ÉCOLE DE PHYSIQUE
LES HOUCHES
Session XXIV

École Prédoctorale

Optique Quantique

10-21 septembre 2007

Mesures à la limite quantique

~ 4ème cours ~

A. Heidmann

Laboratoire Kastler Brossel

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE PIERRE & MARIE CURIE
LA SCIENCE A PARIS

Résumé des cours précédents

- Modélisation d'une mesure en mécanique quantique

  Couplage de l'objet avec une sonde quantique

  – Bruit dans la mesure et action en retour

  – Décohérence quantique par couplage avec l'environnement

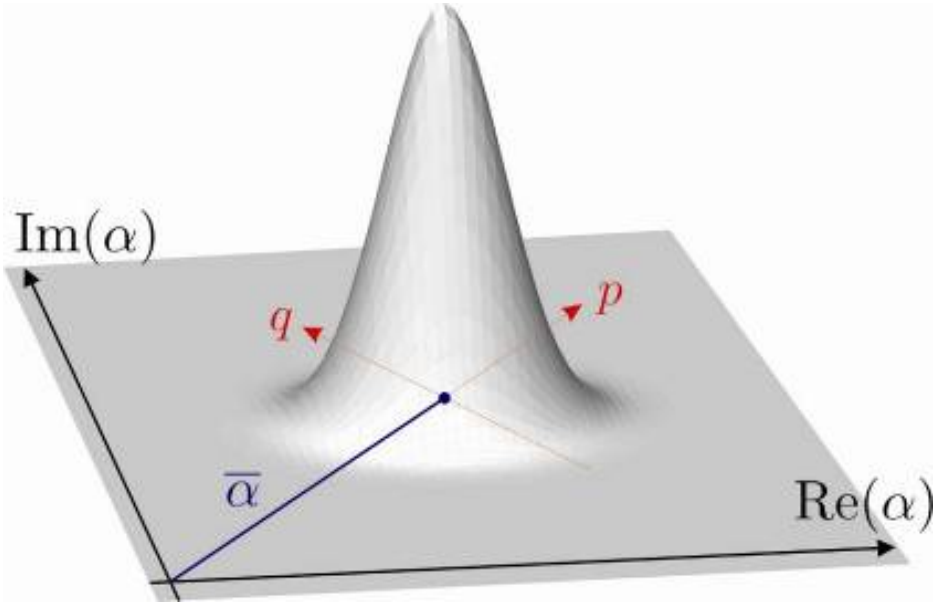
- Description semi-classique du bruit quantique dans une mesure

  Théorie d'entrée-sortie pour les bruits où l'évolution obéit aux équations classiques linéarisées

- Réflexion sur un miroir mobile

  – Mesure optique de position

  – Bruit dans la mesure et action en retour



Plan du quatrième cours

Exemples de mesure à la limite quantique

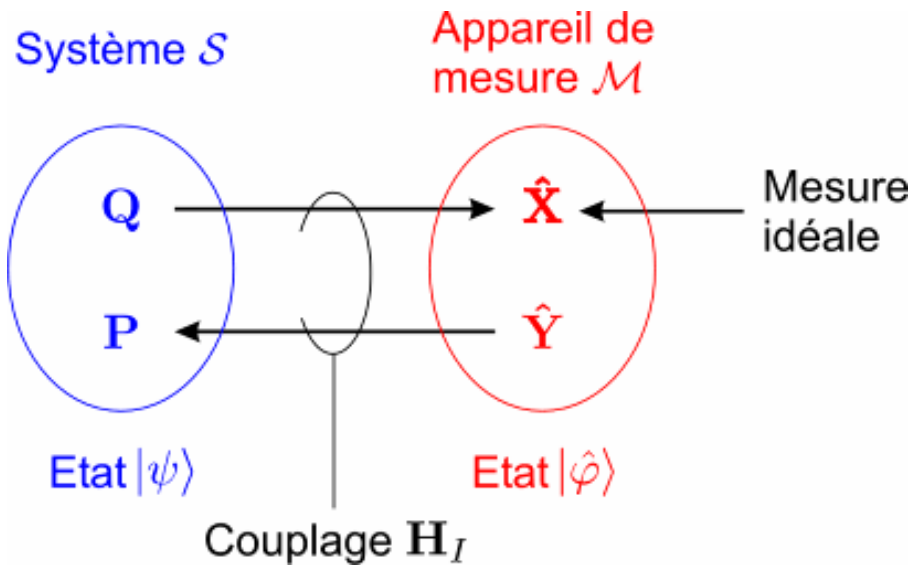
- Mesures quantiques non destructives
  - Critères de non démolition : variance conditionnelle et transfert
  - Réalisations expérimentales en optique
- Mesures spectroscopiques
  - ➪ Séminaire de Sébastien Bize :
    Horloges atomiques et applications
  - Mesures d'absorption d'un milieu
- Images Quantiques
  - ➪ Cours de Claude Fabre, séminaire de Mikhail Kolobov :
    Limites quantiques de la super-résolution
- Mesures de position
  - ➪ Séminaire de François Bondu :
    L'interférométrie à ondes gravitationnelles
  - Mesures avec des cavités optiques de grande finesse

Définition formelle d'une mesure QND

Pas de perturbation de la quantité mesurée :

- Absence d'action en retour sur l'observable mesurée
- L'observable est une constante du mouvement ultérieur

→ Pas de limite quantique liée à un compromis entre bruit de la mesure et action en retour



Etat initial : $|i\rangle = |\psi\rangle \otimes |\hat{\varphi}\rangle$

Etat couplé : $|f\rangle = \mathbf{U}\,|\psi\rangle \otimes |\hat{\varphi}\rangle$

avec $\mathbf{U} = \exp(-i\mathbf{H}_I\tau/\hbar)$

Si $|\psi\rangle = |q\rangle$, le système doit rester dans l'état propre $|q\rangle$:

$$\mathbf{Q}\,|f\rangle = q\,|f\rangle \;\rightarrow\; \mathbf{QU}\,|q\rangle \otimes |\hat{\varphi}\rangle = q\mathbf{U}\,|q\rangle \otimes |\hat{\varphi}\rangle = \mathbf{UQ}\,|q\rangle \otimes |\hat{\varphi}\rangle$$

→ Commutateur nul dans l'état $|\hat{\varphi}\rangle$: $[\mathbf{Q}, \mathbf{U}]\,|\hat{\varphi}\rangle = 0$

Définition formelle d'une mesure QND

1 – Absence d'action en retour

$[\mathbf{Q}, \mathbf{U}]\,|\widehat{\varphi}\rangle = 0$ signifie que l'opérateur $\mathbf{Q}$ en représentation de Heisenberg n'a pas changé lorsque la sonde est dans l'état $|\widehat{\varphi}\rangle$:

$$[\mathbf{Q}, \mathbf{U}]\,|\widehat{\varphi}\rangle = 0 \;\rightarrow\; \left(\mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{Q}\mathbf{U} - \mathbf{Q}\right)|\widehat{\varphi}\rangle = 0 \;\rightarrow\; \mathbf{Q}(\tau)\,|\widehat{\varphi}\rangle = \mathbf{Q}\,|\widehat{\varphi}\rangle$$

2 possibilités :

- Préparation de l'état initial de la sonde

  Etat propre du commutateur $[\mathbf{Q}, \mathbf{U}]$ avec la valeur propre 0.

- $\mathbf{Q}$ reste constant lors du couplage : $[\mathbf{Q}, \mathbf{U}] = 0$

  Condition suffisante : $[\mathbf{Q}, \mathbf{H}_I] = 0$

  $\rightarrow$ C'est ce que nous avions choisi pour décrire les mesures indirectes dans le cours 1 : $\mathbf{H}_I = \eta\,\mathbf{Q}.\widehat{\mathbf{Y}}$

Définition formelle d'une mesure QND

2 – L'observable est une constante du mouvement ultérieur

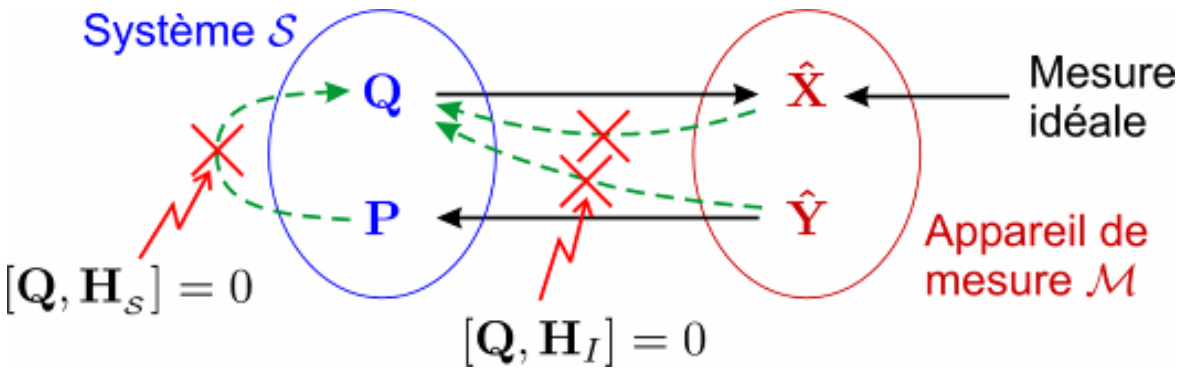
Pour éviter que l'action en retour ne soit ultérieurement couplée à l'observable mesurée, l'observable doit être une constante du mouvement :

$$[\mathbf{Q}, \mathbf{H}_{\mathcal{S}}] = 0$$

Exemples d'observables QND :

- Impulsion $\mathbf{P}$ pour une particule libre
- Energie, nombre $a^\dagger a$ de quanta, quadratures p, q, a_θ pour un oscillateur harmonique libre $\left(\mathbf{H}_{\mathcal{S}} = \hbar\omega_0(a^\dagger a + 1/2)\right)$

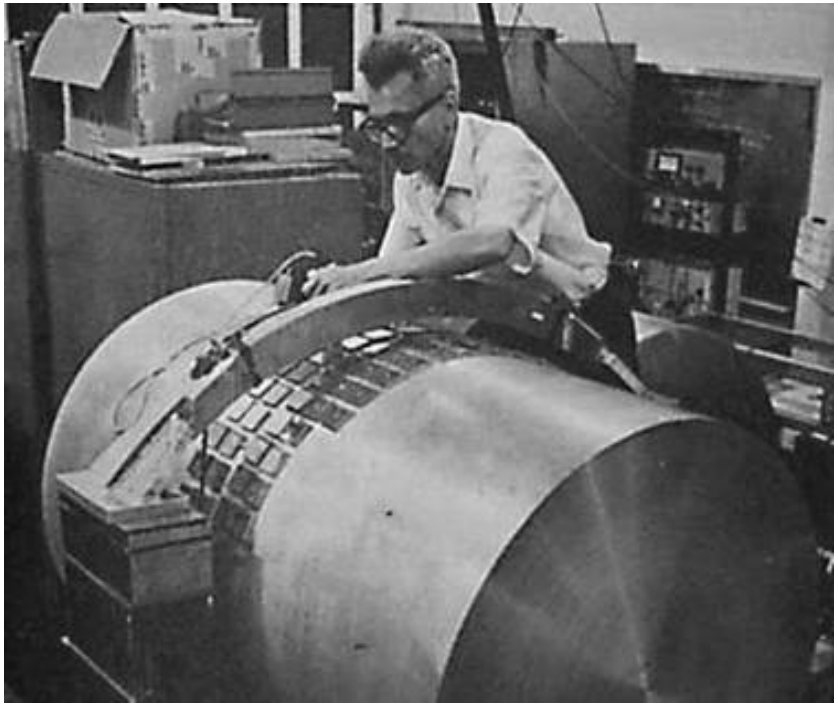
→ L'observable $\mathbf{Q}$ est une constante pour $\mathbf{H}_{\mathcal{S}}$ et $\mathbf{H}_I$



Mesures QND en optique quantique

Les concepts des mesures QND ont été développés au départ pour les systèmes mécaniques, dans le cadre de la détection des ondes gravitationnelles.

L'objectif était de battre la limite quantique standard dans les barres de Weber et les interféromètres



Les premières expériences ont été réalisées dans le domaine de l'optique quantique, avec des faisceaux se propageant dans des milieux non linéaires.

→ Aspects liés aux communications optiques

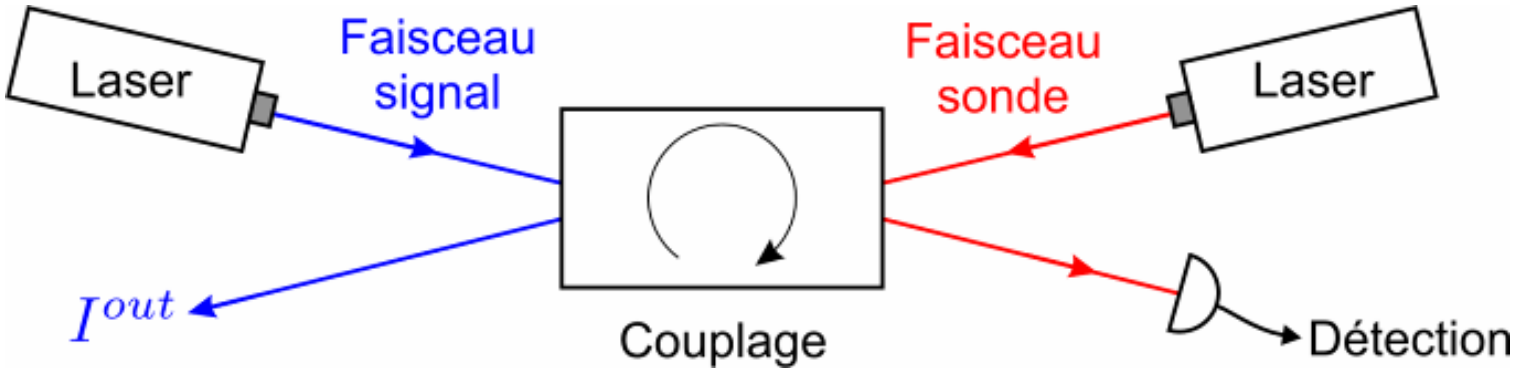
Puis des mesures QND ont été réalisées avec des systèmes uniques (1 photon – cf. cours 1, 1 électron dans un cyclotron, 1 Qubit,…)

→ Tests de la mécanique quantique et information quantique

Mesures QND en optique quantique

Le principe des mesures QND en optique quantique consiste à coupler 2 faisceaux lasers par l'intermédiaire d'un milieu non linéaire :

On cherche à mesurer à l'aide d'un faisceau sonde une quadrature d'un faisceau signal (généralement l'intensité), sans la perturber



La mesure n'est pas parfaite (pertes, bruits du faisceau sonde,…)

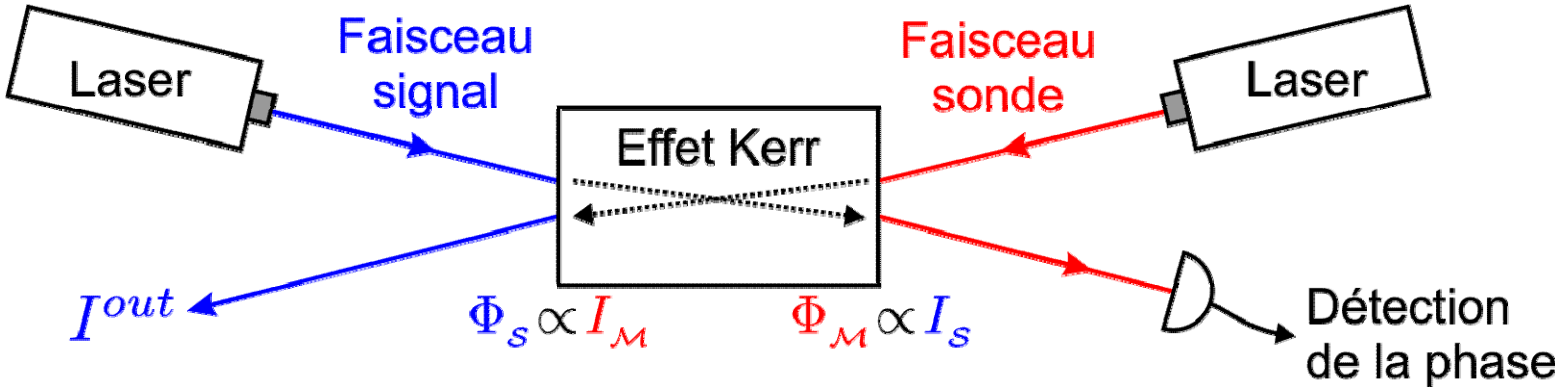
→ Il faut définir des critères plus explicites que la définition formelle d'une mesure QND. Paramètres mesurables expérimentalement et utiles pour décrire la mesure :

- Qualité des corrélations entre le signal et la sonde
- Perturbations entrée – sortie sur le signal

Réalisation pratique par effet Kerr croisé

On utilise un milieu non linéaire dont l'indice dépend de l'intensité de la lumière traversant le milieu.

En jouant sur les polarisations, on peut créer des effets croisés :
le déphasage d'un faisceau dépend de l'intensité de l'autre faisceau



Equations d'entrée – sortie (cas idéal) :

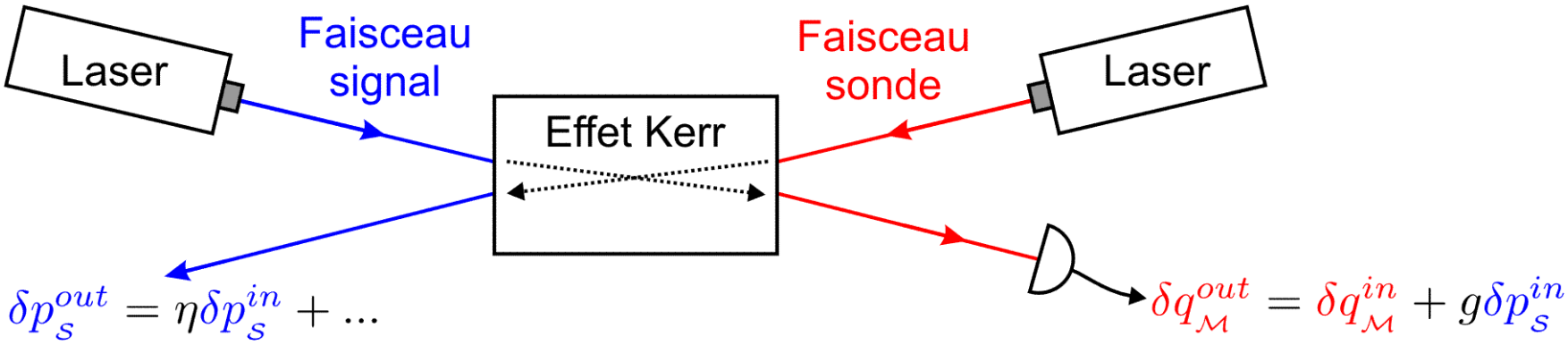
$$\begin{cases} \delta p_{\mathcal{M}}^{out} = \delta p_{\mathcal{M}}^{in} \\ \delta q_{\mathcal{M}}^{out} = \delta q_{\mathcal{M}}^{in} + g\delta p_{\mathcal{S}}^{in} \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta p_{\mathcal{S}}^{out} = \delta p_{\mathcal{S}}^{in} \\ \delta q_{\mathcal{S}}^{out} = \delta q_{\mathcal{S}}^{in} + g\delta p_{\mathcal{M}}^{in} \end{cases}$$

Non démolition !

Mesure !

Action en retour

Caractérisation d'une mesure QND réelle



1 – Qualité de la mesure :

Corrélations $p_{\mathcal{S}}^{in} - q_{\mathcal{M}}^{out}$: $C_{\mathcal{S}-\mathcal{M}} = \left| \frac{\langle \delta p_{\mathcal{S}}^{in} \delta q_{\mathcal{M}}^{out} \rangle}{\Delta p_{\mathcal{S}}^{in} \Delta q_{\mathcal{M}}^{out}} \right|^2 = \frac{g^2}{1+g^2}$

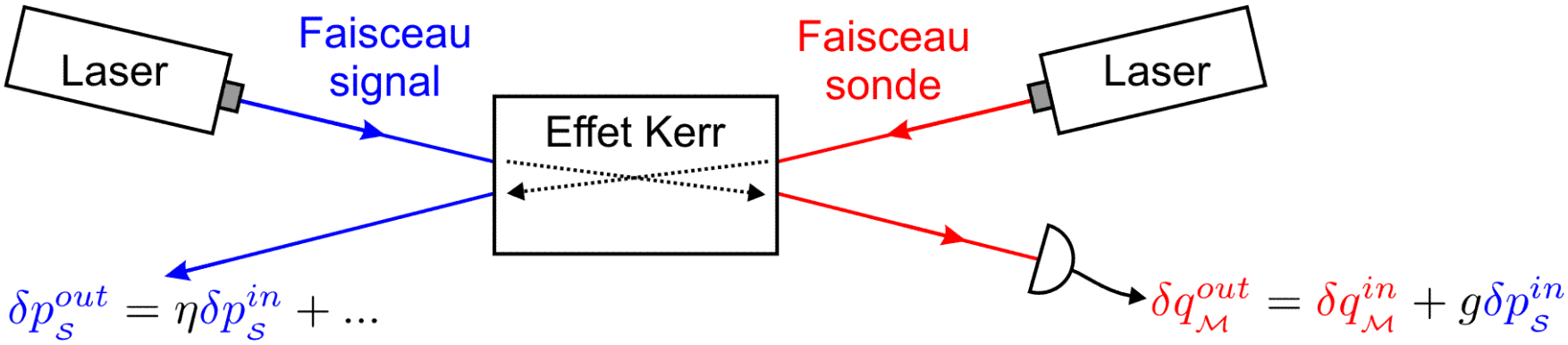
$C_{\mathcal{S}-\mathcal{M}} = 0$ si décorrélés (g nul), 1 pour corrélations parfaites (g infini)

2 – Dégradation du signal :

Corrélations $p_{\mathcal{S}}^{in} - p_{\mathcal{S}}^{out}$: $C_{In-Out} = \left| \frac{\langle \delta p_{\mathcal{S}}^{in} \delta p_{\mathcal{S}}^{out} \rangle}{\Delta p_{\mathcal{S}}^{in} \Delta p_{\mathcal{S}}^{out}} \right|^2 = \eta^2$

Ces corrélations In–Out ne sont pas accessibles expérimentalement

1er critère expérimental : préparation d'état



A partir des corrélations en sortie : $C'_{\mathcal{S}-\mathcal{M}} = \left| \frac{\left\langle \delta p_{\mathcal{S}}^{out} \delta q_{\mathcal{M}}^{out} \right\rangle}{\Delta p_{\mathcal{S}}^{out} \Delta q_{\mathcal{M}}^{out}} \right|^2 = \frac{\eta^2 g^2}{1+g^2}$

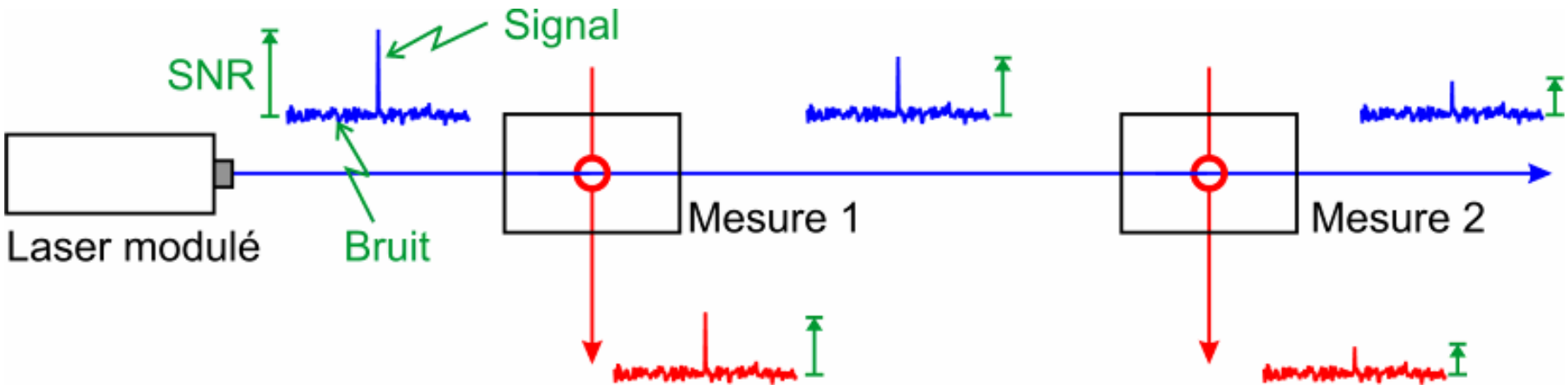
On obtient la variance conditionnelle du faisceau signal en sortie connaissant l'état de la sonde (*Quantum State Preparation*) :

$$\left(\Delta p_{\mathcal{S}|\mathcal{M}}\right)^2 = \left(\Delta p_{\mathcal{S}}^{out}\right)^2 \left(1 - C'_{\mathcal{S}-\mathcal{M}}\right)$$

$\Delta p_{\mathcal{S}|\mathcal{M}}$ est nul si les corrélations sont parfaites : on connait parfaitement le signal en sortie à partir de la mesure de la sonde

$\rightarrow$ Préparation d'un état quantique parfaitement défini du signal

2ème critère expérimental : répéteur quantique



On peut mesurer les niveaux de bruit et la réponse à une modulation, donc la façon dont les rapports signal à bruit sont préservés par la mesure

On définit les coefficients de transfert du rapport signal à bruit (SNR) :

$$T_{\mathcal{S}} = \frac{\mathrm{SNR}_{\mathcal{S}}^{out}}{\mathrm{SNR}_{\mathcal{S}}^{in}}, \quad T_{\mathcal{M}} = \frac{\mathrm{SNR}_{\mathcal{M}}^{out}}{\mathrm{SNR}_{\mathcal{M}}^{in}},$$

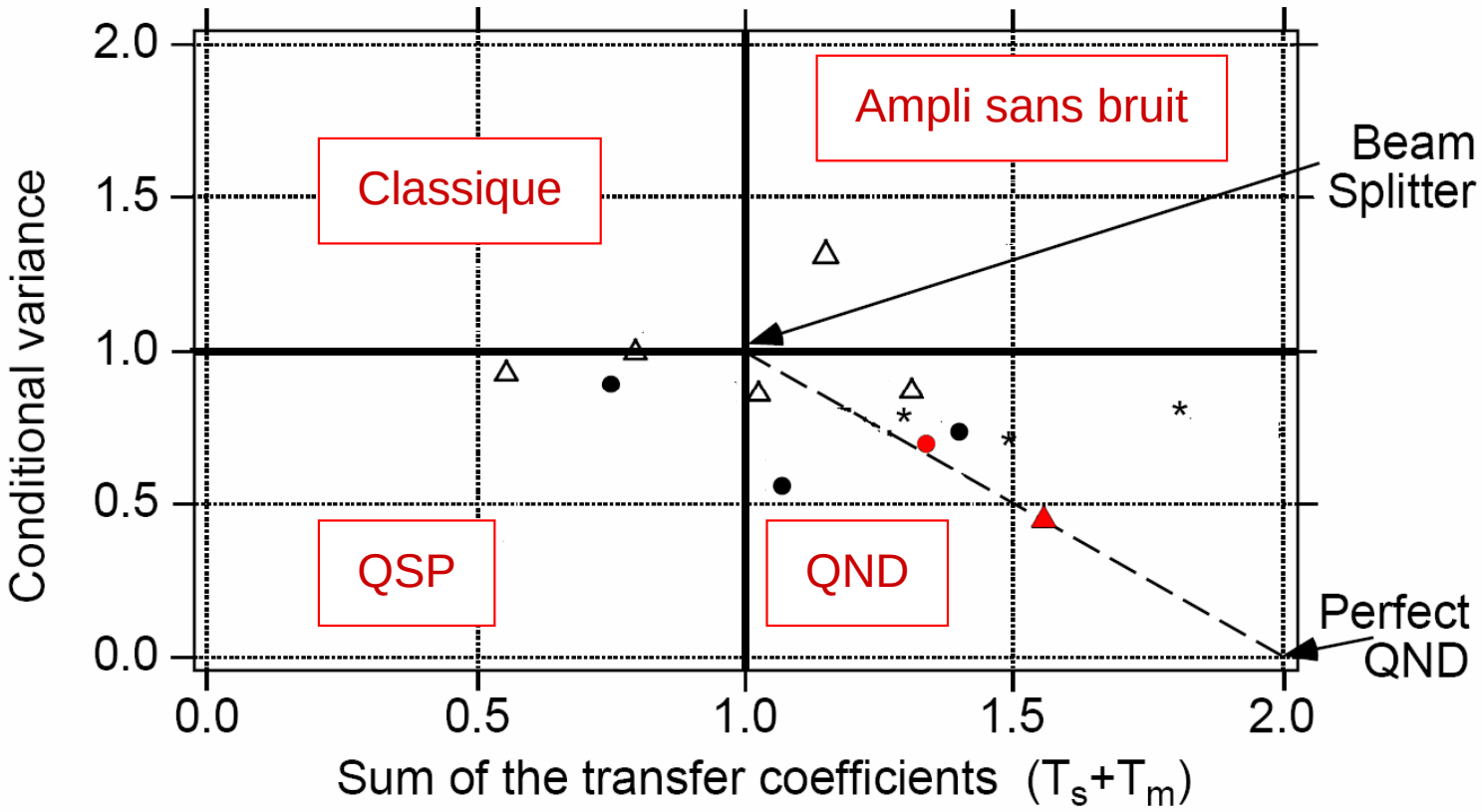
Pour une mesure classique, $T_{\mathcal{S}} + T_{\mathcal{M}} \leq 1$

Pour une mesure QND idéale, $T_{\mathcal{S}} = T_{\mathcal{M}} = 1 \rightarrow T_{\mathcal{S}} + T_{\mathcal{M}} = 2$

→ Critère utile pour les télécommunications,
mais qui reflète aussi la qualité QND de la mesure

Diagramme QND

On reporte les critères dans le plan $\left\{T_{\mathcal{S}} + T_{\mathcal{M}}, \left(\Delta p_{\mathcal{S}|\mathcal{M}}\right)^2\right\}$:



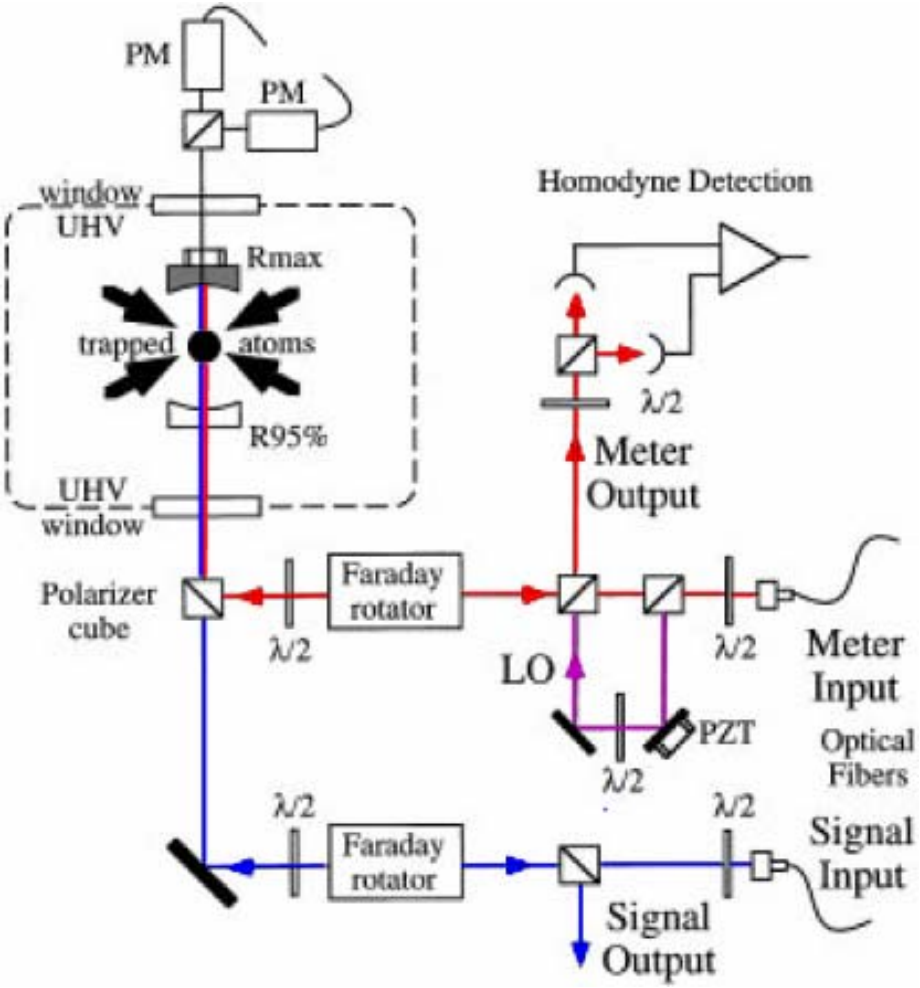
Effet Kerr idéal : $\left(\Delta p_{\mathcal{S}|\mathcal{M}}\right)^2 = \dfrac{1}{1+g^2}, \; T_{\mathcal{S}} = 1, \; T_{\mathcal{M}} = \dfrac{g^2}{1+g^2}$

$\rightarrow$ Mesure QND parfaite pour un gain g infini

Mesure QND avec des atomes froids

Réalisation d'un effet Kerr croisé avec des atomes de Rubidium refroidis

- Forte non linéarités
- Suppression de l'effet Doppler
  Fonctionnement en continu d'un piège MOT
- Séparation des faisceaux par éléments polarisants
- Mesure hétérodyne de la phase du faisceau sonde



→ Résultats :

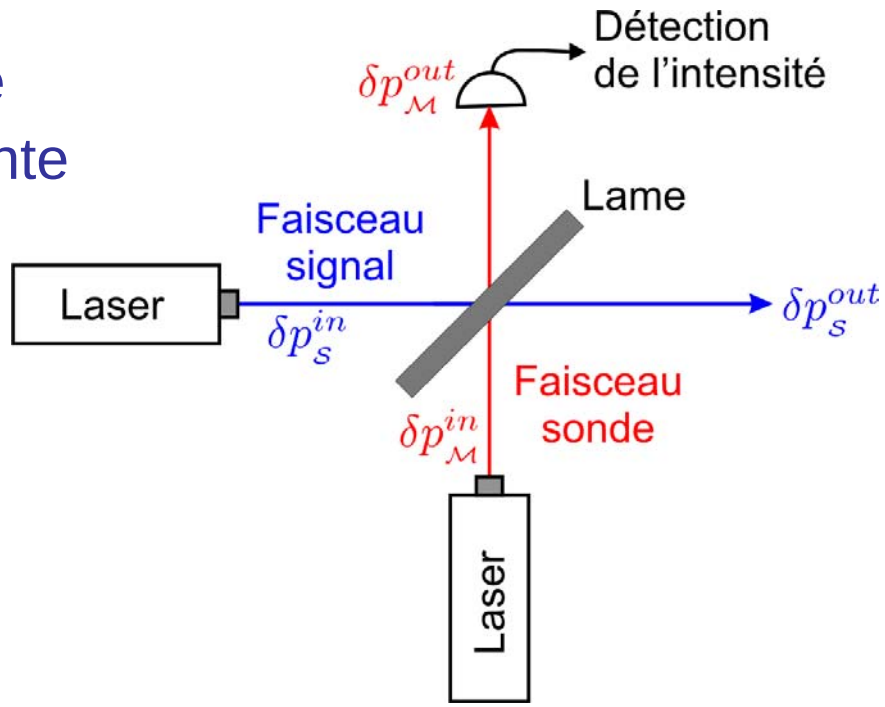
$$\left(\Delta p_{\mathcal{S}|\mathcal{M}}\right)^2 = 0.45\,,\ T_{\mathcal{S}} = 0.9\,,\ T_{\mathcal{M}} = 0.65$$

J.-F. Roch, … , Ph. Grangier, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 634 (1997)

Mesure QND avec une lame séparatrice ?

On détecte l'intensité du faisceau sonde transmis par une lame semi-réfléchissante

On suppose le signal dans un état cohérent ($\Delta p_{\mathcal{S}}^{in} = 1$), par contre on ne suppose rien sur la sonde



1 – Qualité de la mesure :

$$\delta p_{\mathcal{M}}^{out} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\delta p_{\mathcal{S}}^{in}}_{\text{Mesure !}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\delta p_{\mathcal{M}}^{in}}_{\text{Bruit de la mesure}}$$

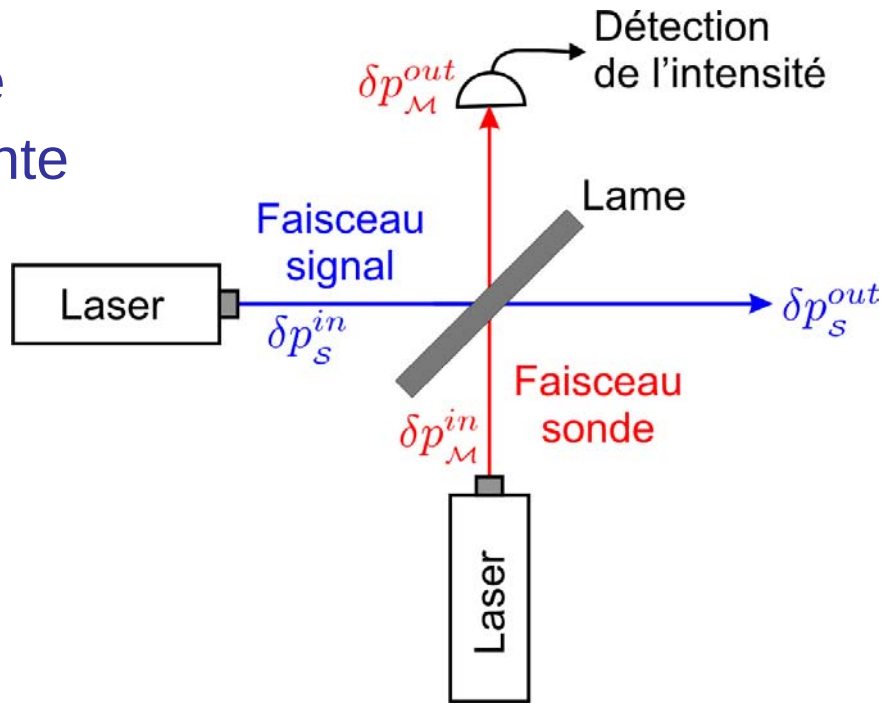
Corrélations : $C_{\mathcal{S}-\mathcal{M}} = \left|\frac{\langle \delta p_{\mathcal{S}}^{in} \delta p_{\mathcal{M}}^{out} \rangle}{\Delta p_{\mathcal{S}}^{in} \Delta p_{\mathcal{M}}^{out}}\right|^2 = \frac{1}{1+\xi^2}$ avec $\xi = \Delta p_{\mathcal{M}}^{in}$

$\rightarrow$ Si la sonde est dans un état comprimé ($\xi < 1$), on a des corrélations importantes ($C_{\mathcal{S}-\mathcal{M}} \approx 1$)

Mesure QND avec une lame séparatrice ?

On détecte l'intensité du faisceau sonde transmis par une lame semi-réfléchissante

On suppose le signal dans un état cohérent ($\Delta p_{\mathcal{S}}^{in} = 1$), par contre on ne suppose rien sur la sonde



2 – Dégradation du signal :

$$\delta p_{\mathcal{S}}^{out} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\delta p_{\mathcal{S}}^{in}}_{\text{Réduction de l'amplitude}} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\delta p_{\mathcal{M}}^{in}}_{\text{Bruit supplémentaire}}$$

L'intensité moyenne est réduite d'un facteur 2, mais les corrélations $In–Out$ peuvent être importantes avec une sonde comprimée ($\xi \ll 1$) :

$$C_{In-Out} = \left| \frac{\langle \delta p_s^{in} \delta p_s^{out} \rangle}{\Delta p_s^{in} \Delta p_s^{out}} \right|^2 = \frac{1}{1+\xi^2}$$

$\rightarrow$ On réalise une mesure QND !

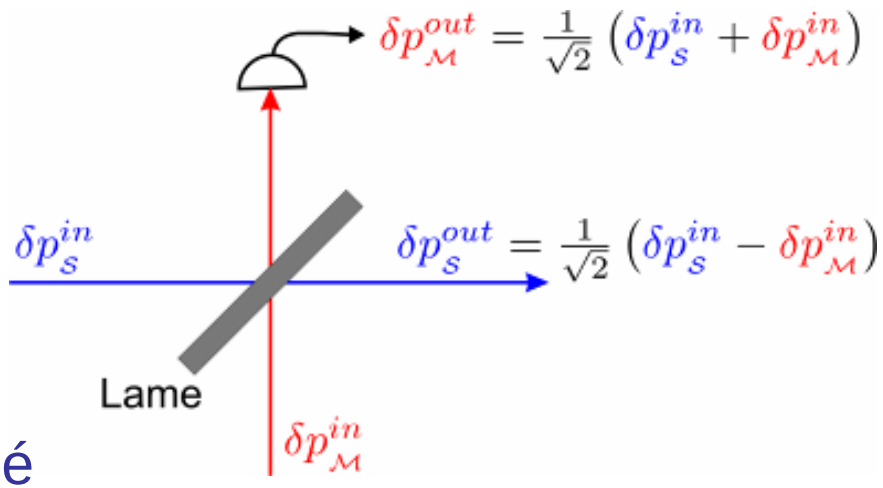
Critères QND pour une lame séparatrice

1 – Préparation d'état :

Corrélations signal – sonde en sortie :

$$C'_{\mathcal{S}-\mathcal{M}} = \left|\frac{\langle \delta p_{\mathcal{S}}^{out} \delta p_{\mathcal{M}}^{out} \rangle}{\Delta p_{\mathcal{S}}^{out} \Delta p_{\mathcal{M}}^{out}}\right|^2 = \left(\frac{1-\xi^2}{1+\xi^2}\right)^2$$

$\Delta p_{\mathcal{S}|\mathcal{M}} \to 0$ pour un état sonde comprimé



$\to$ Relation entre compression et mesure QND : la compression de la sonde permet de produire des faisceaux jumeaux

2 – Répéteur quantique :

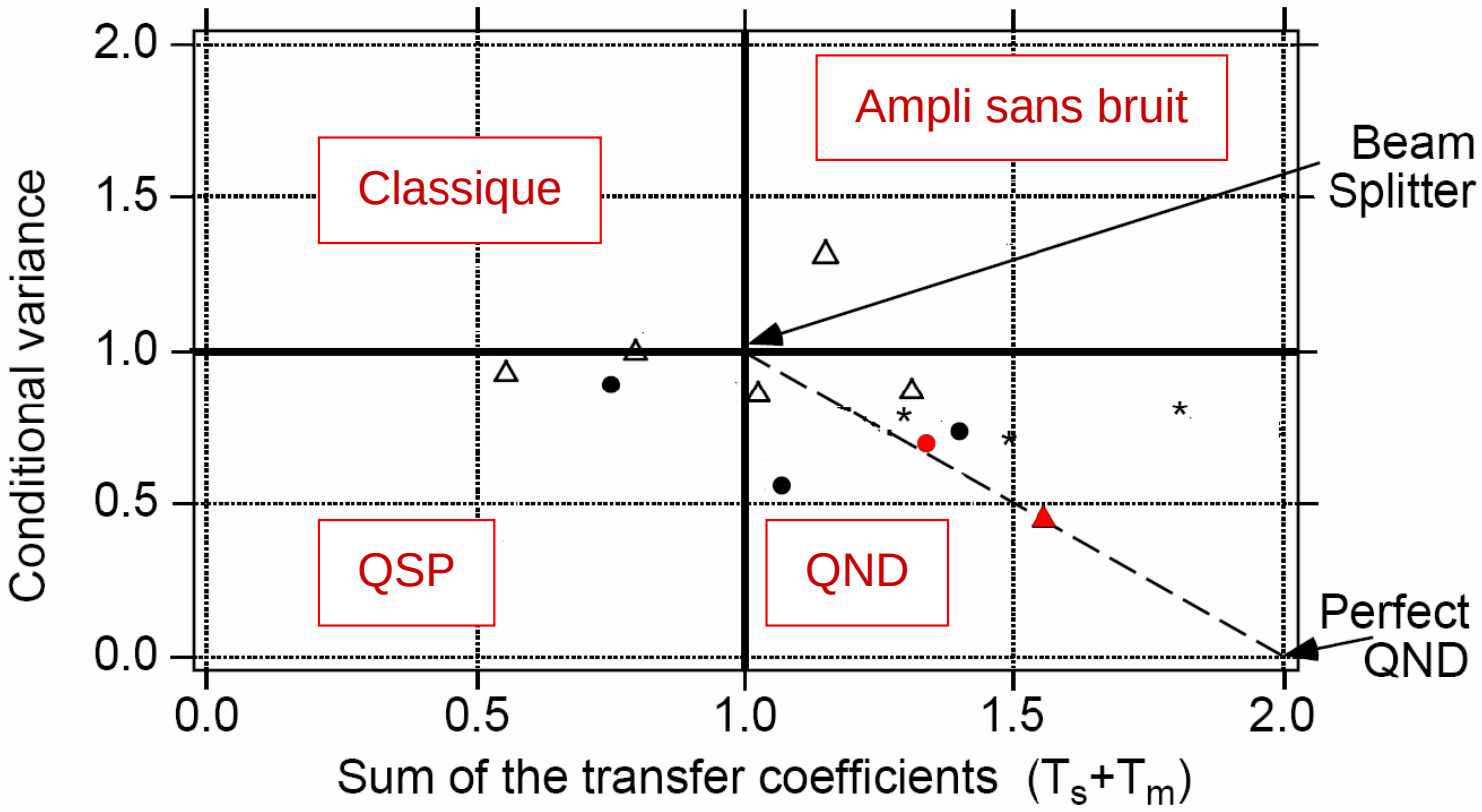
Transfert du SNR : $T_{\mathcal{S}} = T_{\mathcal{M}} = \dfrac{1}{1+\xi^2}$ $\to$ transfert idéal pour $\xi \ll 1$

Remarque : pour une sonde dans un état cohérent ($\xi = 1$), on a :

$$C'_{\mathcal{S}-\mathcal{M}} = 0\,,\ T_{\mathcal{S}} + T_{\mathcal{M}} = 1$$

$\to$ au centre du diagramme QND (limite classique / QND)

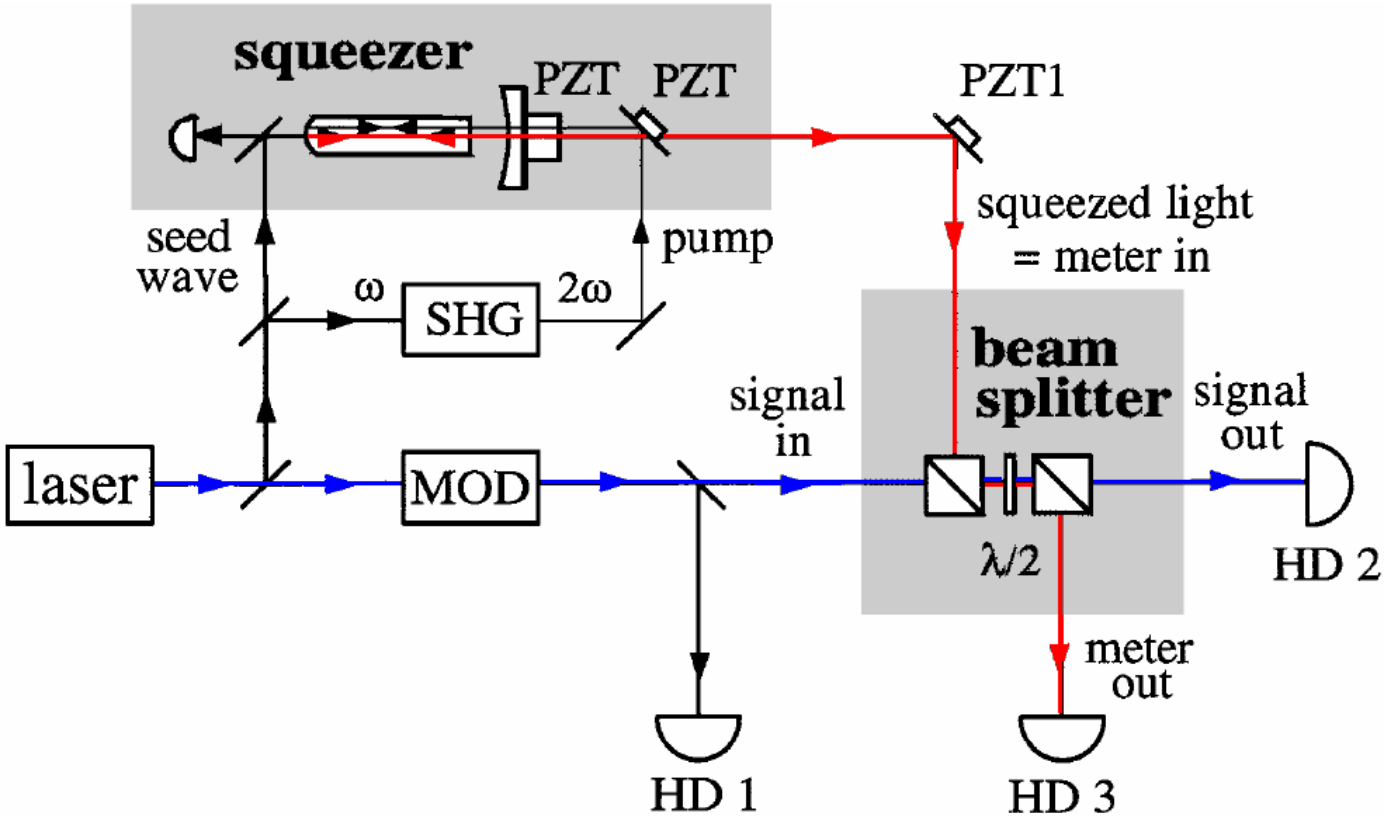
Diagramme QND



Lame séparatrice : $\left(\Delta p_{S|\mathcal{M}}\right)^2 = \frac{2\xi^2}{1+\xi^2}, \; T_S + T_{\mathcal{M}} = \frac{2}{1+\xi^2}$

$\rightarrow$ Mesure QND parfaite pour une sonde complètement comprimée ($\xi \simeq 0$)

Réalisation expérimentale



- Réalisation d'une lame à coefficients variables avec des éléments sélectifs en polarisation

- Etat comprimé produit par un amplificateur paramétrique optique (OPA) : $\xi^2 = 0.4$

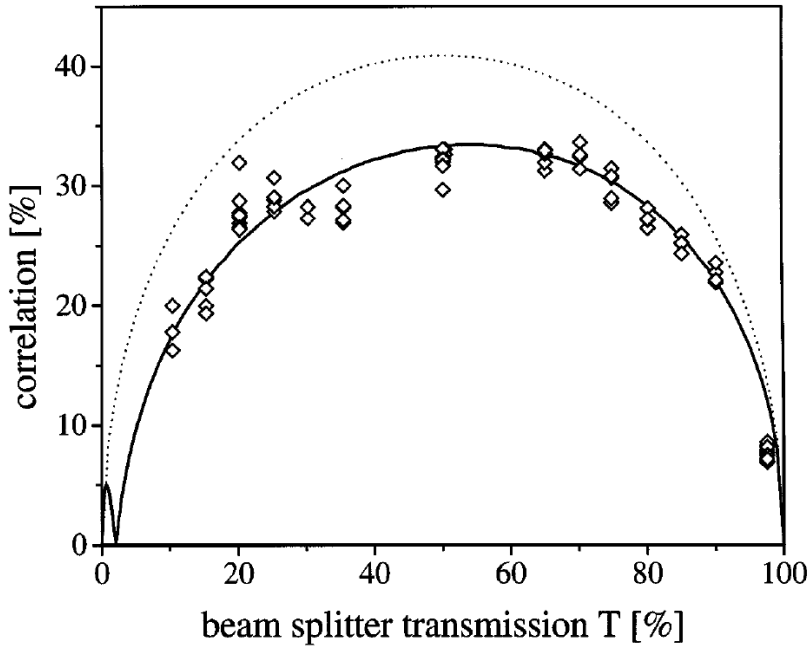
R. Bruckmeier, … , J. Mlynek, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 43 (1997)

Résultats expérimentaux

- Corrélations signal – sonde en sortie

$$C'_{\mathcal{S}-\mathcal{M}} \simeq 0.3$$

obtenu pour une lame 50%



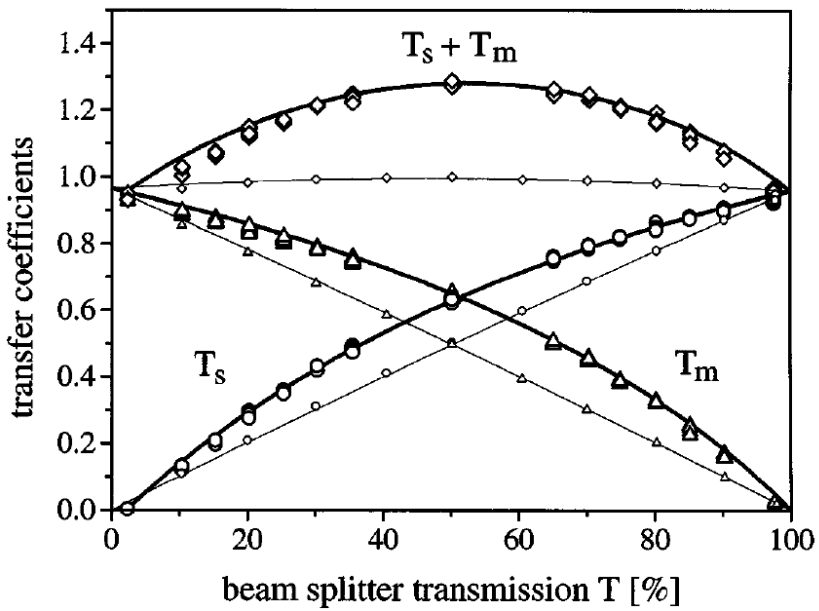
- Coefficients de transfert

$$T_{\mathcal{S}} + T_{\mathcal{M}} \simeq 1$$

pour une sonde dans l'état vide

$$T_{\mathcal{S}} + T_{\mathcal{M}} \simeq 1.3$$

pour une sonde comprimée



Plan

Exemples de mesure à la limite quantique

- Mesures quantiques non destructives
  - Critères de non démolition : variance conditionnelle et transfert
  - Réalisations expérimentales en optique
- **Mesures spectroscopiques**
  - ➪ Séminaire de Sébastien Bize :
    Horloges atomiques et applications
  - Mesures d'absorption d'un milieu
- Images Quantiques
  - ➪ Cours de Claude Fabre, séminaire de Mikhail Kolobov :
    Limites quantiques de la super-résolution
- Mesures de position
  - ➪ Séminaire de François Bondu :
    L'interférométrie à ondes gravitationnelles
  - Mesures avec des cavités optiques de grande finesse

Spectroscopie à la limite quantique

- Spectroscopie de haute résolution

  Objectif : déterminer précisément une fréquence de transition
  $\rightarrow$ asservissement des lasers
  $\rightarrow$ horloges

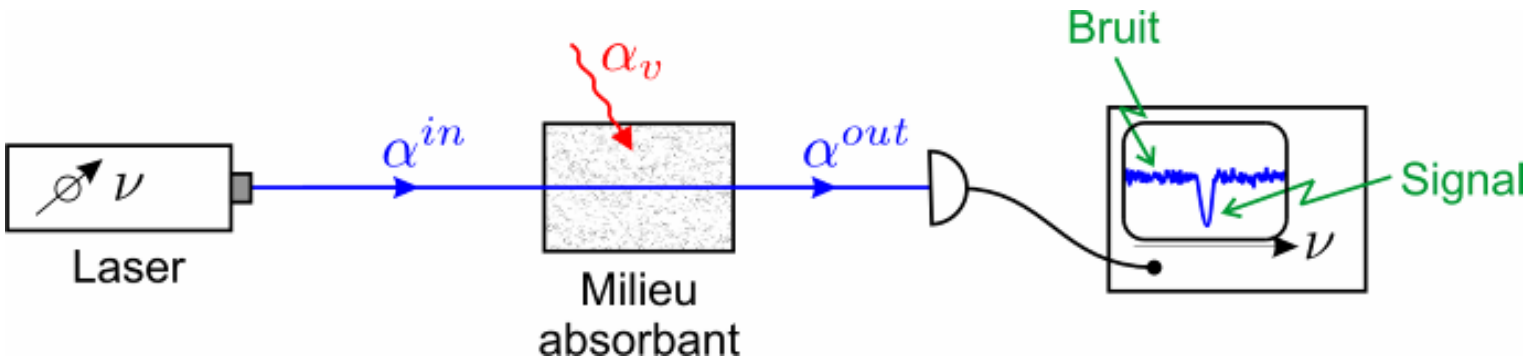
  Limitations fondamentales liées au bruit quantique des atomes (bruit de projection)

- Spectroscopie de haute sensibilité

  Objectif : observer des raies peu intenses
  $\rightarrow$ raies multiphotoniques (transitions interdites,…)
  $\rightarrow$ détection de substances à l'état de trace (biologie, pollution)

  Limité par le bruit de photon de la lumière

Détection de faible absorption



On détecte l'intensité de la lumière transmise par le milieu absorbant, lorsque la fréquence ν du laser est balayée

$$\alpha^{out} = (1 - \kappa/2)\,\alpha^{in} + \sqrt{\kappa}\,\alpha_v$$

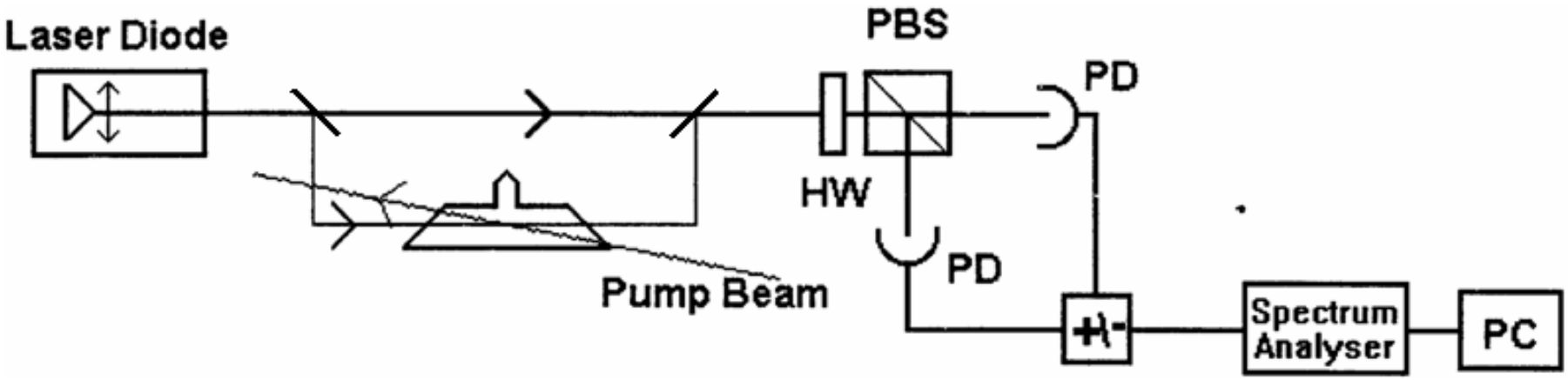
où $\kappa \ll 1$ représente l'absorption du milieu,
α_v représente les fluctuations du vide couplées au faisceau par le milieu (unitarité des relations d'entrée-sortie)

Signal : $\overline{I}^{out} = (1 - \kappa)\,\overline{I}^{in}$, bruit : $\Delta I^{out} \simeq \Delta I^{in}$

→ La sensibilité est limitée par le bruit d'intensité du faisceau incident

Spectroscopie avec un faisceau sub-Poissonien

On peut améliorer la sensibilité de la détection en utilisant un faisceau incident dont le bruit d'intensité est comprimé



- Statistique de photon sub-Poissonienne produite par une diode laser à grand taux de conversion et piloté par un courant faible bruit
- 3% (1 mW) du faisceau incident est envoyé dans une cellule de Césium. Configuration d'absorption saturée pour éliminer l'effet Doppler
- Détection équilibrée pour mesurer le signal d'absorption et la limite quantique liée au bruit de photon standard:

F. Marin, … , A. Bramati, E. Giacobino, *Optics. Commun.* **140**, 146 (1997)

Résultats expérimentaux

- Détection équilibrée :

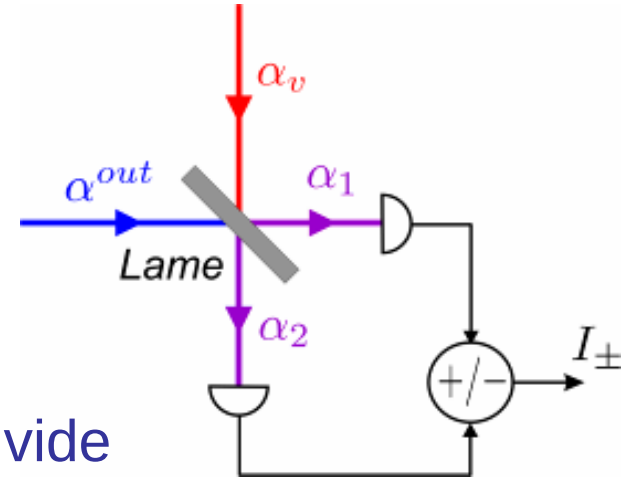
  Somme des intensités : $I_+ = I_1 + I_2 = I^{out}$

  → Mesure du bruit d'intensité $\Delta I_+ = \Delta I^{out}$

  Différence des intensités : mesure hétérodyne du vide

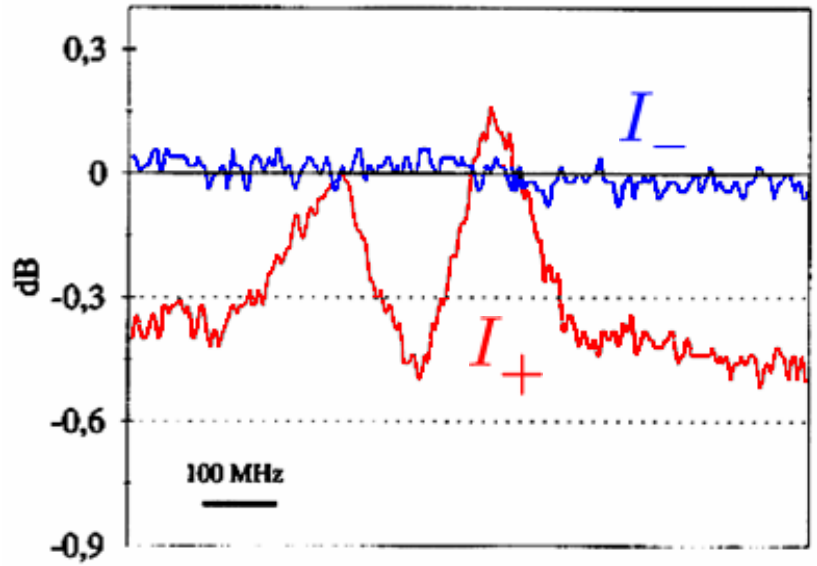
  $$I_- = I_1 - I_2 = 2\,\mathrm{Re}\left(\alpha^{out}\alpha_v^*\right) \rightarrow \delta I_- = \overline{\alpha}^{out}\delta p_v$$

  → Mesure du bruit de photon standard $\Delta I_- = \overline{I}^{out}$



- Sans milieu absorbant : mesure de la compression du faisceau incident → 0.6 dB

- Avec le milieu absorbant : détection des lignes d'absorption du Césium avec une résolution meilleure que le bruit de photon standard



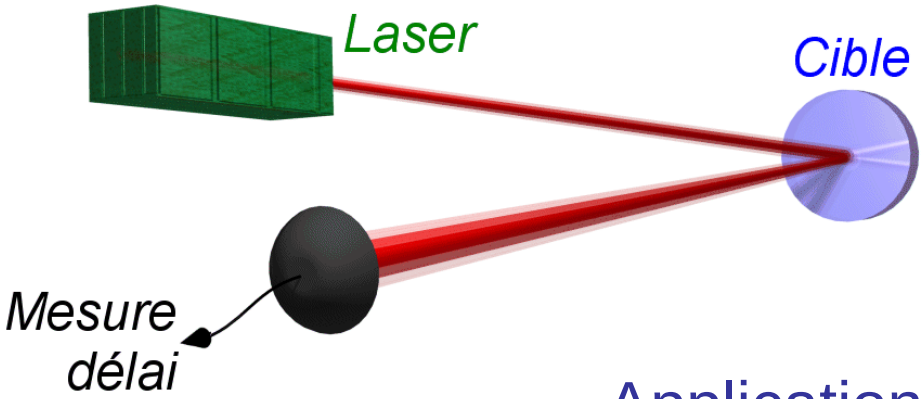
Plan

Exemples de mesure à la limite quantique

- Mesures quantiques non destructives
  - Critères de non démolition : variance conditionnelle et transfert
  - Réalisations expérimentales en optique
- Mesures spectroscopiques
  - ➪ Séminaire de Sébastien Bize :
    Horloges atomiques et applications
  - Mesures d'absorption d'un milieu
- Images Quantiques
  - ➪ Cours de Claude Fabre, séminaire de Mikhail Kolobov :
    Limites quantiques de la super-résolution
- **Mesures de position**
  - ➪ Séminaire de François Bondu :
    L'interférométrie à ondes gravitationnelles
  - Mesures avec des cavités optiques de grande finesse

Mesure optique de distance

Télémétrie laser : mesure du temps de propagation sur une cible

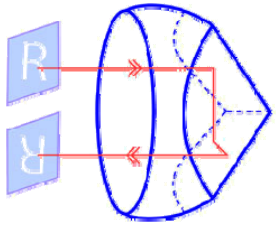


Applications :

- Détection d'obstacles (robots, automobile)
- Mesures dans le bâtiment
- Radars, …

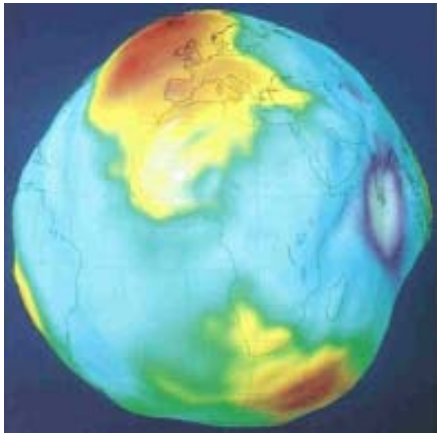
→ Précision de l'ordre du millimètre

Exemple : laser terre – lune (CERGA)



Réflexion sur des satellites artificiels ou sur des coins de cube déposés par les missions Apollo

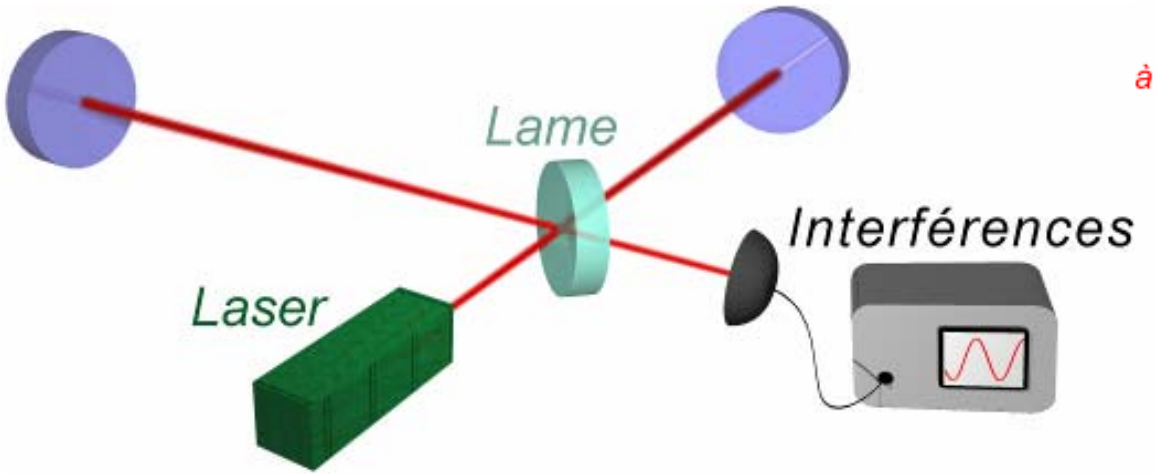
- Etude du système dynamique terre – lune
- Définition d'un référentiel terrestre absolu
- Géodésie terrestre (champ de gravité,…)

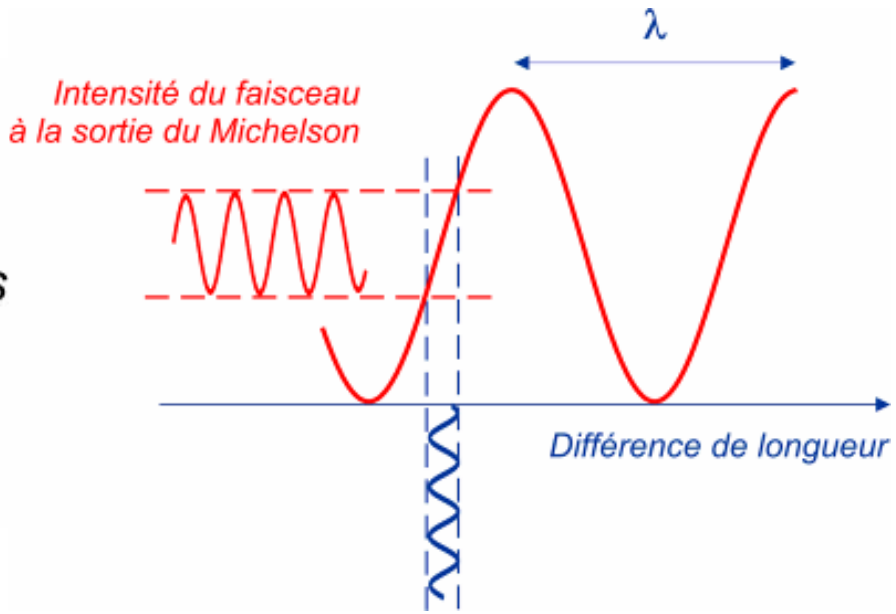


Précision de l'ordre du millimètre (limitée par l'atmosphère)

Mesure interférométrique

Mesure interférométrique des déplacements d'un miroir



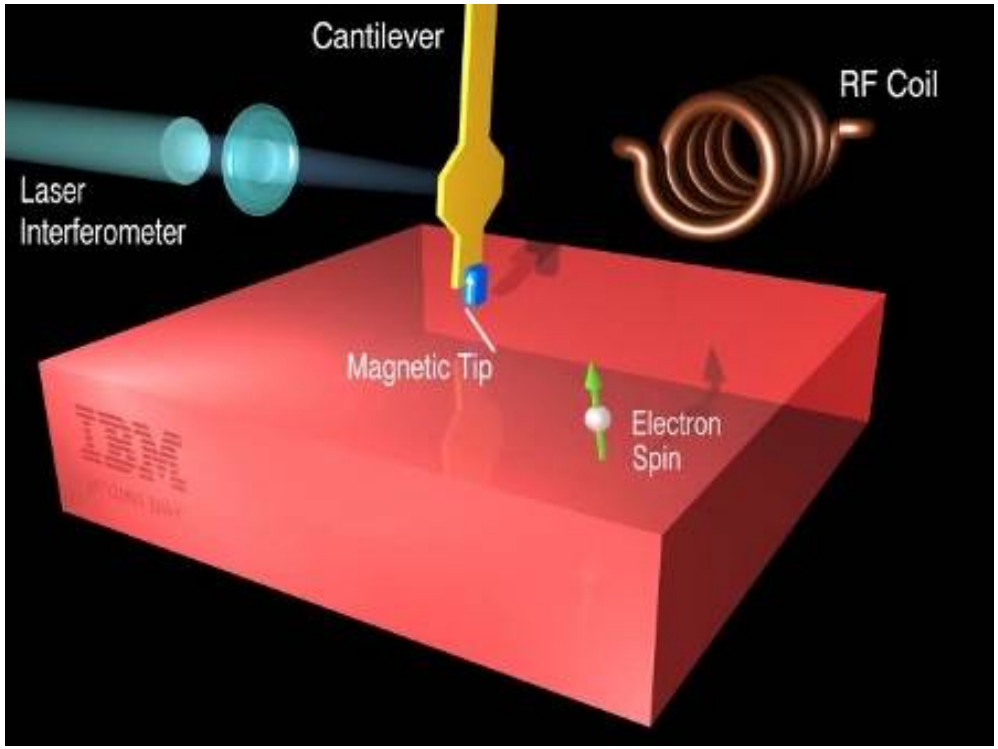


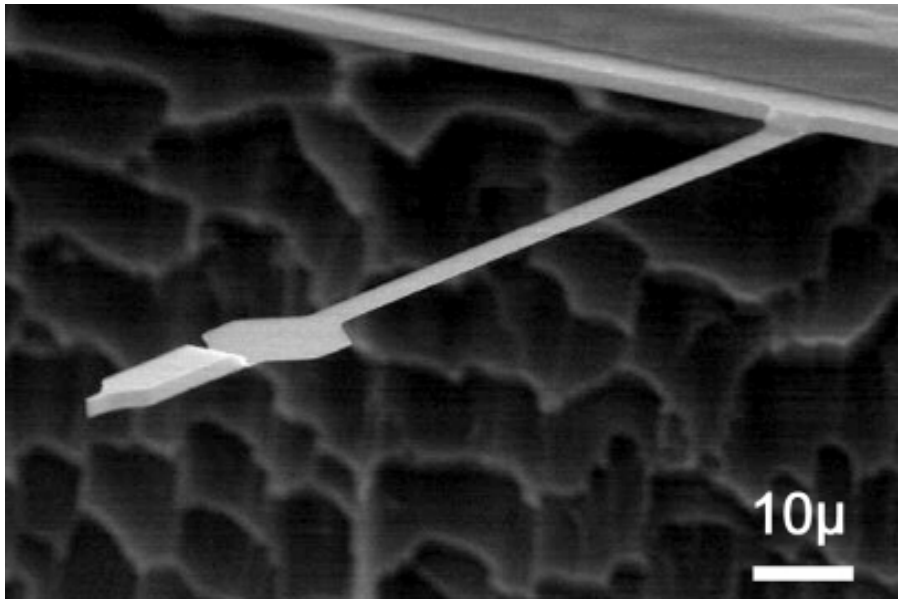
Variation d'intensité : $\delta I \propto \frac{\delta x}{\lambda}$

Sensibilité meilleure que l'Angstrom sur le déplacement

Exemple : mesure du spin d'un seul électron

Interaction entre un micro-aimant et le spin d'un électron unique





Mesure interférométrique des vibrations du micro-levier

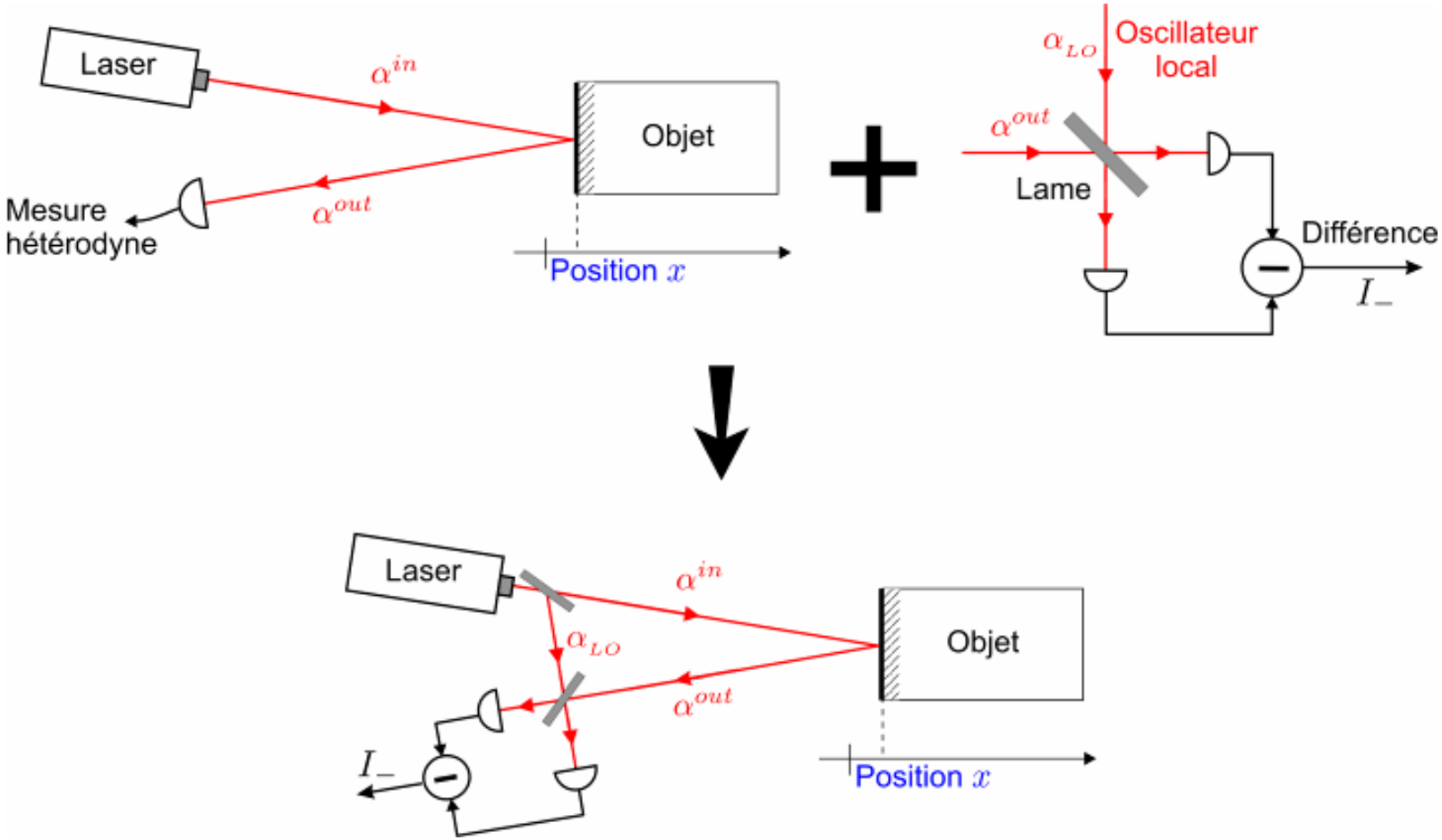
Sensibilité meilleure que l'atto-newton sur la force détectée

$(1\,aN = 10^{-18}N)$

D. Rugar (IBM San Jose), *Nature* **430**, 329 (2004)

Exemple : réflexion sur un miroir mobile

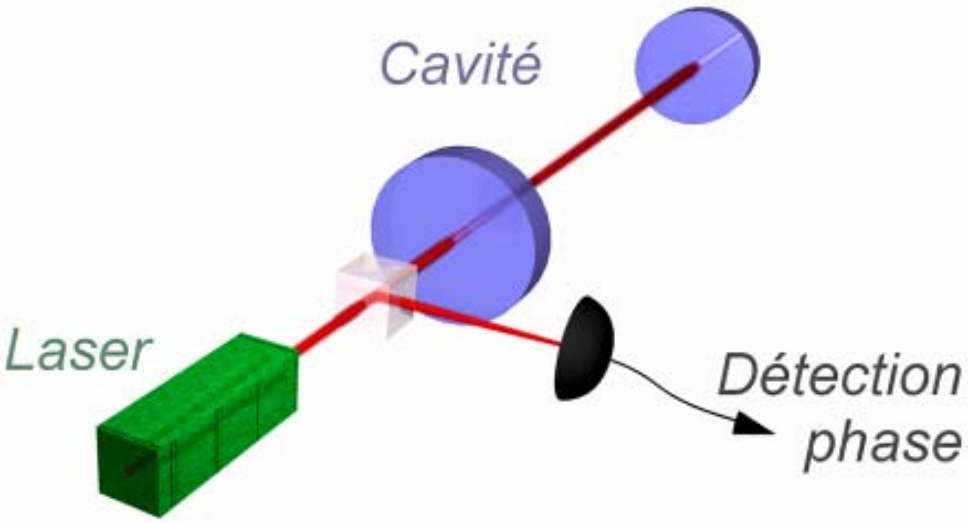
La mesure hétérodyne du champ réfléchi par un miroir mobile (cours 3) est une mesure interférométrique

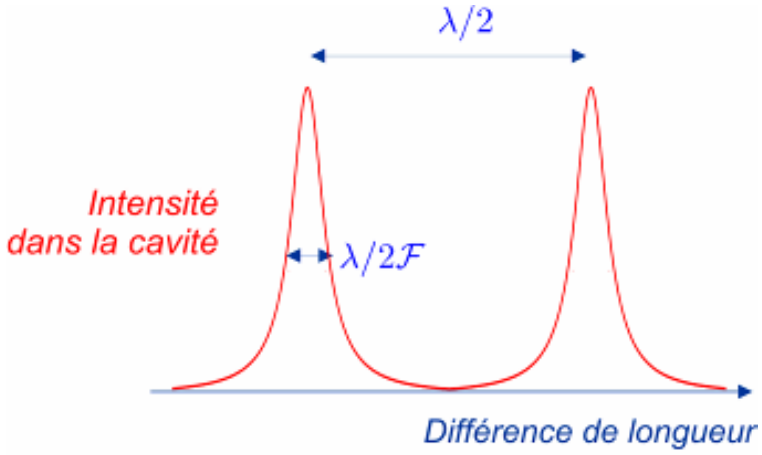


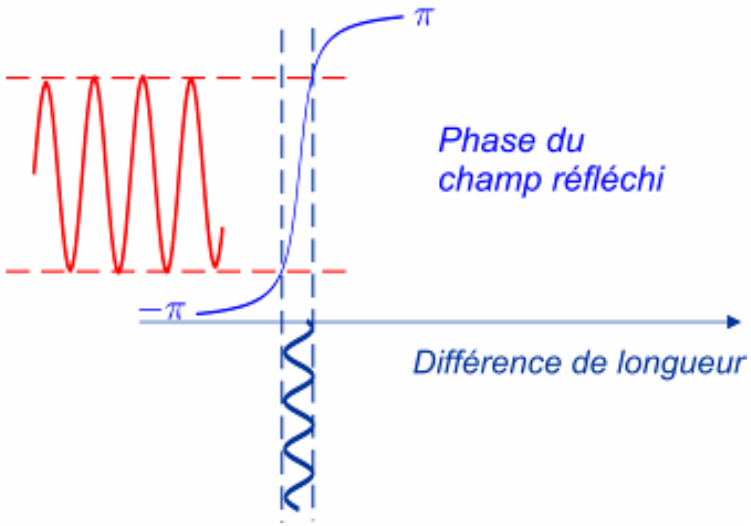
Les 2 bras correspondent au faisceau réfléchi sur le miroir et à l'oscillateur local (interféromètre dissymétrique)

Mesure à l'échelle de l'attomètre…

Il faut utiliser une cavité optique pour profiter des résonances





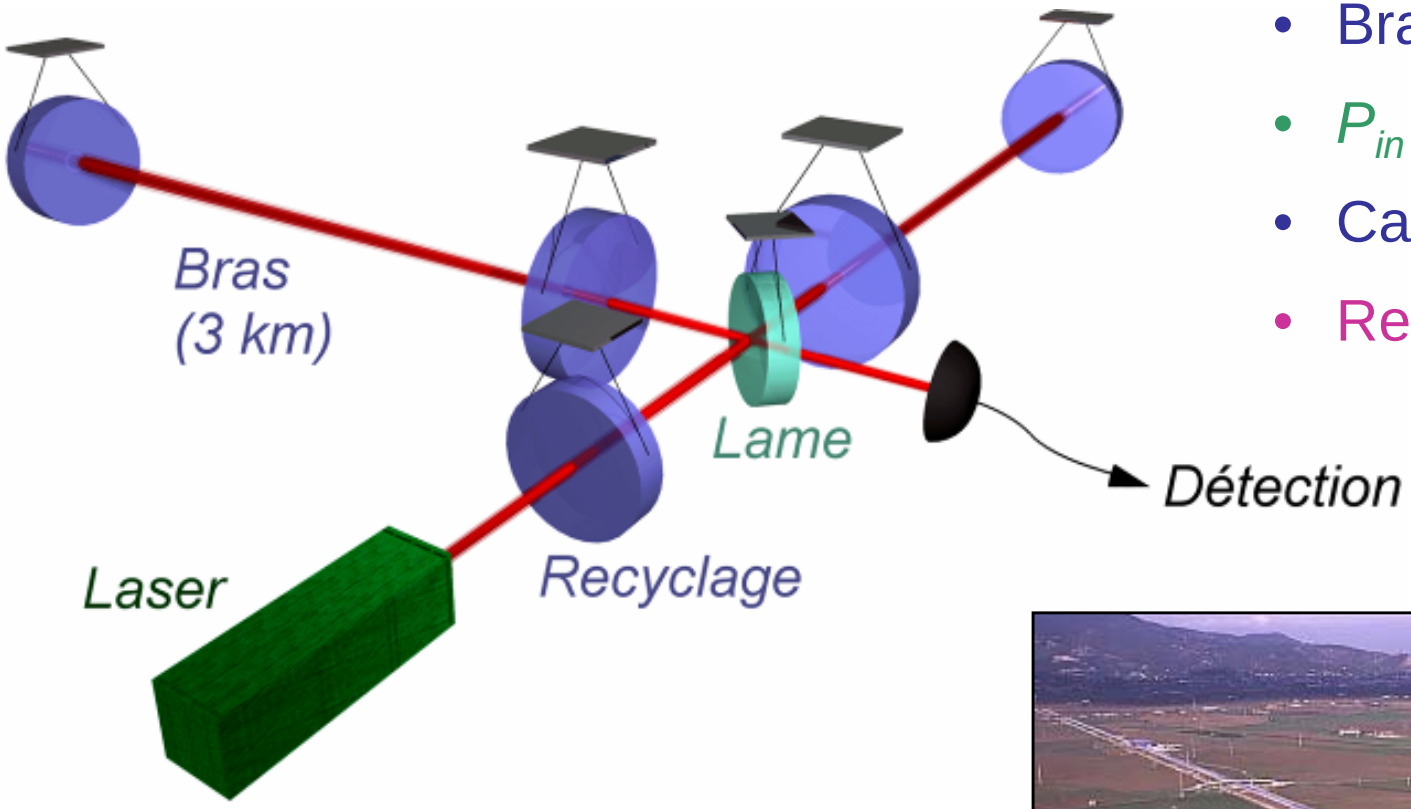


Les déplacements changent
le désaccord de la cavité

Largeur de la résonance : $\delta x = \lambda/2\mathcal{F}$
où $\mathcal{F}$ est la finesse de la cavité

L'effet est amplifié
par la finesse de la cavité : $\delta\varphi_{\text{out}} \simeq \mathcal{F}\dfrac{\delta x}{\lambda}$

Exemple : détection des ondes gravitationnelles



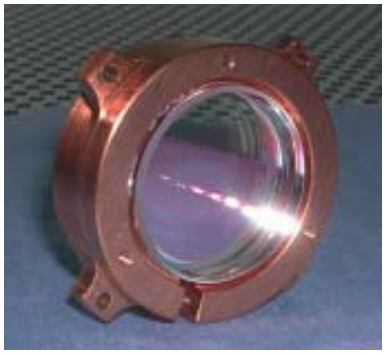
- Bras 3 km
- P_{in} = 10 W
- Cavités Fabry-Perot
- Recyclage (P = 15 kW)

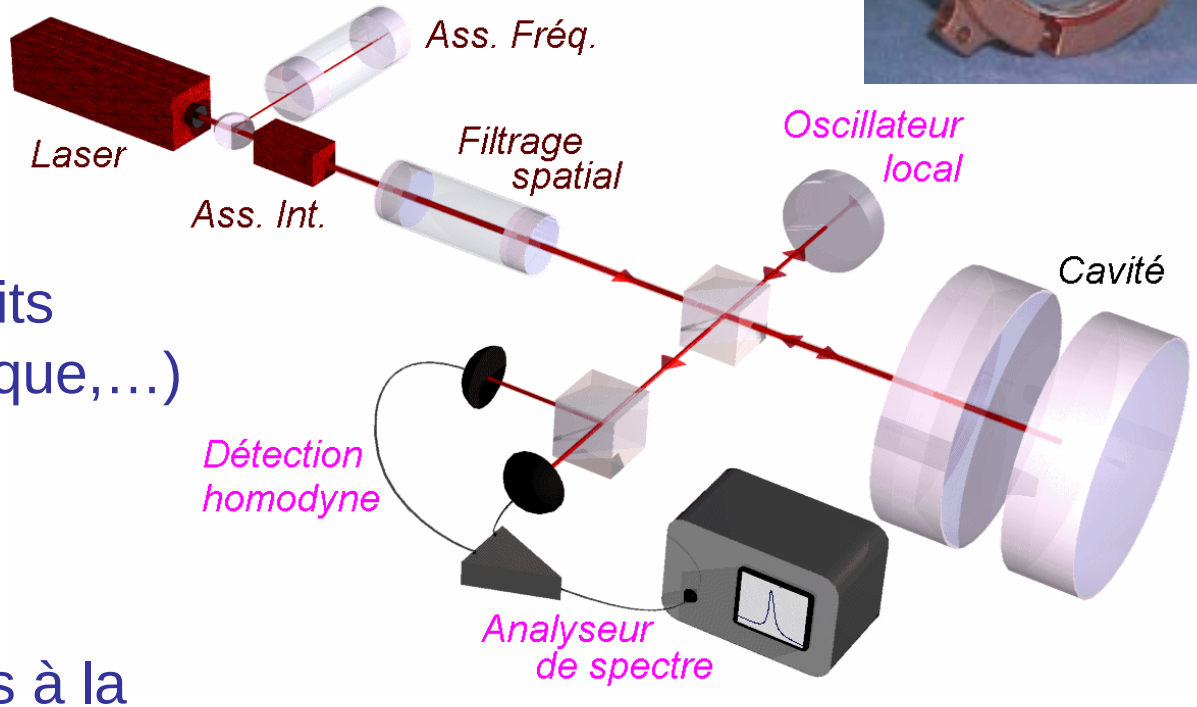
Virgo, Ligo, Geo600, TAMA, …

Sensibilité meilleure que 10^{-19} m

Mesure de très petits déplacements de miroirs

Mesure des déplacements d'un miroir avec une cavité de grande finesse (> 100 000)





- Caractérisation des bruits d'un miroir (bruit thermique,…)
- Conséquences dans les mesures
- Limites quantiques liées à la pression de radiation

Sensibilité : $\delta x_{\min} = 10^{-20}\, m/\sqrt{Hz}$

P.-F. Cohadon *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3174 (1999), T. Caniard *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* (2007)