est une limite à son utilisation : la puissance lumineuse en sortie de fibre est plus faible que celle en entrée, et on ne peut donc employer une longueur de fibre que si elle permet d'obtenir un signal optique détectable en sortie.

1) Coefficient d'atténuation linéique

a) On note $P(0)$ la puissance lumineuse en entrée de fibre, et $P(z)$ sa valeur au bout d'une longueur parcourue z dans la fibre. Du fait que les processus qui font disparaître les photons, lors de leur propagation dans la fibre, sont des processus locaux (cf. § 2), la puissance lumineuse est atténuée exponentiellement : $P(z) = P(0) e^{-\alpha z}$, où le coefficient d'extinction α s'exprime en km^{-1} . Il est cependant d'usage, dans la pratique, d'écrire

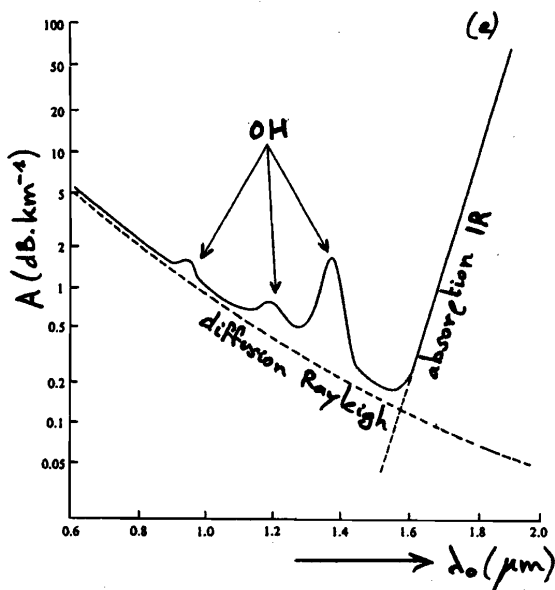
$$P(z) = P(0) 10^{-Az/10}, \quad \text{où} \quad A = \left(\frac{\ln 10}{10}\right)^{-1} \alpha$$

est le coefficient d'atténuation linéique, exprimé en $\text{dB} \cdot \text{km}^{-1}$.

b) Il est également usuel de représenter la puissance lumineuse P par la quantité sans dimension $\mathcal{P} = 10 \log_{10} \left(\frac{P}{P_{\text{ref}}} \right)$, où

$P_{ref.} = 1 \text{ mW}$; on exprime alors \mathcal{P} en dBm. L'intérêt de cette définition est de pouvoir manipuler la puissance lumineuse le long d'une fibre de façon linéaire; la loi précédente donnant $P(z)$ prend en effet la forme: $\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}(0) - Az$.

2) Origines de l'atténuation linéique



Le coefficient d'atténuation linéique de la silice dépend fortement de la longueur d'onde qui est utilisée (cf. figure ci-contre).

a) À $\lambda_0 < 1,6 \mu\text{m}$, A est dû à la diffusion Rayleigh de la lumière sur

les désordres moléculaires de la fibre, qui est un milieu amorphe. Un photon subissant une diffusion est envoyé dans n'importe quelle direction. Ceux qui sont fortement déviés — voire renvoyés en marche arrière — sont perdus, et contribuent à la perte de puissance lumineuse dans la fibre. (*)

La diffusion Rayleigh donne une variation de A en $A \propto 1/\lambda_0^4$. A est plus grand dans une fibre multimode que dans une fibre monomode.

(*) La diffusion provoque par ailleurs un couplage de lumière entre les modes d'une fibre multimode: pour $L > 1 \text{ km}$, on n'a plus $\sigma_z \propto L$ (cf. § B-1), mais $\sigma_z \propto \sqrt{L}$.

b) La seconde origine de l'atténuation linéique est l'absorption.

D'une part, pour $\lambda_0 > 1,6 \mu\text{m}$, l'absorption intrinsèque de la silice — due à des transitions vibrationnelles — domine la diffusion Rayleigh.

D'autre part, la dissolution accidentelle de vapeur d'eau dans la fibre, au moment de sa fabrication, provoque l'apparition de bandes étroites d'absorption provenant de modes de vibration de la liaison OH.

c) Finalement, une fibre en silice présente un minimum d'atténuation en $\lambda_0 \approx 1,55 \mu\text{m}$, valant $A \approx 0,2 \text{ dB.km}^{-1}$ ($0,16 \text{ dB.km}^{-1}$ dans une fibre monomode). Il existe aussi un minimum local en

$\lambda_0 \approx 1,3 \mu\text{m}$, valant $A \approx 0,5 \text{ dB.km}^{-1}$ ($0,3 \text{ dB.km}^{-1}$ en monomode).

$A = 0,16 \text{ dB.km}^{-1}$ signifie qu'un tronçon de fibre de 1 km transmet

$10^{-0,016} \approx 96\%$ de la lumière injectée en entrée; avec

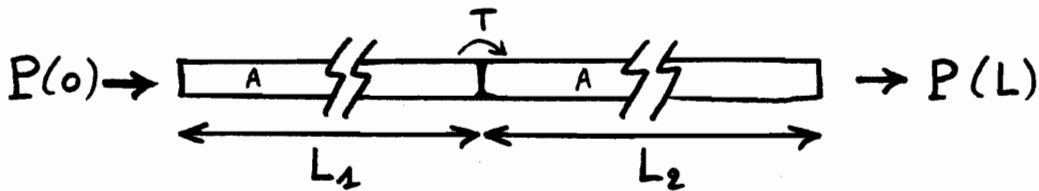
$A = 0,5 \text{ dB.km}^{-1}$, une même longueur de fibre en transmet encore 89%.

3) Connexions

Pour réaliser de longues liaisons par fibre optique, il faut connecter des tronçons de fibre entre eux, à l'aide de connecteurs ou d'épissures.

On considère deux tronçons de fibres identiques, connectées avec le

Facteur de transmission T : la fraction T de la puissance lumineuse qui arrive à l'extrémité de la première fibre poursuit sa propagation dans la seconde ($0 < T < 1$).



En appelant $P(0)$ la puissance lumineuse injectée dans la première fibre, la puissance qui émerge de la seconde fibre, après une longueur totale traversée de $L = L_1 + L_2$, vaut

$$P(L) = P(0) 10^{-\frac{AL_1}{10}} T 10^{-\frac{AL_2}{10}}, \text{ soit en échelle dB (cf. § 1):}$$

$$\mathcal{P}(L) = \mathcal{P}(0) - AL - \mathcal{C}, \quad \text{ou} \quad \mathcal{C} = -10 \log_{10} T \text{ est la}$$

"perte" locale due à la présence de la connexion (cette "perte" ne correspond pas^(*) à de la lumière perdue). Par exemple, une

connexion caractérisée par la "perte" $\mathcal{C} = 0,1$ dB possède le

facteur de transmission $T = 10^{-\mathcal{C}/10} \approx 98\%$.

(*) Du moins pas directement: \mathcal{C} est relié à T , c'est-à-dire à la lumière qui n'est pas perdue au passage de la connexion; mais si $T < 1$, de la lumière est perdue par ailleurs.

Annexe VI1) Approximation W.K.B. : raccordements de $f(r)$ en r_2 et en R_2

Dans l'approche W.K.B. des modes ^{de propagation} d'une fibre multimode, le profil radial $f(r)$ d'une composante cartésienne quelconque du champ diverge en r_2 et en R_2 , les deux racines de $n(r)^2 k_0^2 - \frac{l^2}{r^2} - \beta^2 = 0$ (cf. §A-2-c). Pour raccorder $f(r)$ de part et d'autre de ces points, on résout exactement l'équation de Helmholtz en leur voisinage.

Cette équation s'écrit
$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) + k_r(r)^2 f(r) = 0,$$

où $k_r(r)^2 = n(r)^2 k_0^2 - \frac{l^2}{r^2} - \beta^2$ peut être linéarisé lorsque r est proche de r_2 ou de R_2 . En s'attachant au voisinage de $r = R_2$, on peut écrire

$k_r(r)^2 = -\mathcal{C}(r - R_2)$, avec $\mathcal{C} > 0$. En utilisant ^{alors} le changement de variable $r = a e^w$, $f(r) = f(w)$, il vient $f''(w) - R_2^3 \mathcal{C}(w - w_2) f(w) = 0$

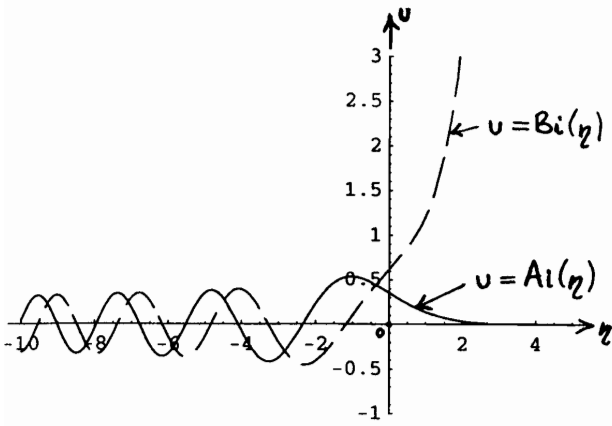
(où $R_2 = a e^{w_2}$).

On effectue un nouveau changement de variable : $\eta = R_2 \mathcal{C}^{1/3} (w - w_2)$,

$f(w) = g(\eta)$; on obtient ^{ainsi} l'équation différentielle

$$g''(\eta) - \eta g(\eta) = 0,$$

dans laquelle a disparu toute référence à une échelle de distance. Cette équation est l'équation différentielle d'Airy. Elle admet pour solution générale une



superposition linéaire des fonctions d'Airy $Ai(\eta)$ et $Bi(\eta)$, qui sont représentées ci-contre. Les règles de correspondance pour $f(r)$, de part et d'autre de $r=R_L$,

se déduisent des comportements de $Ai(\eta)$ et $Bi(\eta)$ pour $|\eta| \gg 1$.

$$\text{Lorsque } \eta \gg 1, \quad Ai(\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\eta^{3/4}} e^{-\frac{2}{3}\eta^{3/2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\eta^{3/2}}\right)\right),$$

$$\text{tandis que pour } \eta \ll -1, \quad Ai(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(-\eta)^{3/4}} \left[\cos\left(\frac{2}{3}(-\eta)^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{(-\eta)^{3/2}}\right) \right].$$

En remarquant que, pour $\eta > 0$, $\eta = \epsilon^{2/3} (r - R_L) = \epsilon^{-2/3} K(r)^2$ et

$$\frac{2}{3} \eta^{3/2} = \frac{2}{3} \epsilon^{3/2} (r - R_L)^{3/2} = \int_{R_L}^r \sqrt{\epsilon(r' - R_L)} dr' = \int_{R_L}^r K(r') dr', \text{ et que,}$$

$$\text{pour } \eta < 0, \quad -\eta = \epsilon^{2/3} (R_L - r) = \epsilon^{-2/3} k(r)^2 \text{ et } \frac{2}{3} (-\eta)^{3/2} = \int_r^{R_L} k(r') dr',$$

on obtient la règle de raccordement suivante :

$$\frac{2}{\sqrt{k(r)r}} \cos\left[\int_r^{R_L} k(r') dr' - \frac{\pi}{4}\right] \longleftarrow \frac{1}{\sqrt{K(r)r}} \exp\left[-\int_{R_L}^r K(r') dr'\right].$$

$(r < R_L)$ $(r > R_L)$

Cette relation se lit comme indiqué par la flèche : si le profil radial

$f(r)$ est de la forme $(K(r)r)^{-1/2} \exp\left[-\int_{R_L}^r K(r') dr'\right]$ dans la zone $r > R_L$,

alors $f(r)$ est essentiellement de la forme $2(k(r)r)^{-1/2} \cos\left[\int_r^{R_L} k(r') dr' - \frac{\pi}{4}\right]$ pour

$r < R_L$ (dans cette zone, il y a sans doute une contribution en

$(k(r)r)^{-1/2} \sin\left[\int_r^{R_L} k(r') dr' - \frac{\pi}{4}\right]$, générée par la non-linéarité de $k_r(r)^2$ au

voisinage de $r = R_2$, ^{mais} cette contribution en sin reste certainement négligeable devant la contribution principale en cos).

Il faut bien noter que la règle de raccordement précédente ne peut pas être employée en sens inverse de celui de la Pêche. En effet, partant de

$$f(r < R_2) = 2 (k(r)r)^{-1/2} \cos \left[\int_r^{R_2} k(r') dr' - \frac{\pi}{4} \right], \text{ on en déduit que}$$

$$f(r > R_2) = (K(r)r)^{-1/2} \exp \left[- \int_{R_2}^r K(r') dr' \right] + \varepsilon (K(r)r)^{-1/2} \exp \left[+ \int_{R_2}^r K(r') dr' \right],$$

où $|\varepsilon| \ll 1$, le terme en ε étant produit par la faible non-linéarité de $k_r(r)^2$ au voisinage de $r = R_2$; bien que $|\varepsilon| \ll 1$, c'est le second terme qui domine lorsque $r \gg R_2$ (*).

De façon similaire, une étude de l'équation de Helmholtz conduite au voisinage de $r = r_2$, où $k_r(r)^2$ est linéarisé : $k_r(r)^2 = \zeta'(r - r_2)$ ($\zeta' > 0$), permet d'aboutir à la règle de raccordement

$$\frac{1}{\sqrt{K(r)r}} \exp \left[- \int_r^{r_2} K(r') dr' \right] \longrightarrow \frac{2}{\sqrt{k(r)r}} \cos \left[\int_{r_2}^r k(r') dr' - \frac{\pi}{4} \right].$$

($r < r_2$) ($r > r_2$)

Les règles de raccordement de $f(r)$ en r_2 et en R_2 , qui viennent d'être citées, sont utiles à la détermination de la structure des modes de la fibre et à celle de leur constante de propagation (cf. § A-2-c).

(*) Le comportement asymptotique de $Bi(\zeta)$ permet d'obtenir $\frac{1}{\sqrt{k_r}} \sin \left[\int_r^{R_2} k dr' - \frac{\pi}{4} \right] \rightarrow \frac{-1}{\sqrt{K_r}} e^{+ \int_{R_2}^r K dr'}$, règle non utilisée dans ce cours.

2) Modes de propagation à l'approximation W.K.B.

Dans le cadre de la description W.K.B., la structure des modes de propagation est déterminée à l'aide des règles de raccordement vues au §1 précédent.

a) Pour $0 < r < r_2$ ($l \neq 0$), le profil radial $f(r)$ est de la forme

$$f(r) = A_0 \frac{1}{\sqrt{K(r)r}} \exp\left(-\int_r^{r_2} K(r') dr'\right);$$

en effet, la solution en $\exp(+\int_r^{r_2} \dots)$ est à écarter car elle diverge en $r=0$.^(*)

On sait alors que, sur l'intervalle $r_2 < r < R_2$, $f(r)$ vaut:

$$f(r) = A_0' \frac{2}{\sqrt{k(r)r}} \cos\left(\int_{r_2}^r k(r') dr' - \frac{\pi}{4}\right).$$

Dans le domaine $r > R_2$, le profil radial s'écrit

$$f(r) = A_0'' \frac{1}{\sqrt{K(r)r}} \exp\left(-\int_{R_2}^r K(r') dr'\right),$$

la solution en $\exp(+\int_{R_2}^r \dots)$ étant exclue à cause de sa divergence quand $r \rightarrow \infty$;

on en tire que $f(r)$ s'exprime par

$$f(r) = A_0'' \frac{2}{\sqrt{k(r)r}} \cos\left(\int_r^{R_2} k(r') dr' - \frac{\pi}{4}\right)$$

sur l'intervalle $r_2 < r < R_2$.

Les deux expressions obtenues pour $f(r)$ dans le domaine $r_2 < r < R_2$ doivent coïncider. En écrivant $\int_r^{R_2} k(r') dr' = \int_{r_2}^{R_2} \dots - \int_{r_2}^r \dots$, la seconde expression devient:

$$f(r) = A_0'' \frac{2}{\sqrt{k(r)r}} \left\{ \sin\left(\int_{r_2}^{R_2} k(r') dr'\right) \cos\left(\int_{r_2}^r \dots - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\int_{r_2}^{R_2} \dots\right) \sin\left(\int_{r_2}^r \dots - \frac{\pi}{4}\right) \right\}.$$

(*) Quand $r \rightarrow 0$, $K(r) \sim l/r$ d'où $\exp(+\int_r^{r_2} K(r') dr') \sim 1/r^l$ (et $\exp(-\int_r^{r_2} \dots) \sim r^l$).

Elle s'identifie à la première forme de $P(r)$ à condition que

$$\int_{r_2}^{R_2} k(r') dr' = (m - \frac{1}{2})\pi, \quad m=1, 2, 3, 4, \dots,$$

cette relation constituant l'équation caractéristique des modes de propagation; il vient

$$\text{alors } \delta b' = (-1)^{m-1} \delta b.$$

Finalement, $P(r)$ possède l'allure donnée au §A-2-c. Le profil radial d'un mode lm s'annule $m-1$ fois entre r_2 et R_2 (la figure de la page II-8 correspond à un mode avec $m=9$).

b) Dans le cas $l=0$, on a $r_{l=0}=0$ et le profil radial à l'approximation W.K.B.

s'écrit $P(r) \approx \frac{1}{\sqrt{k(r)r}} \exp\left(\mp i \int_0^r k(r') dr'\right)$ entre $r=0$ et $r=R_{l=0}$; en

$r=0$, il diverge comme $\frac{1}{\sqrt{r}}$ ($k(0) = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}$ restant fini). Afin de

déterminer l'expression de $P(r)$ pour $r>0$, on résout exactement l'équation de

Helmholtz au voisinage de $r=0$, où elle prend la forme d'une équation de

Bessel d'ordre zéro : $P''(r) + \frac{1}{r} P'(r) + k(0)^2 P(r) = 0$. Il vient donc

$P(r) \approx J_0(k(0)r)$, en excluant la solution $Y_0(k(0)r)$ qui diverge en $r=0$

(cf. annexe I, § 1). Sachant que $J_0(e) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi e}} \cos(e - \frac{\pi}{4})$ lorsque $e \gg 1$,

on en déduit que $P(r)$ s'écrit

$$P(r) = \delta b \frac{2}{\sqrt{k(r)r}} \cos\left(\int_0^r k(r') dr' - \frac{\pi}{4}\right)$$

pour $0 < r < R_0$, dans le cadre W.K.B.; c'est le même type de profil radial que

celui obtenu pour $l \neq 0$, dans le domaine $r_2 < r < R_2$. Par ailleurs, il est clair que le

raccordement de $k(r)$ en R_0 se discute de la même façon qu'au § a précédent. Cela mène à la conclusion que le cas $l=0$ se déduit des résultats us pour $l \neq 0$, en les étendant à $l=0$.

c) Il est possible de déterminer le nombre de modes de propagation supportés par la fibre, en analysant l'équation caractéristique $\int_{r_2}^{R_2} k(r) dr = (m - \frac{1}{2}) \pi$.

Définissant d'abord $\nu_l^p(\beta)$ comme le nombre de modes de l fixé ayant une constante de propagation β_{lm} plus grande que β , on a simplement^(*)

$$\nu_l^p(\beta) = \frac{1}{\pi} \left(\int_{r_2}^{R_2} k(r) dr + \frac{\pi}{2} \right), \text{ soit } \nu_l^p(\beta) \approx \frac{1}{\pi} \int_{r_2}^{R_2} k(r) dr \text{ car } \nu_l^p(\beta) \gg 1.$$

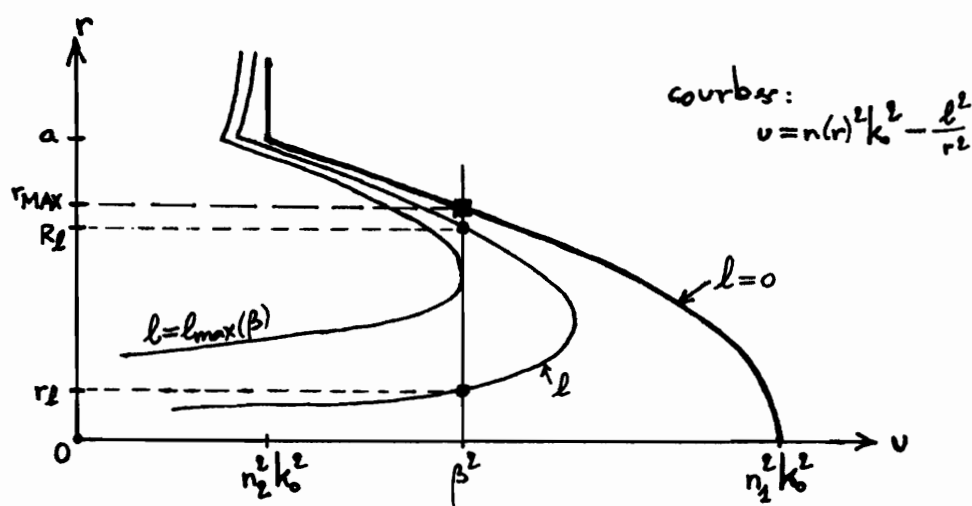
Le nombre de modes l_m avec $\beta_{lm} > \beta$ peut alors s'écrire

$$q_\beta = \sum_{l=0}^{l_{\max}(\beta)} \nu_l^p(\beta), \text{ où } l_{\max}(\beta) \text{ est la valeur maximale de } l \text{ qui permet}$$

qu'un mode existe avec une constante de propagation plus grande que β

(autrement dit, la valeur maximale de $n(r)^2 k_0^2 - \frac{l^2}{r^2}$ vaut β^2 lorsque

$l = l_{\max}(\beta)$).



(*) $\int_{r_2}^{R_2} k(r) dr$ décroît avec β , puisque $k(r) = \sqrt{n(r)^2 k_0^2 - \frac{l^2}{r^2} - \beta^2}$ diminue et l'intervalle $[r_2, R_2]$ rétrécit lorsque β croît.

Le nombre de modes étant élevé, l est traité comme une variable continue et on

$$\text{écrit } q_\beta \approx \int_0^{l_{\max}(\beta)} dl \, dl_{\max}(\beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{l_{\max}(\beta)} dl \int_{r_2(\beta)}^{r_1(\beta)} dr \sqrt{n(r)^2 k_0^2 - \frac{l^2}{r^2} - \beta^2}, \text{ soit, en}$$

inversant l'ordre des intégrales :

$$q_\beta = \frac{1}{\pi} \int_0^{r_{\max}(\beta)} dr \int_0^{l_{\max}(r,\beta)} dl \sqrt{n(r)^2 k_0^2 - \frac{l^2}{r^2} - \beta^2},$$

où $l_{\max}(r,\beta)$ annule $n(r)^2 k_0^2 - \frac{l^2}{r^2} - \beta^2$ à r (et β) fixé, c'est-à-dire

$$l_{\max}(r,\beta)^2 = r^2 [n(r)^2 k_0^2 - \beta^2], \text{ et où } r_{\max}(\beta) \text{ annule } n(r)^2 k_0^2 - \beta^2.$$

L'intégrale sur l se calcule facilement, avec le changement de variable

$$l = l_{\max}(r,\beta) \sin \gamma : \int_0^{l_{\max}(r,\beta)} dl \, k(r) = \frac{l_{\max}(r,\beta)^2}{r} \int_0^{\pi/2} d\gamma \cos^2 \gamma = \frac{\pi}{4} \frac{l_{\max}(r,\beta)^2}{r}, \text{ et la forme}$$

$$\text{de } q_\beta \text{ se réduit à } q_\beta = \frac{1}{4} \int_0^{r_{\max}(\beta)} dr \, r [n(r)^2 k_0^2 - \beta^2].$$

Le profil de constante diélectrique dans le cœur de la fibre étant supposé varier en

$$\text{loi de puissance : } n(r)^2 = n_1^2 \left(1 - 2 \left(\frac{r}{a} \right)^p \Delta \right),$$

la dernière expression de q_β fait intervenir des intégrales de puissances de r , et

$$\text{on trouve facilement } q_\beta = \frac{1}{4} \left[(n_1^2 k_0^2 - \beta^2) \frac{r_{\max}(\beta)^2}{2} - n_1^2 k_0^2 (2\Delta) \frac{1}{a^p} \frac{1}{p+2} r_{\max}(\beta)^{p+2} \right],$$

$$\text{soit, en introduisant } r_{\max}(\beta) = a \left[\frac{1 - (\beta/k_0 n_1)^2}{2\Delta} \right]^{1/p} :$$

$$q_\beta = \frac{p}{p+2} \frac{V^2}{8} \left\{ \frac{1 - (\beta/k_0 n_1)^2}{2\Delta} \right\}^{\frac{p+2}{p}}$$

$$\text{avec } V = k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = n_1 k_0 a \sqrt{2\Delta} \quad (n_2^2 = n(r=a)^2).$$

Le nombre total de modes l_m est obtenu en faisant $\beta = n_2 k_0$ dans

$$\text{l'expression de } q_\beta : \quad q_{\beta=n_2 k_0} = \frac{p}{p+2} \frac{V^2}{8}.$$

En tenant compte que chaque mode LP_{lm} est dégénéré 4 fois (en polarisation et en dépendance angulaire), on trouve donc que le nombre total de modes

$$LP_{lm} \text{ vaut } M = 4 \times q_{\beta=n_2 k_0} = \frac{p}{p+2} \frac{V^2}{2}.$$

Certes, les modes à $l=0$ ne sont en fait dégénérés que deux fois (en polarisation), mais leur nombre n'est qu'une faible fraction du nombre total de modes et l'erreur commise est négligeable.

d) Une forme analytique des constantes de propagation des modes supportés par la fibre peut être déduite de l'étude du §c précédent, par inversion de l'expression

de q_{β} ; il vient:

$$\beta_q = n_1 k_0 \left[1 - 2 \left(\frac{4q}{M} \right)^{\frac{p}{p+2}} \Delta \right]^{1/2},$$

où $q = 1, 2, 3, \dots, \frac{M}{4}$ numérote les modes lm par valeurs de β_{lm} décroissantes (sur la figure de la page II-9, $q=1$ correspond à $(l=0, m=1)$, $q=2$ à $(0, 2)$, $q=3$ à $(1, 1)$, $q=4$ à $(0, 3)$, etc.).

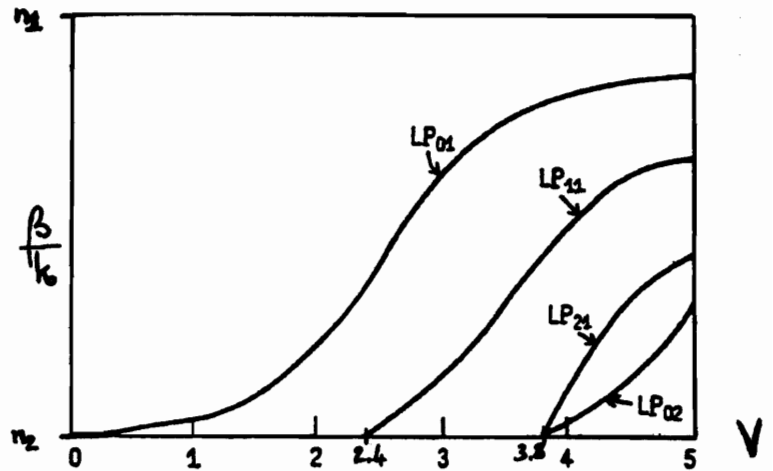
Cette expression des constantes de propagation est exploitée au §A-3, pour la détermination de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe des modes.

Sources bibliographiques des figures :

- (a) Saleh, Teich Fundamentals of Photonics (Wiley, 1991)
- (b) Prade, Vinet Optique Guidée (cours de l'ENSTA, années 80)
- (c) Ghatak, Thyagarajan Optical Electronics (Cambridge U.P., 1989)
- (d) Abramowitz, Stegun Handbook of Mathematical Functions (NBS, 1968)
- (e) Wilson, Hawkes Optoelectronics, an introduction (Prentice Hall, 1998)

OPTIQUE GUIDÉE: TD VI

1) La figure ci-contre représente les constantes de propagation β des modes de plus bas ordre d'une fibre à saut d'indice, en fonction du paramètre $V = k_0 a$ ou $(k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}, a: \text{rayon de cœur}, \alpha = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = n_1 \sqrt{2\Delta})$.



a) Quelles sont les dégénérescences des modes LP_{lm} ? Représenter l'allure des distributions transverses d'intensité dans chacun des modes apparaissant sur la figure.

b) Une fibre à saut d'indice possède un rayon de cœur $a = 5 \mu\text{m}$, un indice de refraction central $n_1 = 1,45$ et une variation relative d'indice $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} = 0,002$. Déterminer la plus courte longueur d'onde λ_c pour laquelle la fibre est monomode. Pour quelles longueurs d'onde la fibre supporte-t-elle deux modes?

2) Une fibre à saut d'indice, avec $n_1 = 1,45$ et $\Delta = 0,01$, est utilisée à $\lambda_0 = 1,3 \mu\text{m}$. Quel est son diamètre de cœur maximal pour qu'elle soit monomode? Que devient ce diamètre si λ_0 est réduit d'un facteur 2? si Δ est divisé par 4?

3) Évaluer le temps de réponse d'une fibre à saut d'indice avec $n_1 = 1,45$ et $\Delta = 0,01$, pour une longueur $L = 1 \text{ km}$. Si la même fibre est à profil parabolique d'indice (n_1 : indice sur l'axe), quel est son temps de réponse?

Quel débit numérique maximal peut être passé dans une longueur $L = 10 \text{ km}$ de ce fibres?

4) Le coefficient de dispersion de la silice vaut $D_\lambda = -80 \text{ ps}/(\text{km} \cdot \text{nm})$ à $\lambda_0 = 0,87 \mu\text{m}$. Quel est le temps de réponse d'une fibre monomode de longueur $L = 1 \text{ km}$, utilisée avec une source de largeur $\sigma_\lambda = 50 \text{ nm}$ (LED)? Quel débit numérique maximal peut

traverser une longueur $L = 10 \text{ km}$ de fibre ?

Mêmes questions si la source est une diode-laser à $1,3 \mu\text{m}$, de largeur spectrale $\sigma_\lambda = 2 \text{ nm}$; à $\lambda_0 = 1,3 \mu\text{m}$, $D_\lambda = 1 \text{ ps}/(\text{km}\cdot\text{nm})$.

5) Une fibre de longueur L possède la fonction de réponse $h(t)$: si la puissance en entrée est $p_0 \delta(t)$, alors la puissance en sortie est $p_0 h(t)$.

a) Tracer l'allure de $h(t)$; quelle est sa largeur ? Que vaut la puissance en sortie si celle d'entrée est un pulse centré en t' , $p_0 \delta(t-t')$?

b) Dans le cas où la puissance à l'entrée est continue, $P_e(t) = P_{e0} = C t^2$, montrer que le taux de transmission de la fibre est $\frac{P_{s0}}{P_{e0}} = \int dt h(t)$. [Truc : écrire $P_e(t) = \int dt' P_e(t') \delta(t-t')$]

c) La puissance d'entrée est modulée à la fréquence $\frac{\Omega}{2\pi}$: $P_e(t) = P_{e0} + p_{e0} \cos \Omega t$.
Montrer que, en sortie, $P_s(t) = P_{s0} + P_{se} (\bar{p}_{s0} e^{-i\Omega t})$ où $\bar{p}_{s0} = p_{e0} \text{TF}(h)(\Omega)$. Comment varie la fréquence de coupure en fonction du temps de réponse de la fibre ? Exprimer cette relation lorsque $h(t)$ a un profil gaussien ; évaluer les fréquences de coupure à -3dB des fibres du 3) et du 4) ($L = 10 \text{ km}$).

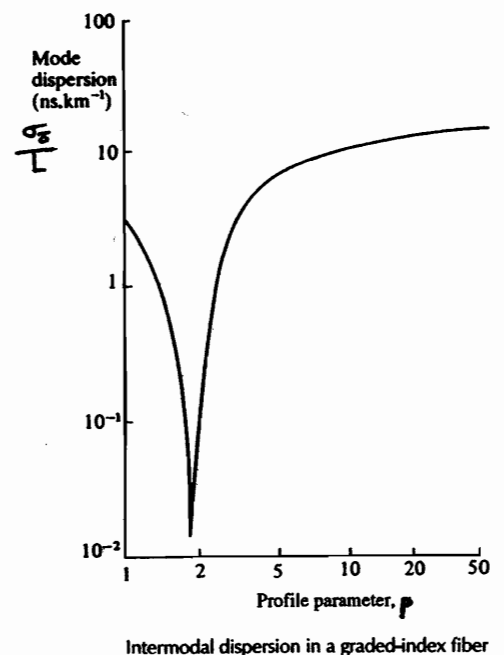
6) Dans la description W.K.B. des fibres multimodes, la constante de propagation du mode q est $\beta_q = k_0 n_2 [1 - 2(\frac{q}{M})^{p+2} \Delta]^{1/2}$, $q = 1, 2, 3, \dots, M/4$. M est le nombre de modes : $M = \frac{p}{p+2} \frac{V^2}{2}$, où $V = k_0 a \text{NA} = k_0 a n_2 \sqrt{2\Delta}$; p est le paramètre de profil (dans le cœur, $n(r) = n_2 [1 - (\frac{r}{a})^p \Delta]$).

a) En tenant compte de la dispersion due au matériau, montrer que la vitesse de groupe du mode

q est $v_g^{(q)} \approx \frac{c}{N_2} [1 - \frac{p-2}{p+2} (\frac{q}{M})^{p+2} \Delta]$ à l'ordre le plus bas en Δ , avec $p_s = 2 \frac{n_2}{N_2} \frac{\omega}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\omega}$.

b) Quelle est la valeur optimale du paramètre de profil, afin de minimiser la dispersion modale ?

c) Pourquoi la dispersion modale atteinte en pratique dans des fibres de profil optimal, est-elle plus élevée que celle qui peut être calculée (cf. figure) ?



7) Dans une fibre optique monomode, le coefficient de dispersion due au guidage s'écrit (cf. § VI-B-2-b) : $D_g = \frac{\Delta n_1}{c(V\lambda_0)} V^2 \frac{d^2}{dV^2}(Vg(V))$. Dans cette expression, la dispersion est négligée : $\Delta = c^2$, $n_1 = c^2$ et $V\lambda_0 = c^2$.

Pour une fibre donnée, la figure de la p. VI-18 montre que D_g varie linéairement avec λ_0 ($1,1 \mu\text{m} < \lambda_0 < 1,7 \mu\text{m}$); on écrit alors

$$D_g = \frac{\Delta n_1}{c(V\lambda_0)} (A V^{-1} + B), \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont des coefficients constants.}$$

a) Montrer que $g(V)$ prend la forme : $g(V) = \frac{A}{2} V^2 - B V^2 \ln V + C + D V^{-1}$.

Un ajustement de $g(V)$ avec cette loi donne, sur l'intervalle $1,5 \leq V \leq 3$:

$$A = -5,25, \quad B = 1,70, \quad C = 0,127 \quad \text{et} \quad D = 3,40.$$

b) Sur la figure en question, D_g s'annule pour $\lambda_0 \approx 1,0 \mu\text{m}$. En déduire que $V\lambda_0 \approx 3,1 \mu\text{m}$ pour la fibre considérée.

c) Pour quelles longueurs d'onde a-t-on $V \leq 2$?

d) Montrer que la pente $\Delta D_g / \Delta \lambda_0$ vaut $\frac{n_1 \Delta}{c(V\lambda_0)^2} A$.

Toujours sur la même figure, on estime cette pente à $-10 \text{ ps. nm}^{-1} \cdot \text{km}^{-1} \cdot \mu\text{m}^{-1} = -10 \text{ SI}$.

e) En admettant $n_1 = 1,5$, en déduire la valeur de Δ .

f) Que vaut le diamètre de cœur de la fibre ?

OPTIQUE GUIDÉE : TD VI bis

- 1) Une fibre de silice de longueur $L = 100 \text{ km}$ est utilisée à la longueur d'onde $\lambda_0 = 1,3 \mu\text{m}$, où son coefficient d'atténuation linéique vaut $A = 0,3 \text{ dB/km}$. La puissance lumineuse injectée à l'entrée de la fibre est de 1 mW .
- a) Exprimer la puissance d'entrée en dBm. Que vaut la puissance en sortie, exprimée en dBm et en mW ?
- b) La même fibre, de même longueur, possède maintenant une connexion. Une puissance de -21 dBm est recueillie en sortie, lorsque la puissance vaut 10 dBm à l'entrée. Quelle est l'atténuation, en dB, due à la connexion ? Quel est son facteur de transmission ?
- 2) Une source lumineuse injecte de la lumière en continu dans une fibre de longueur $L = 3 \text{ km}$. En sortie, une puissance de $500 \mu\text{W}$ est détectée. Ensuite, une longueur $L' = 2 \text{ m}$ est découplée en début de fibre ; la puissance mesurée en sortie est alors de 1 mW .
- Que vaut le coefficient d'atténuation linéique de la fibre ? Préciser les conditions opératoires qui permettent de faire cette mesure.
- 3) Une diode-laser envoie des impulsions lumineuses vers l'entrée d'une fibre optique de longueur L , comprise entre $z = 0$ et $z = L$. La lumière qui revient de la fibre est analysée temporellement.
- a) Un pic d'intensité lumineuse est détecté à une date proche de celle des émissions des impulsions par la source. D'où provient ce pic de détection ? (La date de détection de ce pic est prise comme origine $t = 0$ des temps.)

Un second pic de détection est observé à la date $T = 20 \mu\text{s}$. D'où provient-il ?
Sachant que l'indice de la fibre est 1,5, quelle est sa longueur L ?

b) Entre $t=0$ et $t=T$, un signal continu est détecté, dont la puissance en échelle dBm décroît linéairement au cours du temps. De quel endroit z de la fibre provient le signal détecté à la date t ? À quel phénomène est dû ce signal ?

Le signal continu décroît de 2 dBm entre $t=0$ et $t=T$. En déduire le coefficient d'atténuation linéique de la fibre (en dB/km).

c) Montrer que cette méthode d'analyse d'une fibre, appelée réflectométrie, permet également de localiser une connexion et de mesurer son atténuation.

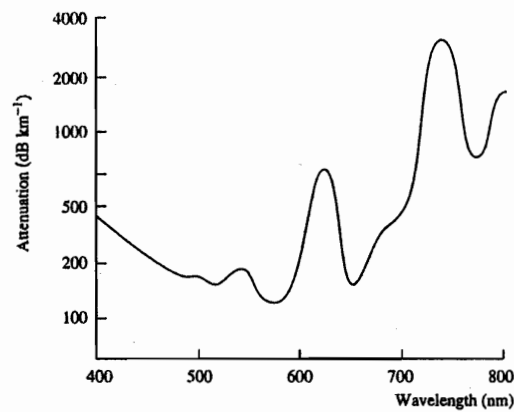
4) Une liaison de communication par fibre optique fonctionne à $B = 10 \text{ Mbit/s}$. La source est une diode-laser de 1 mW, $\lambda_0 = 0,87 \mu\text{m}$. La fibre, d'atténuation linéique 3,5 dB/km, est faite de tronçons de 1 km de long. Les connecteurs entre tronçons ont une "perte" de 2 dB ; les coupleurs d'entrée et de sortie ont la même "perte" de 2 dB. Deux photodétecteurs sont disponibles : une photodiode Si pin de sensibilité 5000 photons par bit, et une photodiode Si à avalanche de sensibilité 125 photons/bit.

Déterminer la longueur maximale de la liaison pour chacun des récepteurs, sachant que la puissance qu'ils reçoivent doit être 6 dB au-dessus de leur sensibilité.

5) Une fibre passe suivant la diagonale d'un cube d'arêtes de 3 cm, dont les faces ^{internes} sont tapissées de détecteurs au Si. Un laser He-Ne ($\lambda_0 = 633 \text{ nm}$) injecte de la lumière en entrée de fibre, et une puissance de 4 mW est mesurée en sortie — une courte longueur de fibre est utilisée. Le courant obtenu des cellules branchées en parallèle est 100 nA.

Estimer les pertes par diffusion Rayleigh dans la fibre, en dB/km. (La réponse des détecteurs utilisés à 633 nm est 0,3 A/W.)

6) Une fibre optique tout plastique est faite d'un cœur en PMMA ($n_1 = 1,495$) et d'une gaine plastique d'indice $n_2 = 1,402$. Son atténuation linéique est représentée ci-dessous, en fonction de la longueur d'onde qui la traverse.



- a) À $\lambda_0 = 650 \text{ nm}$, $A \approx 150 \text{ dB.km}^{-1}$. Quelle longueur maximale de fibre peut-on utiliser à cette longueur d'onde, si l'on veut que 3% au moins de la puissance lumineuse injectée en entrée parvienne en sortie ?
- b) Que vaut l'ouverture numérique de la fibre ? À quel angle d'acceptance θ_a (et d'émergence) correspond-elle ?
- c) En sortie d'une fibre de 1 m de longueur, on mesure le diagramme de rayonnement (à $\lambda_0 = 650 \text{ nm}$). On obtient une courbe en cloche, et on a $\theta \approx \pm \theta_a$ à 10% de la valeur du maximum (en $\theta = 0$). Expliquer qu'il existe de la lumière émergente avec $|\theta| > \theta_a$.
- d) La source lumineuse employée dans l'expérience précédente possède sa propre ouverture numérique, et son diagramme de rayonnement est structuré. Pourquoi, néanmoins, le diagramme de rayonnement obtenu au bout de 1 m de fibre est-il caractéristique de la fibre seule ? Que s'attend-on à observer sur ce diagramme de rayonnement pour des longueurs de fibre de plus en plus courtes (jusqu'à 1 cm, par exemple) ?

TRAVAUX PRATIQUES

FIBRES OPTIQUES

Dans cette séance de travaux pratiques, une fibre en silice multimode est étudiée avec un laser continu pour examiner la question du couplage laser-fibre, et déterminer l'ouverture numérique et l'atténuation linéique de la fibre ; le couplage dans une fibre monomode est également envisagé. Par ailleurs, une liaison par fibre monomode entre une source laser modulée (simple ou double) et une détection de lumière permet de s'intéresser aux principes de la communication par fibre optique, à la détermination de la longueur de la liaison et à la mesure de la dispersion chromatique de la fibre.

Quelques rappels :

1) Une lumière monochromatique se propageant le long d'une fibre dans le sens des z croissants, la puissance lumineuse $P(z)$ dans la fibre suit la loi exponentielle $P(z) = P(z=0) \exp(-\alpha z)$, où α est le coefficient d'atténuation de la fibre (exprimé en km^{-1}). Il est d'usage, dans la pratique des fibres optiques, d'écrire plutôt :

$$P(z) = P(z=0) 10^{-Az/10},$$

A étant le coefficient d'atténuation linéique exprimé en dB/km ($\alpha = 0,23A$). A dépend de la longueur d'onde de la lumière guidée le long de la fibre optique.

2) L'angle d'acceptance d'une fibre optique multimode est l'angle maximal que peut faire un rayon incident extérieur avec l'axe de la fibre, de façon que le rayon réfracté soit guidé à l'intérieur de la fibre ; c'est aussi l'angle que fait la lumière en sortie de fibre, lorsque tous les rayons susceptibles d'être guidés sont bien présents à l'intérieur de la fibre. Cet angle d'acceptance θ_a est donné par :

$$\sin\theta_a = \sqrt{n_1^2 - n_2^2},$$

où n_1 est l'indice de réfraction du cœur et n_2 celui de la gaine. Le second membre de l'équation ci-dessus est l'ouverture numérique de la fibre.

3) Dans un milieu (illimité) d'indice de réfraction $n(\lambda_0)$, la vitesse de groupe d'une impulsion lumineuse à la longueur d'onde λ_0 vaut :

$$v_g(\lambda_0) = \frac{c}{N(\lambda_0)}, \quad \text{où } N(\lambda_0) = n(\lambda_0) - \lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0}(\lambda_0)$$

est l'indice de groupe du milieu.

I – Fibres optiques en silice étudiées en continu

Matériel

On dispose de deux rouleaux de fibre nue, l'un d'une fibre multimode, l'autre d'une fibre monomode à 850nm. La lumière à guider dans la fibre est celle émise par un laser hélium-néon à 633nm. Pour réaliser le couplage de lumière dans la fibre, on utilise une table micrométrique xy qui déplace transversalement l'extrémité de fibre, et un collimateur monté sur un mouvement longitudinal. Laser, collimateur et table xy sont installés sur un rail.

Les mesures de puissance lumineuse en sortie de fibre s'effectuent avec un microwattmètre donnant une lecture en dBm ($P[\text{dBm}] = 10\log P[\text{mW}]$). **La puissance incidente sur ce détecteur ne doit pas dépasser 0dBm (1mW) : NE PAS L'UTILISER POUR MESURER LA PUISSANCE DU LASER.**

I.1 Préparation des extrémités de fibre

Dérouler la bobine de fibre multimode sur un bon mètre. Dans la flamme d'un briquet, brûler l'extrémité sur 1cm environ (c'est la gaine de protection polymérique qui brûle), puis briser net la portion de fibre ainsi fragilisée en la pliant entre le pouce et l'index. Installer cette extrémité préparée dans le support aménagé sur la table xy.

Préparer l'autre extrémité de la fibre de la même façon, et l'installer à l'entrée du microwattmètre : soulever l'aimant, introduire la fibre, reposer l'aimant sur la fibre installée.

I.2 Couplage de lumière dans et hors de la fibre

Laser allumé, jouer sur les réglages micrométriques de la table xy, du mouvement du collimateur et de positionnement du laser, afin de coupler le maximum de lumière dans la fibre.

Déconnecter la fibre du microwattmètre, et envoyer la lumière émergente sur un écran (**NE PAS DIRIGER LA SORTIE DE FIBRE VERS L'ŒIL**). Expliquer l'aspect de l'écran et son évolution quand la fibre est remuée. Estimer l'ouverture numérique, puis $\Delta = (n_1 - n_2)/n_1$.

Déconnecter et reconnecter plusieurs fois la sortie de fibre sur le microwattmètre. Quantifier l'incertitude de la mesure de puissance en sortie de fibre.

Ôter puis réinstaller le support d'entrée de fibre sur la table xy.

Conclure sur la reproductibilité des couplages laser-fibre et fibre-wattmètre.

I.3 Mesure de l'atténuation linéique

Retoucher les réglages micrométriques pour maximiser la puissance lumineuse mesurée en sortie de fibre. Relever la puissance lue.

Sans modifier le couplage de lumière en entrée de fibre, brûler et briser la fibre à un mètre environ de l'entrée. Placer cette nouvelle sortie sur le microwattmètre, et relever la puissance détectée. En déduire l'atténuation linéique de la fibre ; commenter la valeur obtenue. (Ou bien : A valant environ 10dB/km à 633nm, estimer la longueur de la fibre.)

Quelle hypothèse fait-on dans cette mesure ? La vérifier.

I.4 Fibre monomode

Préparer les deux extrémités de la fibre monomode à 850nm comme au I.1 ci-dessus. Coupler au mieux le faisceau laser dans la fibre en plaçant la sortie de fibre sur le microwattmètre. Commenter la puissance détectée en sortie, en comparaison avec celle obtenue en sortie de la fibre multimode.

Observer la lumière émergente en sortie sur un écran. Commenter. Faire quelques tours de la fibre sur un stylo ; observer l'écran et expliquer.

II – Lumière modulée dans une liaison optique

Matériel

Une liaison par fibre optique entre une ou deux diodes laser et une détection de lumière, est réalisée avec les éléments contenus dans quatre boîtiers (kit de marque IDIL) :

(i) boîtier de sources

Ce boîtier contient deux diodes laser à 1310nm et 1550nm, qui peuvent fonctionner en continu, en modulation numérique jusqu'à 100kHz ou en régime impulsionnel (20ns de largeur d'impulsions). En fonctionnement, ces sources doivent être suivies des isolateurs adaptés, disponibles sur le boîtier *(iii)*.

(ii) boîtier de fibres

Ce boîtier contient trois fibres en silice, de longueurs 300m, 600m et 2000m. Ces fibres sont monomodes aux deux longueurs d'onde utilisées. La fibre de 600m comporte une épissure en son milieu, de perte 1dB environ.

(iii) boîtier de composants passifs

Ce boîtier contient deux coupleurs, l'un 50%/50% (coupleur 3dB), l'autre 90%/10% (coupleur 10dB). Il contient également les isolateurs à 1310nm et à 1550nm qui sont à connecter (dans le bon sens) à la sortie immédiate des deux diodes laser du boîtier *(i)*.

(iv) boîtier de détecteurs

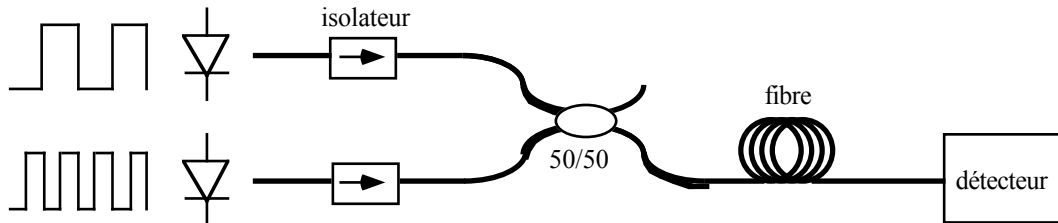
Ce boîtier contient deux détecteurs identiques fonctionnant dans l'infra-rouge proche, de bande passante 100MHz. Il contient également deux atténuateurs -20dB (1/100^{ème}), à utiliser pour éviter la saturation des détecteurs, ainsi qu'un multiplexeur pour les longueurs d'onde 1310nm et 1550nm utilisées.

Les connexions entre les différents éléments contenus dans les boîtiers sont effectuées avec des cordons gainés de fibre monomode. Bien que plus robustes que la fibre nue, **CES CORDONS RESTENT FRAGILES ET DOIVENT ÊTRE MANIPULÉS AVEC PRÉCAUTION : ON VEILLERA À NE PAS LES PLIER, À NE PAS FAIRE DE NŒUDS ; LES BRANCHEMENTS ET LES DÉBRANCHEMENTS SE FERONT EN TENANT LE CONNECTEUR** (et sans tirer sur les cordons eux-mêmes).

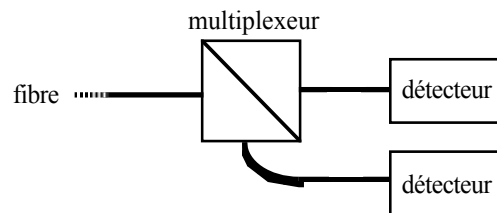
II.1 Communication par fibre optique

Moduler l'une des deux diodes laser en envoyant la sortie TTL (signal carré 0-5V) d'un générateur de basses fréquences sur son entrée de modulation numérique (elle se déclenche pour un signal entre 3,5 et 5V). Après traversée de l'une des trois fibres, détecter la lumière modulée et visualiser le signal de modulation à l'oscilloscope.

Moduler l'autre diode laser avec la sortie TTL d'un second GBF. Envoyer sa lumière sur la même fibre à l'aide du coupleur 50/50.



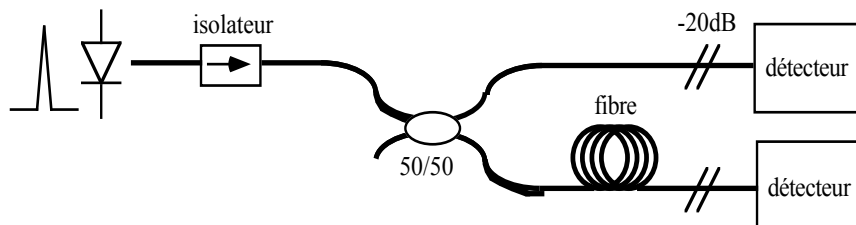
Le signal détecté est alors un mélange des deux signaux de modulation ; il est non périodique et illisible. Retrouver les deux signaux séparément en utilisant le multiplexeur.



En branchant l'écouteur sur l'une ou l'autre des sorties de détection, apprécier la possibilité de faire circuler deux canaux de communication sur une seule fibre.

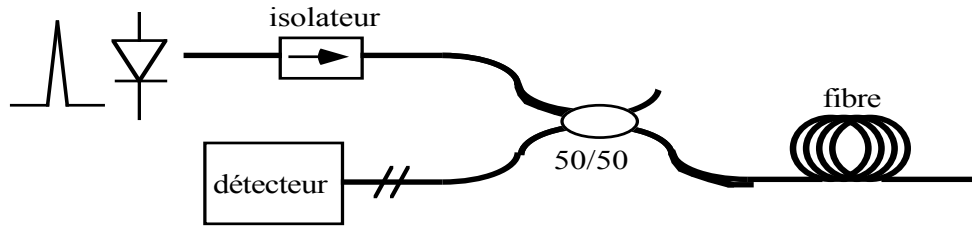
II.2 Mesures de longueurs de fibre

La lumière de l'une des deux diodes laser est émise sous forme d'impulsions, en connectant la sortie TTL d'un GBF à l'entrée "Ext. Trigg" du boîtier des diodes laser. Les impulsions durent 20ns et leur taux de répétition est fixé par le GBF. Ces impulsions sont envoyées dans le coupleur 50/50. L'une des sorties du coupleur est directement reliée à un détecteur ; sur l'autre sortie, on interpose une fibre optique.



Déduire la longueur de la fibre des signaux détectés, en utilisant l'indice de réfraction de la silice $n = 1,468$. Mesurer ainsi les longueurs des trois fibres. Estimer la précision.

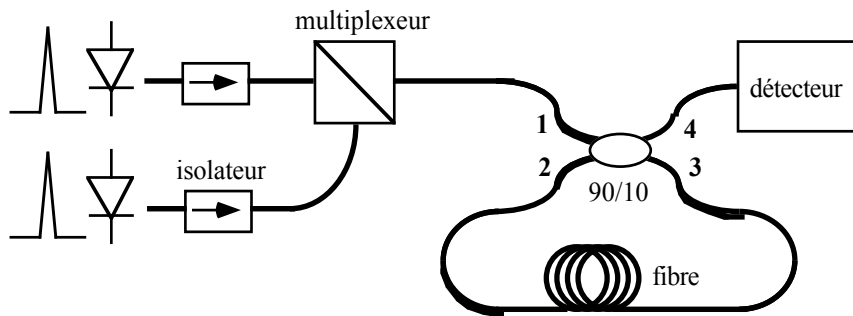
Il est possible également d'accéder à la longueur de la fibre, en ne se connectant qu'à une seule de ses extrémités. Le montage est le suivant :



Interpréter le signal obtenu et retrouver la longueur de la fibre.

II.3 Dispersion chromatique

Pour observer la dispersion chromatique d'une fibre optique monomode, les deux diodes laser émettent des impulsions synchrones qui sont multiplexées. Ce signal est alors envoyé sur le coupleur 90/10 ; un détecteur est branché sur la sortie 90%, tandis que la fibre de 2000m est connectée sur les deux autres voies du coupleur.



Dans la boucle qui contient la fibre, une impulsion qui passe par le coupleur est détectée pour $T_{24} = 10\%$ de sa puissance, et continue dans la boucle pour les $T_{23} = 90\%$ restant.

Observer le signal détecté lorsque les impulsions à 1310nm et à 1550nm, initialement synchrones, ont parcouru plusieurs fois la boucle. Mesurer alors l'écart de temps de vol des deux impulsions ; en déduire le coefficient de dispersion D_λ de la fibre en silice à la longueur d'onde moyenne 1430nm. (D_λ est défini par $(1/c)(dN/d\lambda_0) = -(\lambda_0/c)(d^2n/d\lambda_0^2)$.) Comparer la valeur obtenue aux valeurs tabulées pour la silice.