ÉCOLE DE PHYSIQUE
LES HOUCHES
Session XXIV

École Prédoctorale

Optique Quantique

*10-21 septembre 2007*

# Mesures à la limite quantique

~ 5ème cours ~

A. Heidmann

Laboratoire Kastler Brossel

Mesure et Bruits Fondamentaux

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE PIERRE & MARIE CURIE
LA SCIENCE A PARIS

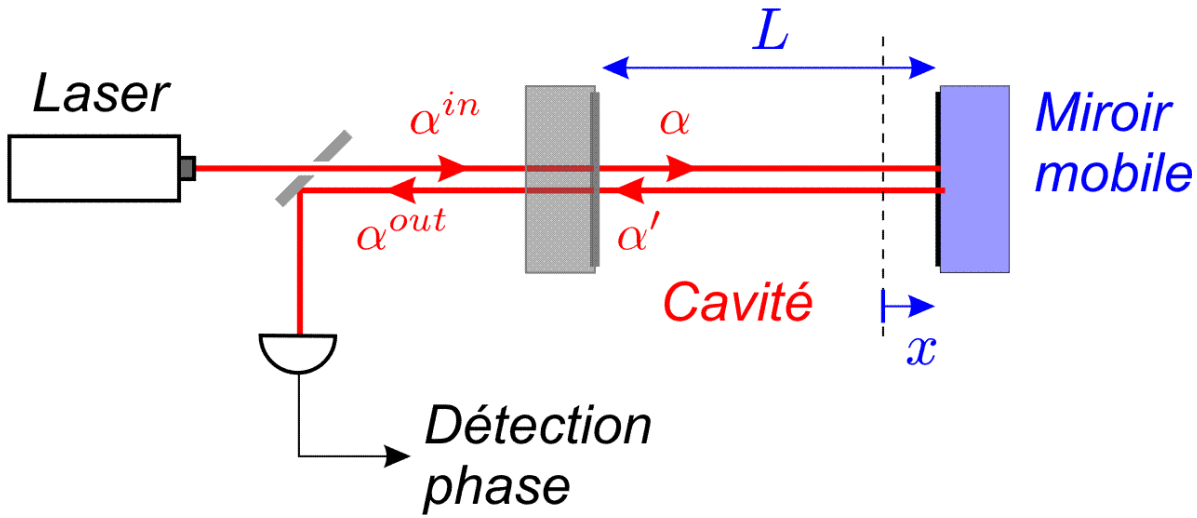
# Plan du cinquième cours

## Mesures de position : dépasser les limites quantiques

- Limites quantiques dans les cavités optiques
  Effets de la pression de radiation
- Dépasser la limite quantique
  – Enjeux – ondes gravitationnelles
  – Injection d'états comprimés
  – Mesure de type QND
  – Verrouillage quantique des miroirs
- Optique quantique avec des miroirs qui bougent
  – Génération d'état comprimé, mesure QND…
  – Contrôle du bruit d'un miroir au niveau quantique

# Cavité avec un miroir mobile

Cavité sans perte
(miroirs parfaits)
avec un miroir mobile
totalement réfléchissant




Equations d'entrée – sortie :

$$\alpha(t) = t\,\alpha^{in}(t) + r\,\alpha'(t)$$

$$\alpha^{out}(t) = -r\,\alpha^{in}(t) + t\,\alpha'(t)$$

Miroir d'entrée

$$\alpha'(t) = \alpha(t-\tau)\,e^{i\psi(t)}$$

$$\psi(t) \equiv 2k\,L(t)\,[2\pi]\,,\quad \tau = 2L(t)/c$$

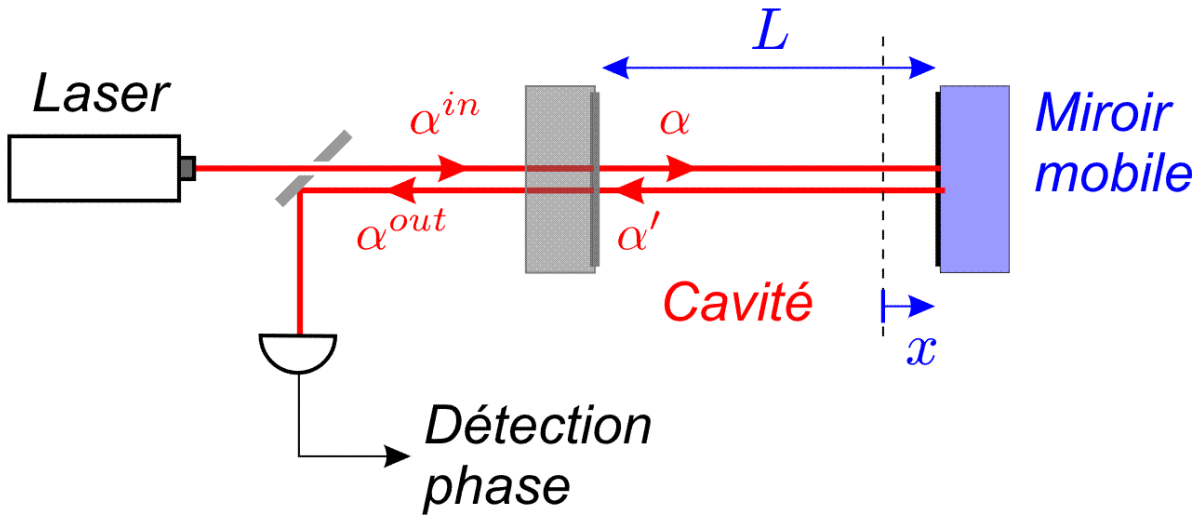
Propagation

Quelques hypothèses simplificatrices !

- cavité de grande finesse : $r = 1-\gamma\,,\ t = \sqrt{1-r^2} = \sqrt{2\gamma}$ avec $\gamma \ll 1$
- cavité proche de résonance : $\psi(t) \ll 1 \rightarrow e^{i\psi(t)} \simeq 1 + i\psi(t)$
- effets de retard négligés

# Cavité avec un miroir mobile

Cavité sans perte
(miroirs parfaits)
avec un miroir mobile
totalement réfléchissant




Equation dynamique
du champ intracavité :

$$\underbrace{\tau\frac{d\alpha}{dt}(t)}_{\text{Evolution sur 1 tour}} = [\underbrace{-\gamma}_{\text{Amortissement}} + \underbrace{i\psi(t)}_{\text{Déphasage}}]\,\alpha(t) + \underbrace{\sqrt{2\gamma}\alpha^{in}(t)}_{\text{Terme source}}$$

Equation dynamique usuelle d'une cavité Fabry-Perot,
avec $\psi(t) = \psi_0 + 2k\,x(t)$ : dépend de la position du miroir !

Relation d'entrée - sortie : $\alpha^{out}(t) = \sqrt{2\gamma}\,\alpha(t) - \alpha^{in}(t)$

Interférence entre les champs incident et intracavité

# Champs moyens et finesse de la cavité

## Champ moyen intracavité :

$$\tau \frac{d\alpha}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \overline{\alpha} = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\gamma - i\overline{\psi}} \overline{\alpha}^{in}$$

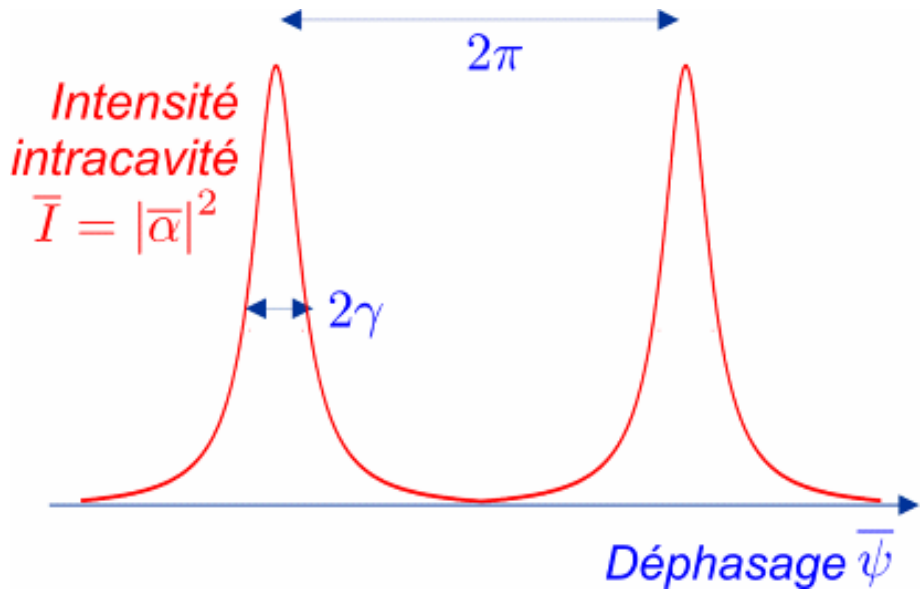
avec $\overline{\psi} = \psi_0 + 2k\,\overline{x}$

- Pic d'Airy en fonction du déphasage $\overline{\psi}$, de largeur $2\gamma$

  Finesse : $\mathcal{F} = \frac{\psi_{ISL}}{2\gamma} = \frac{2\pi}{2\gamma}$

- Amplification à résonance :

$$\overline{I} = \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \overline{I}^{in}$$




## Champ moyen réfléchi : $\overline{\alpha}^{out} = \frac{\gamma + i\overline{\psi}}{\gamma - i\overline{\psi}} \overline{\alpha}^{in}$

- Conservation du nombre de photons : $\overline{I}^{out} = \overline{I}^{in}$
- La phase du champ réfléchi dépend de la position $\overline{x}$ du miroir

# Relations d'entrée - sortie des fluctuations

On considère une cavité à résonance ($\overline{\psi} = 0$)

$$\overline{\alpha} = \sqrt{\frac{2\mathcal{F}}{\pi}}\,\overline{\alpha}^{in}\,,\quad \overline{\alpha}^{out} = \overline{\alpha}^{in} \qquad \rightarrow \quad \text{Champs moyens réels}$$

La linéarisation des équations d'évolution donne les relations d'entrée – sortie pour les fluctuations semi-classiques

- Equation dynamique des quadratures intracavité :

$$\begin{cases} (\gamma - i\Omega\tau)\,\delta p[\Omega] = \sqrt{2\gamma}\,\delta p^{in}[\Omega] \\ (\gamma - i\Omega\tau)\,\delta q[\Omega] = \sqrt{2\gamma}\,\delta q^{in}[\Omega] + 4k\overline{\alpha}\,\delta x[\Omega] \end{cases}$$

Ce n'est pas un état cohérent $\delta p \sim \sqrt{\mathcal{F}}\,\delta p^{in}$

- Relation d'entrée - sortie :

$$\begin{cases} (\gamma - i\Omega\tau)\,\delta p^{out}[\Omega] = (\gamma + i\Omega\tau)\,\delta p^{in}[\Omega] \\ (\gamma - i\Omega\tau)\,\delta q^{out}[\Omega] = (\gamma + i\Omega\tau)\,\delta q^{in}[\Omega] + 4\sqrt{2\gamma}k\overline{\alpha}\,\delta x[\Omega] \end{cases}$$

Le bruit d'intensité est conservé

Mesure !

# Sensibilité de la mesure de déplacements

Spectres du champ sortant :

$$S_p^{out}[\Omega] = S_p^{in}[\Omega]$$

$$S_q^{out}[\Omega] = \underbrace{S_q^{in}[\Omega]}_{} + \left|\frac{4\sqrt{2\gamma}k\overline{\alpha}}{\gamma - i\Omega\tau}\right|^2 S_x[\Omega]$$

Bruit de la mesure (bruit de phase incident) = 1

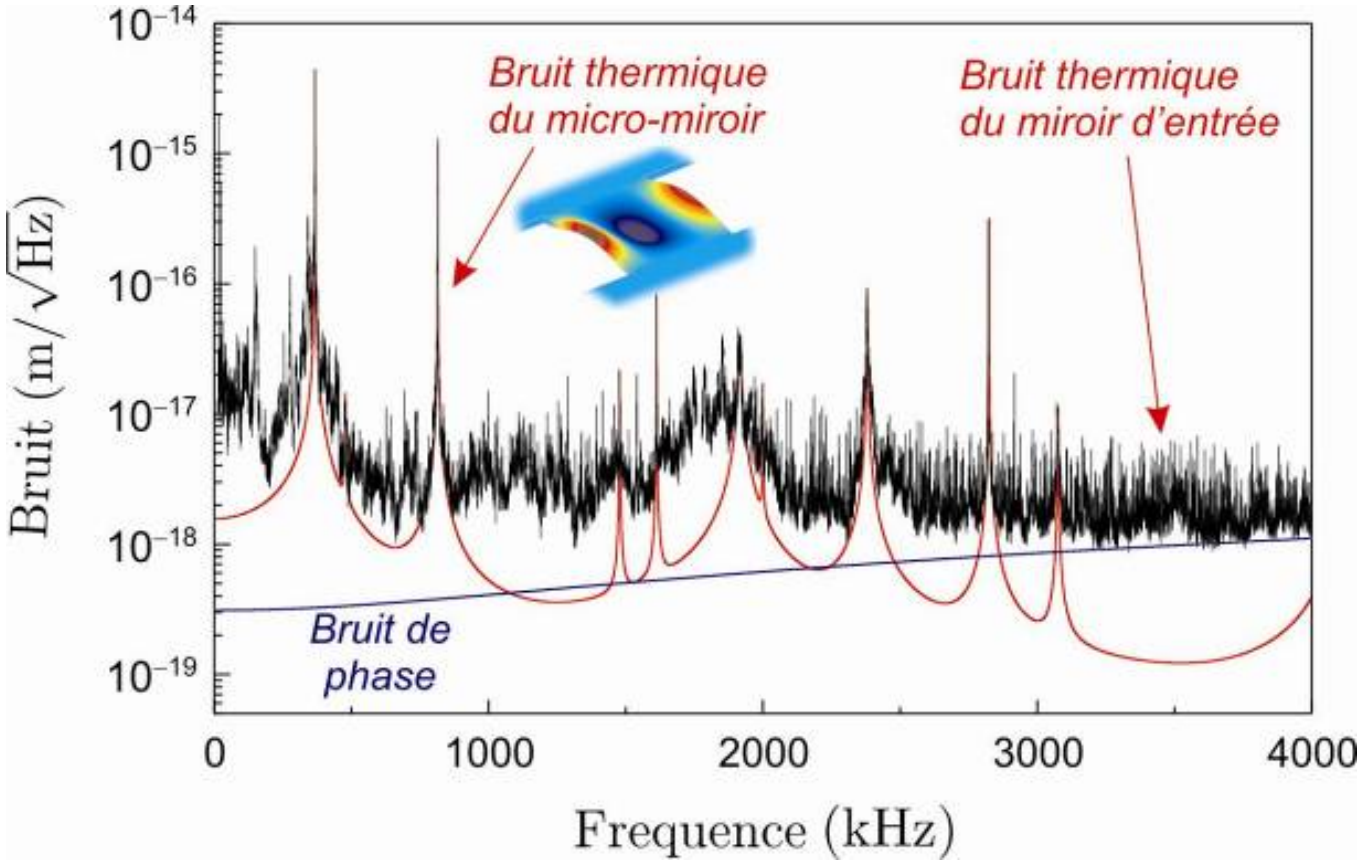
Sensibilité : $\delta x_{min} = \dfrac{\sqrt{1+\Omega^2/\Omega_{cav}^2}}{\kappa}$ avec $\kappa = \dfrac{16\mathcal{F}\sqrt{\overline{I}^{in}}}{\lambda}$, $\Omega_{cav} = \gamma/\tau$

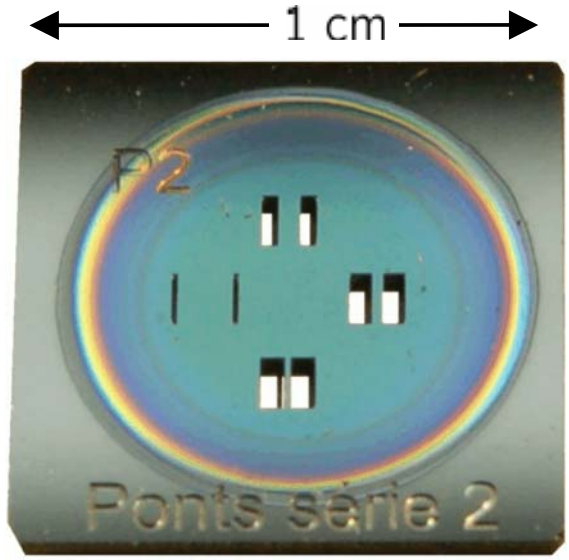
- Comparée à la réflexion sur un miroir mobile $\delta x_{min} = \lambda/\left(8\pi\sqrt{\overline{I}^{in}}\right)$, (voir cours 3), on gagne la finesse de la cavité
- La sensibilité est limitée par la bande passante $\Omega_{cav}$ de la cavité
- Ordre de grandeur : $P^{in} = 10\,\mathrm{mW}$, $\lambda = 1$, $\mathcal{F} = 100\,000$

  $\rightarrow$ Amplitude spectrale de bruit : $\delta x_{min} \approx 2 \times 10^{-21}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$

# Observation des mouvements d'un micro-miroir

## Observation du bruit thermique associé aux résonances mécaniques d'un micro-résonateur




$P^{in} = 1.5\,\mathrm{mW}$

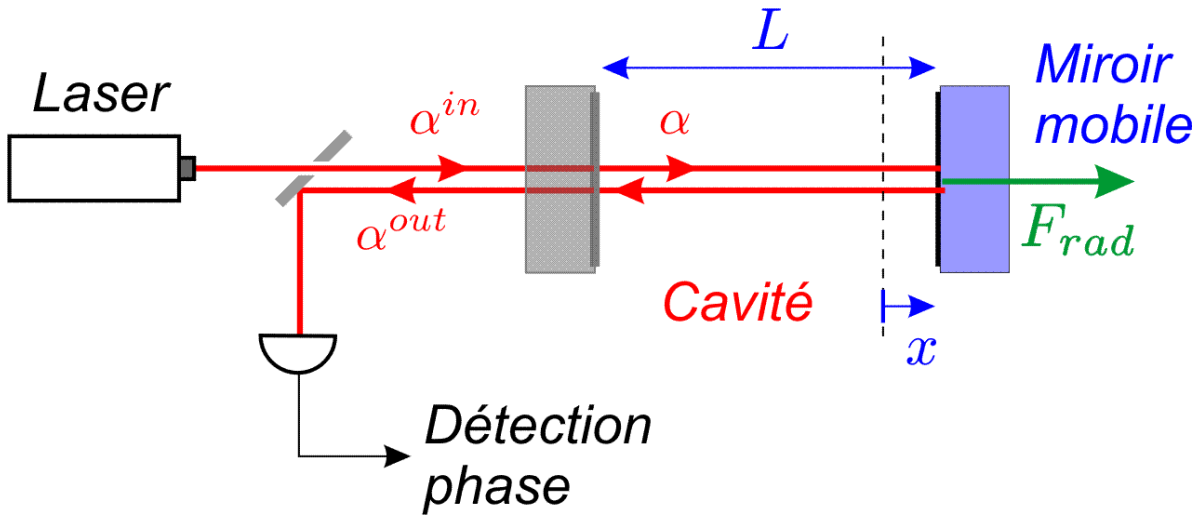
$\mathcal{F} = 30\,000$

Sensibilité : $\delta x_{\min} = 4 \times 10^{-19}\, m/\sqrt{Hz}$

O. Arcizet *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*. **97**, 133601 (2006)

# Pression de radiation dans la cavité

La pression de radiation, proportionnelle à l'intensité dans la cavité, va modifier la longueur de la cavité

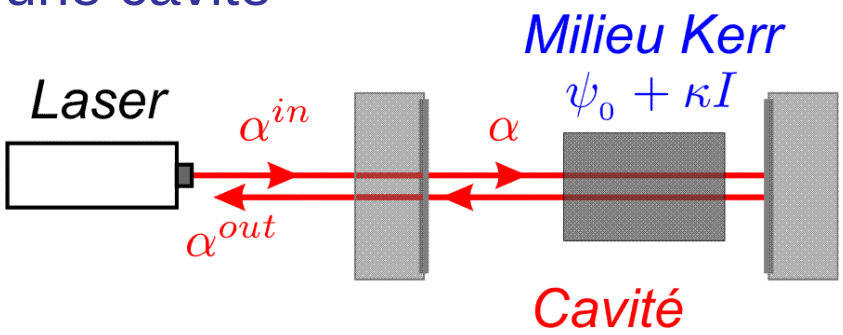



Pression de radiation $F_{rad} = 2\hbar k\, I$ $\rightarrow$ Déplacements $x[\Omega] = \chi[\Omega] F_{rad}[\Omega]$

Le déphasage $\psi = \psi_0 + 2k\,x$ de la cavité devient sensible à l'intensité intracavité $I$

$\rightarrow$ Similaire à un milieu Kerr placé dans une cavité

- Effets non linéaires (bistabilité,…)
- Effets quantiques (compression du champ,…)



# Bruit de pression de radiation

Déplacements : $\delta x_{rad}[\Omega] = \chi[\Omega]\, \delta F_{rad}[\Omega]$

Fluctuations quantiques de la pression de radiation :

$$\delta F_{rad}[\Omega] = 2\hbar k\, \delta I[\Omega] = 2\hbar k\, \overline{\alpha}\, \delta p[\Omega]$$

Pour une cavité à résonance ( $\overline{\psi} = 0$ ), le champ intracavité est amplifié par la finesse $\mathcal{F} = \pi/\gamma$ de la cavité :

$$\overline{\alpha} = \sqrt{\frac{2\mathcal{F}}{\pi}}\, \overline{\alpha}^{in}, \quad (\gamma - i\Omega\tau)\, \delta p[\Omega] = \sqrt{2\gamma}\, \delta p^{in}[\Omega]$$

$$\rightarrow \quad (\gamma - i\Omega\tau)\, \delta x_{rad}[\Omega] = \underbrace{4\sqrt{2\gamma} k\overline{\alpha}}_{\gamma\kappa} \frac{\hbar\chi[\Omega]}{2}\, \delta p^{in}[\Omega]$$

Contamination de la phase du faisceau réfléchi :

$$(\gamma - i\Omega\tau)\delta q^{out}[\Omega] = (\gamma + i\Omega\tau)\, \delta q^{in}[\Omega] + \underbrace{4\sqrt{2\gamma} k\overline{\alpha}}_{\gamma\kappa} (\delta x[\Omega] + \delta x_{rad}[\Omega])$$

# Sensibilité de la mesure

Estimateur $\widehat{x}$ du déplacement mesuré :

$$(\gamma - i\Omega\tau)\delta q^{out}[\Omega] = \gamma\kappa\,\delta\widehat{x}[\Omega]$$

Bruits *ramenés à l'entrée* dans la mesure :

$$\delta\widehat{x}[\Omega] = \delta x[\Omega] + \underbrace{\delta x_{min}[\Omega]} + \underbrace{\delta x_{rad}[\Omega]}$$

Bruit de la mesure :

$$\delta x_{min}[\Omega] = \frac{1 + i\Omega/\Omega_{cav}}{\kappa}\,\delta q^{in}[\Omega]$$

Action en retour :

$$\delta x_{rad}[\Omega] = \frac{\kappa}{1 - i\Omega/\Omega_{cav}}\,\frac{\hbar\chi[\Omega]}{2}\,\delta p^{in}[\Omega]$$

avec $\kappa = \dfrac{16\mathcal{F}\sqrt{\bar{I}^{in}}}{\lambda}$

# Limite quantique standard

Bruit de la mesure : $\delta x_{min}[\Omega] = \dfrac{1 + i\Omega/\Omega_{cav}}{\kappa}\,\delta q^{in}[\Omega]$

Action en retour : $\delta x_{rad}[\Omega] = \dfrac{\kappa}{1 - i\Omega/\Omega_{cav}}\,\dfrac{\hbar\chi[\Omega]}{2}\,\delta p^{in}[\Omega]$

Pour un état incident cohérent, les fluctuations de phase et d'amplitude ne sont pas corrélées et $S_p^{in}[\Omega] = S_q^{in}[\Omega] = 1$

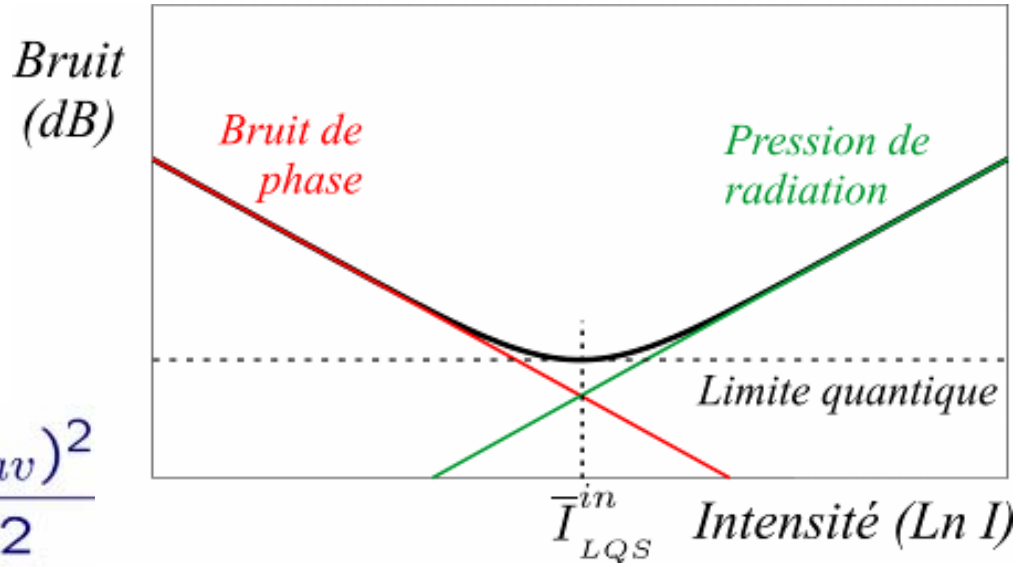
→ Les bruits s'ajoutent quadratiquement

→ Limite quantique standard :

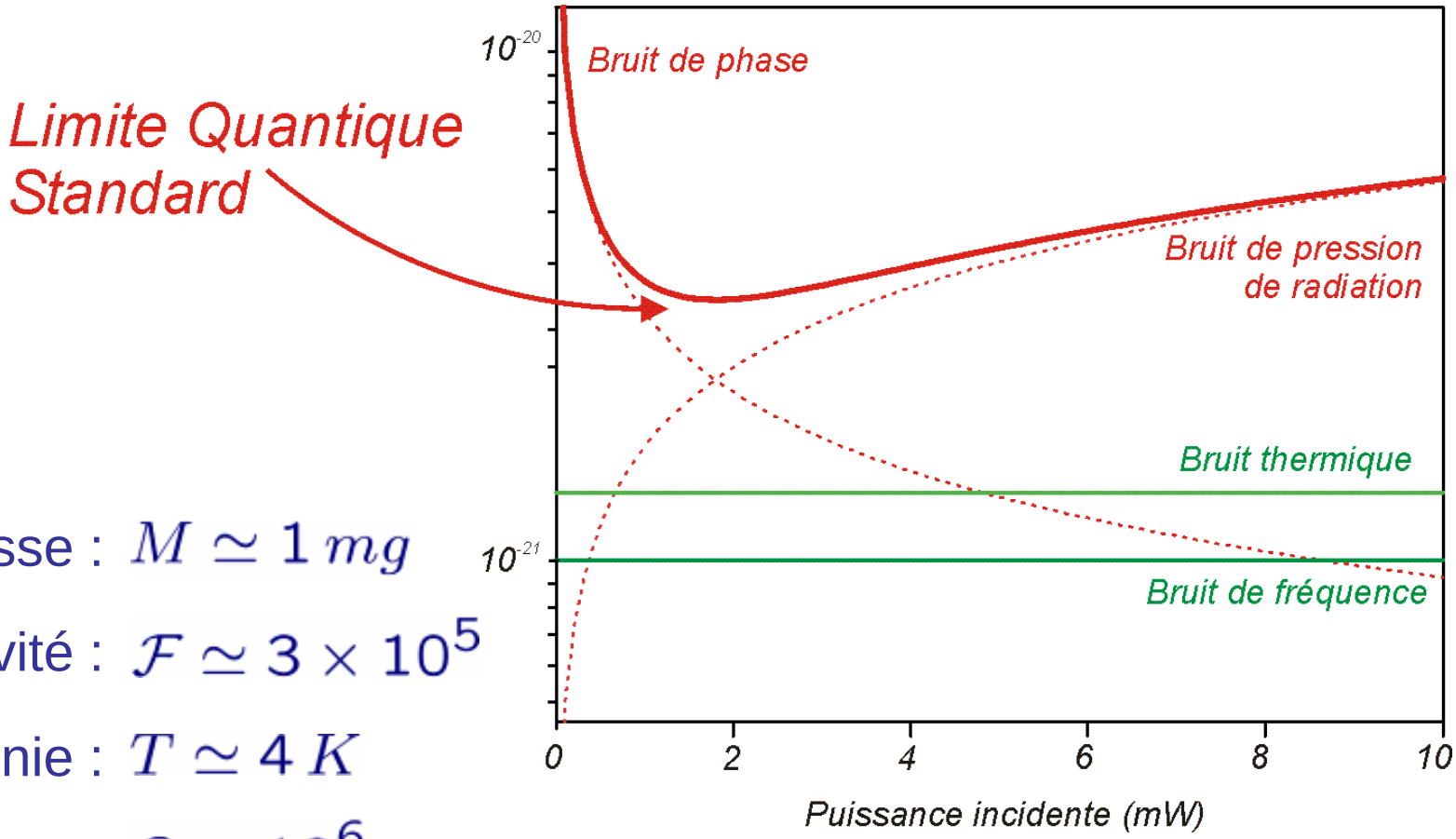
$$\delta x_{LQS} = \sqrt{\hbar\,|\chi[\Omega]|}$$

atteinte pour l'intensité :

$$\frac{256\mathcal{F}\bar{I}^{in}_{LQS}}{\lambda^2} = \kappa^2_{LQS} = \frac{1 + (\Omega/\Omega_{cav})^2}{\hbar\,|\chi[\Omega]|\,/2}$$



# Vers une mise en évidence expérimentale




Masse : $M \simeq 1\,mg$

Cavité : $\mathcal{F} \simeq 3 \times 10^5$

Cryogénie : $T \simeq 4\,K$

Facteur de qualité : $Q \simeq 10^6$

Limite quantique : $\delta x_{LQS} \simeq 3 \times 10^{-21}\, m/\sqrt{Hz}$

# Dépendance avec la fréquence

On suppose désormais $\Omega \ll \Omega_{cav}$

Bruit de la mesure : $\delta x_{min}[\Omega] = \frac{1}{\kappa}\delta q^{in}[\Omega]$

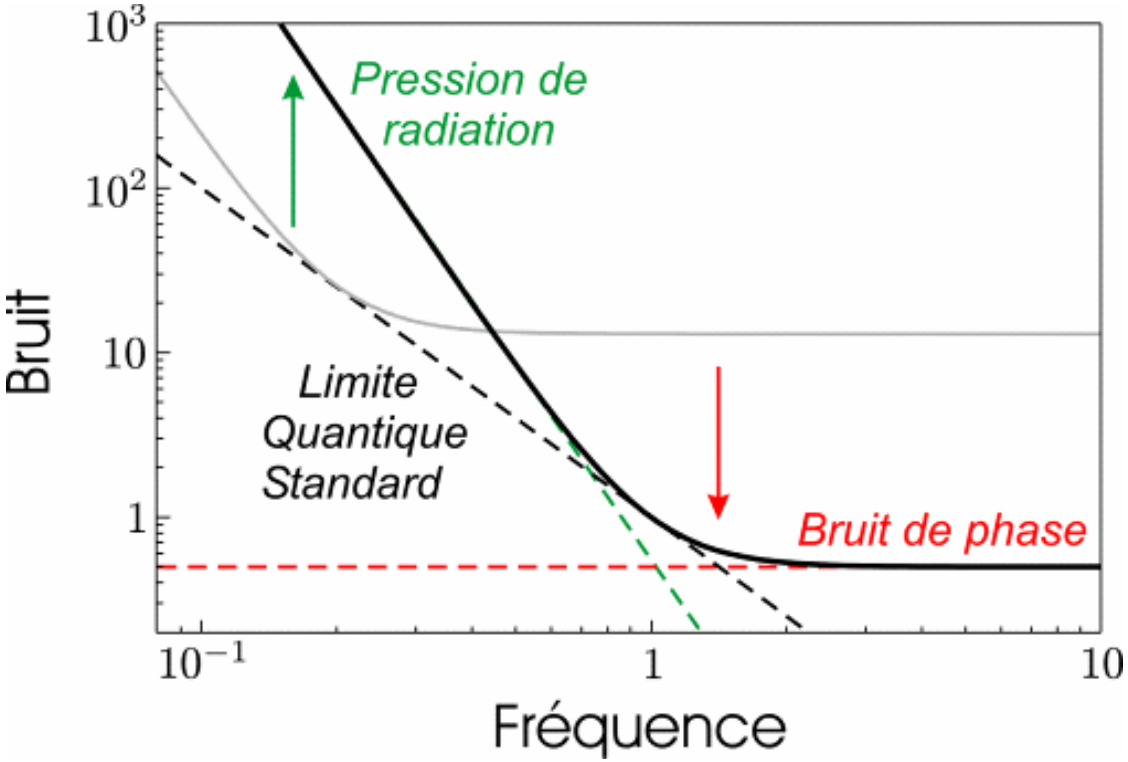
Action en retour : $\delta x_{rad}[\Omega] = \kappa \frac{\hbar\chi[\Omega]}{2}\delta p^{in}[\Omega]$

Pour un miroir libre :

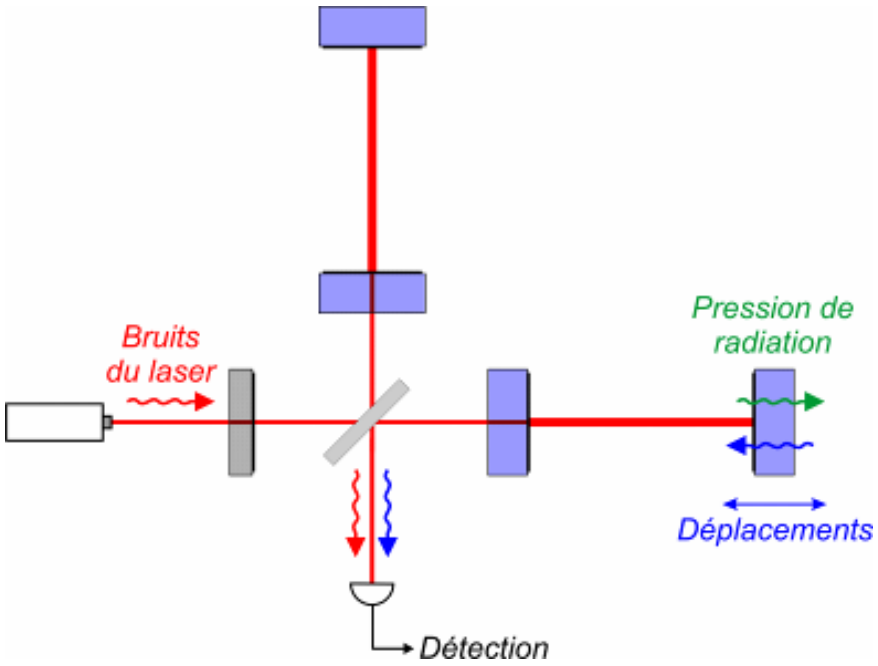
$$\chi[\Omega] = -1/m\Omega^2$$

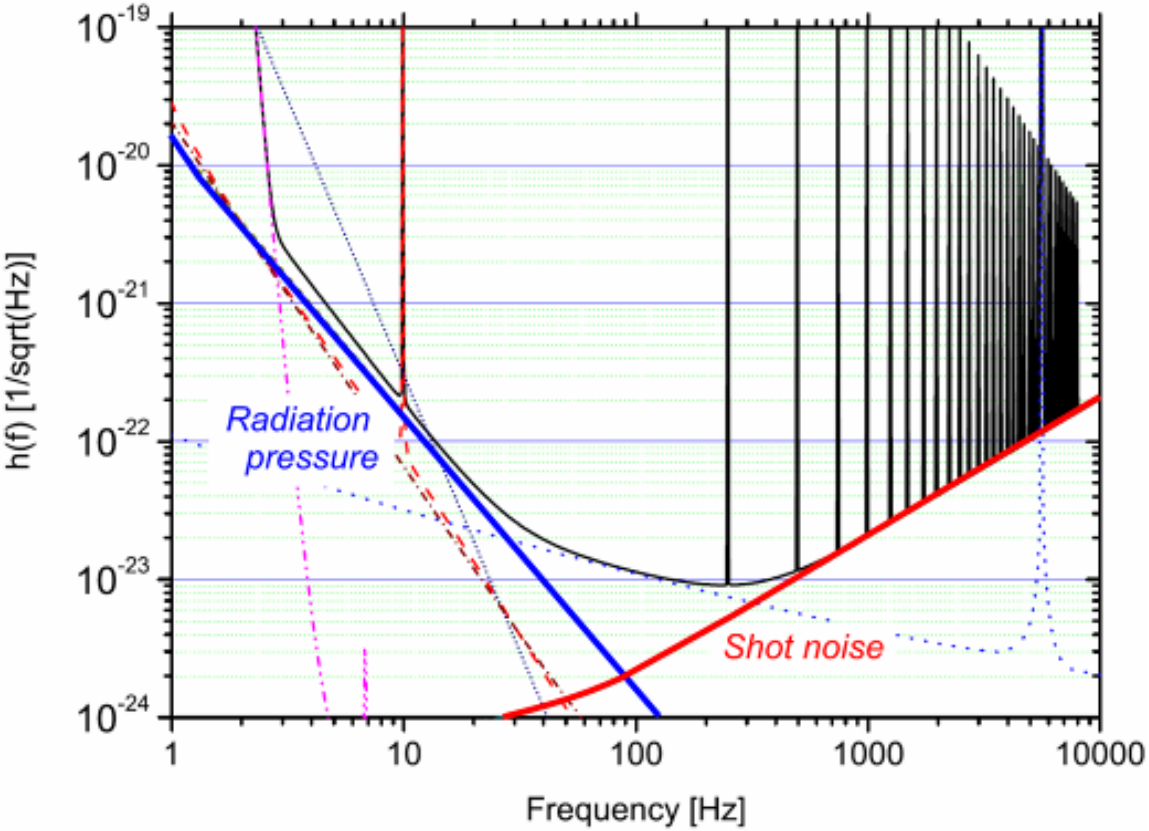
Si on augmente l'intensité…

$$\delta x_{LQS} = \frac{\sqrt{\hbar/m}}{\Omega}$$



# Equivalence avec les interféromètres




L'interférence en sortie de l'interféromètre résulte
de la différence de phase entre les 2 cavités

→ Mêmes bruits de mesure et de pression de radiation

# Plan

## Mesures de position : dépasser les limites quantiques

- Limites quantiques dans les cavités optiques
  Effets de la pression de radiation
- **Dépasser la limite quantique**
  - Enjeux – ondes gravitationnelles
  - Injection d'états comprimés
  - Mesure de type QND
  - Verrouillage quantique des miroirs
- Optique quantique avec des miroirs qui bougent
  - Génération d'état comprimé, mesure QND…
  - Contrôle du bruit d'un miroir au niveau quantique

# Pression de radiation dans les interféromètres

PHYSICAL REVIEW LETTERS

VOLUME 45 | 14 JULY 1980 | NUMBER 2

## Quantum-Mechanical Radiation-Pressure Fluctuations in an Interferometer

Carlton M. Caves
*W. K. Kellogg Radiation Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California 91125*
(Received 29 January 1980)

The interferometers now being developed to detect gravitational vaves work by measuring small changes in the positions of free masses. There has been a controversy whether quantum-mechanical radiation-pressure fluctuations disturb this measurement. This Letter resolves the controversy: They do.

Etude des effets de pression de radiation en 1980
Proposition d'injection d'état comprimé en 1981

# Injection d'un état comprimé

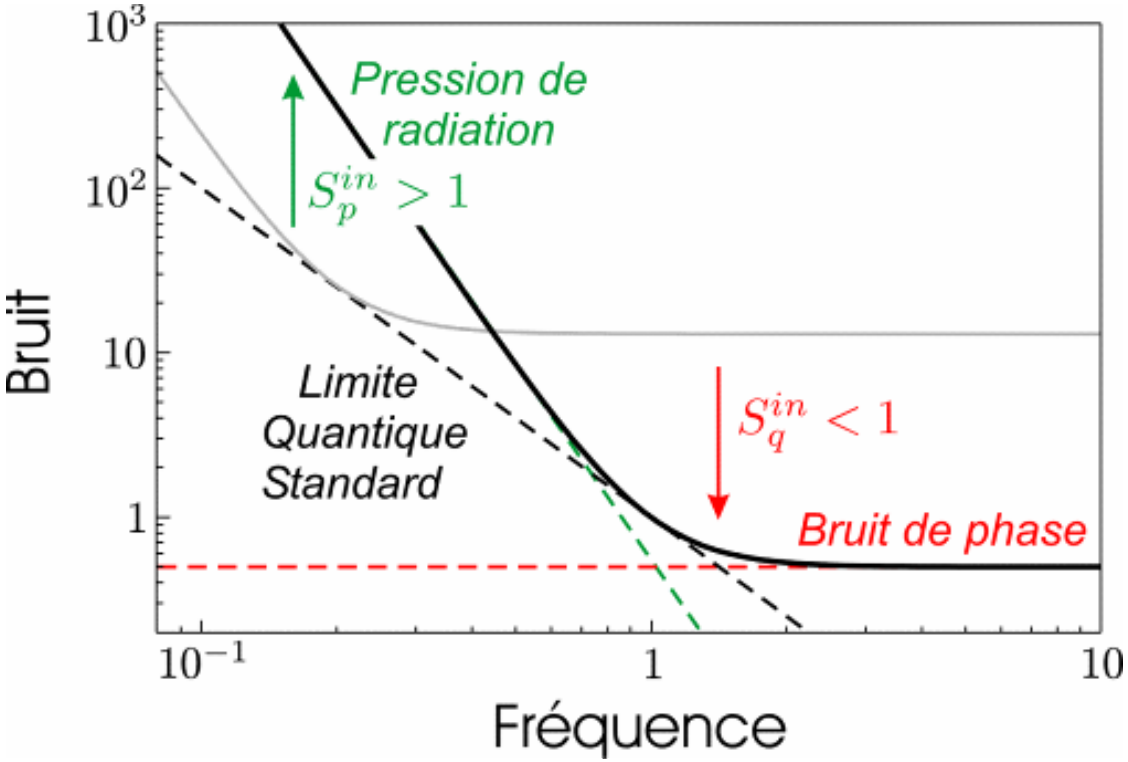
Estimateur $\hat{x}$ du déplacement mesuré :

$$\delta\hat{x}[\Omega] = \delta x[\Omega] + \underbrace{\frac{1}{\kappa}\,\delta q^{in}[\Omega]}_{\text{Bruit de phase}} + \underbrace{\kappa\,\frac{\hbar\chi[\Omega]}{2}\,\delta p^{in}[\Omega]}_{\text{Bruit de pression de radiation}}$$

Les interféromètres actuels sont limités par le bruit de phase

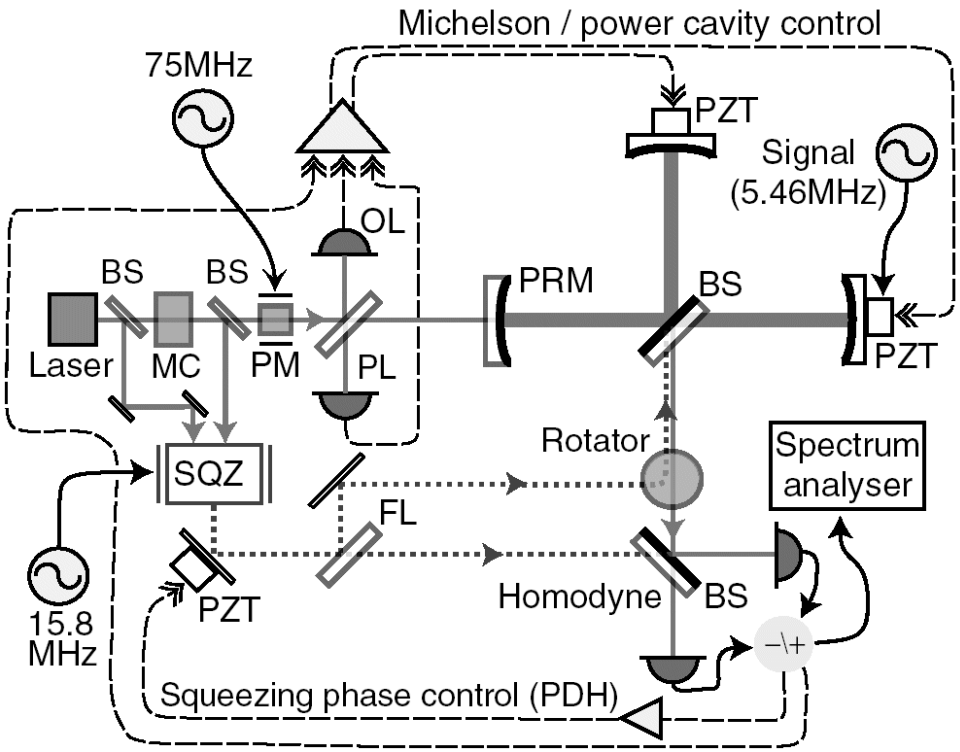
→ Injection d'un état comprimé en phase :

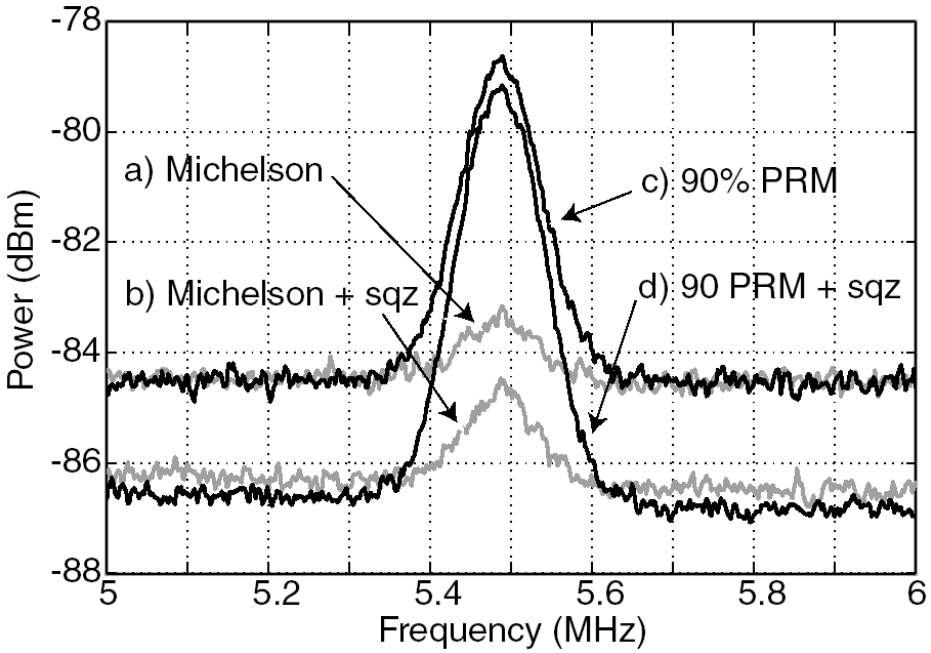
$$\begin{cases} S_q^{in}[\Omega] < 1 \\ S_p^{in}[\Omega] > 1 \end{cases}$$



# Démonstrations expérimentales

Injection d'un état comprimé dans un interféromètre
avec miroir de recyclage de la pompe :




K. McKenzie … D.E. McClelland, *Phys. Rev. Lett.* ***88***, *231102* (2002)

Egalement démontré avec double recyclage (pompe + signal) :
R. Schnabel *et al.* (2005)

# Dépasser la limite quantique !

Estimateur $\hat{x}$ du déplacement mesuré :

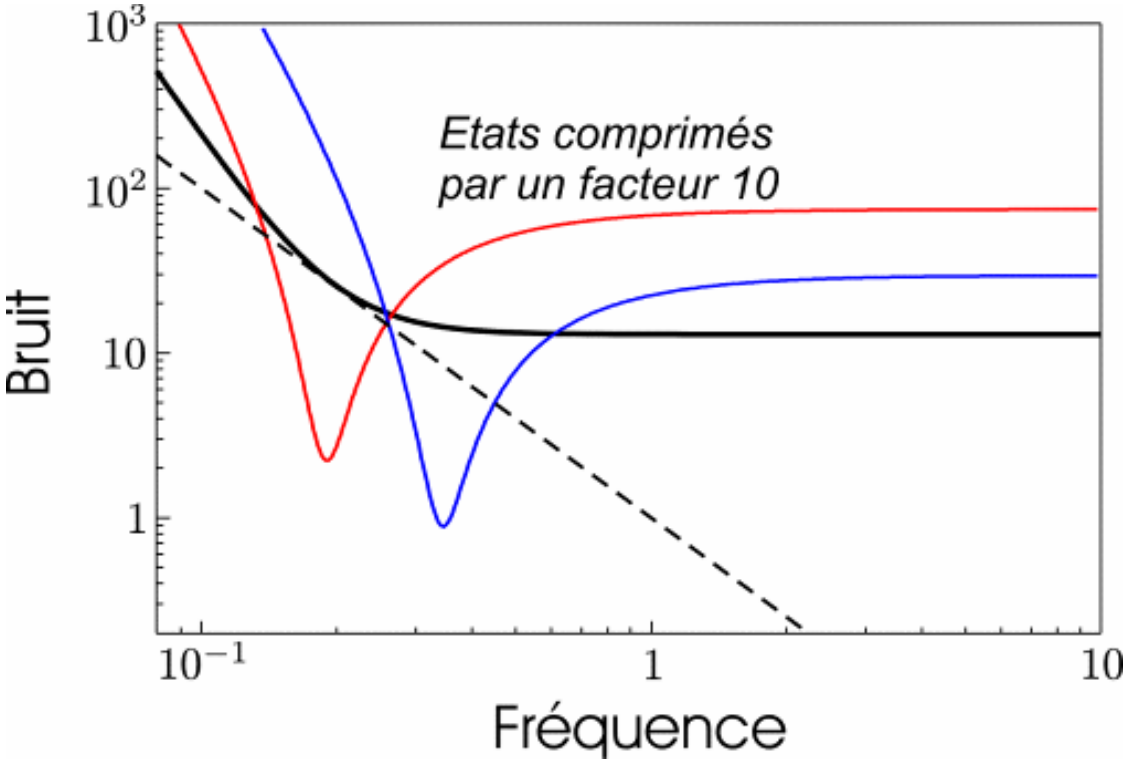
$$\delta\hat{x}[\Omega] = \delta x[\Omega] + \underbrace{\frac{1}{\kappa}\,\delta q^{in}[\Omega]}_{\text{Bruit de phase}} + \underbrace{\kappa\,\frac{\hbar\chi[\Omega]}{2}\,\delta p^{in}[\Omega]}_{\text{Bruit de pression de radiation}}$$

Il faut comprimer la bonne quadrature $\alpha_\theta$ :

$$\delta\alpha_\theta^{in} = \sin\theta\,\delta q^{in} + \cos\theta\,\delta p^{in}$$

avec $\cot\theta = \kappa^2\,\frac{\hbar\chi[\Omega]}{2}$

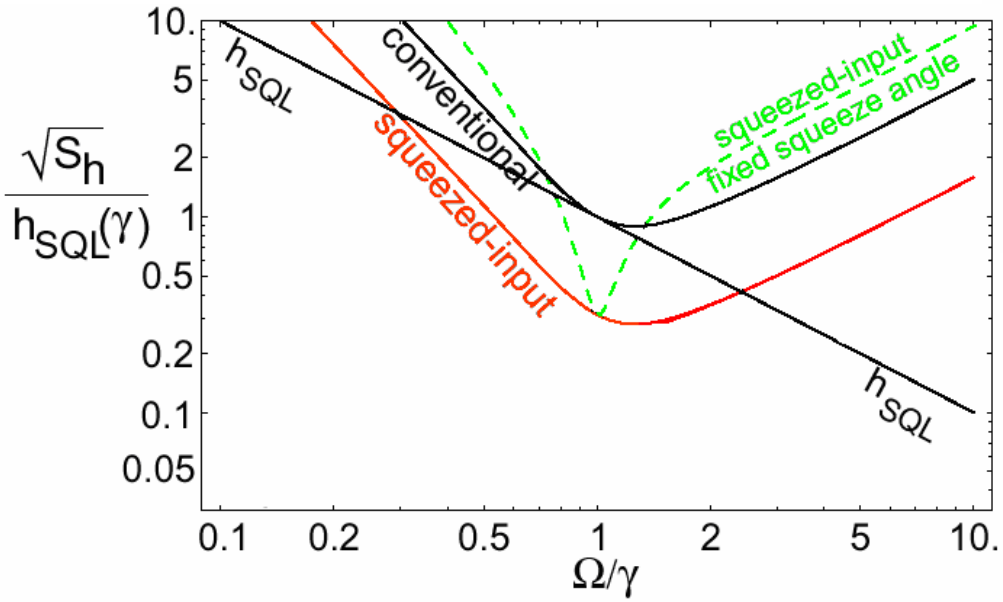
Du fait de la réponse mécanique $\chi[\Omega]$ du miroir, l'angle $\theta$ n'est adapté qu'à une fréquence donnée

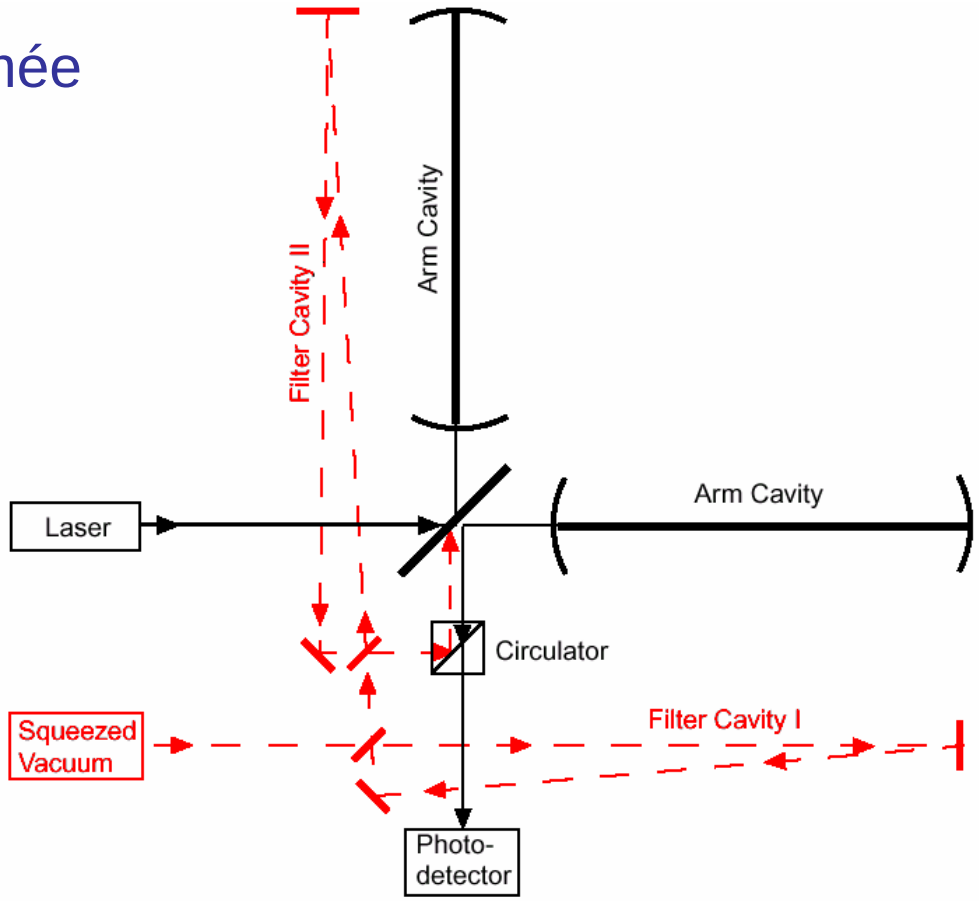


# Injecter un état comprimé dans un interféromètre

Adaptation de la quadrature comprimée
à l'aide de cavités de filtrage

→ Rotation de l'angle $\theta$ de la quadrature comprimée avec la fréquence




H.J. Kimble *et al.*, Phys. Rev. D **65**, 022002 (2002)

# Mesure de type QND

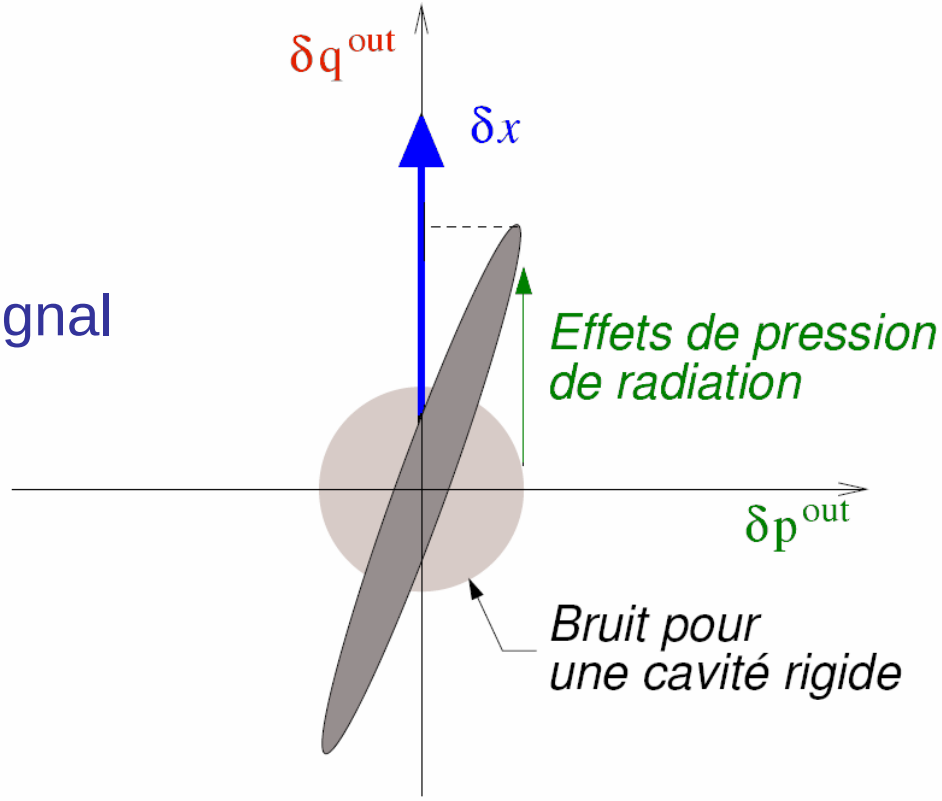
Le champ réfléchi par la cavité est comprimé par les effets de pression de radiation :

$$\begin{cases} \delta p^{out}[\Omega] = \delta p^{in}[\Omega] \\ \delta q^{out}[\Omega] = \delta q^{in}[\Omega] + \kappa \left( \delta x[\Omega] + \kappa \dfrac{\hbar \chi[\Omega]}{2} \delta p^{in}[\Omega] \right) \end{cases}$$

En mesurant une quadrature $\alpha_\theta^{out}$ différente de la phase, on peut profiter de la compression du champ sans trop perdre sur le signal

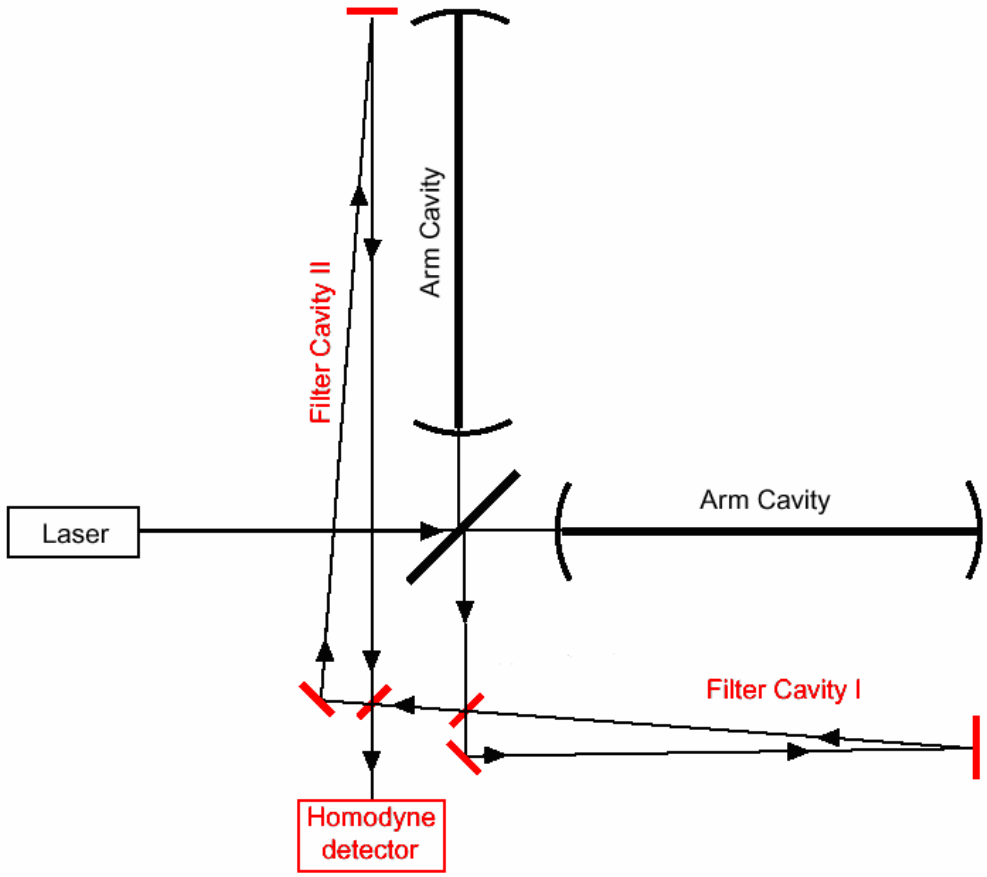
Optimisation du rapport signal à bruit :

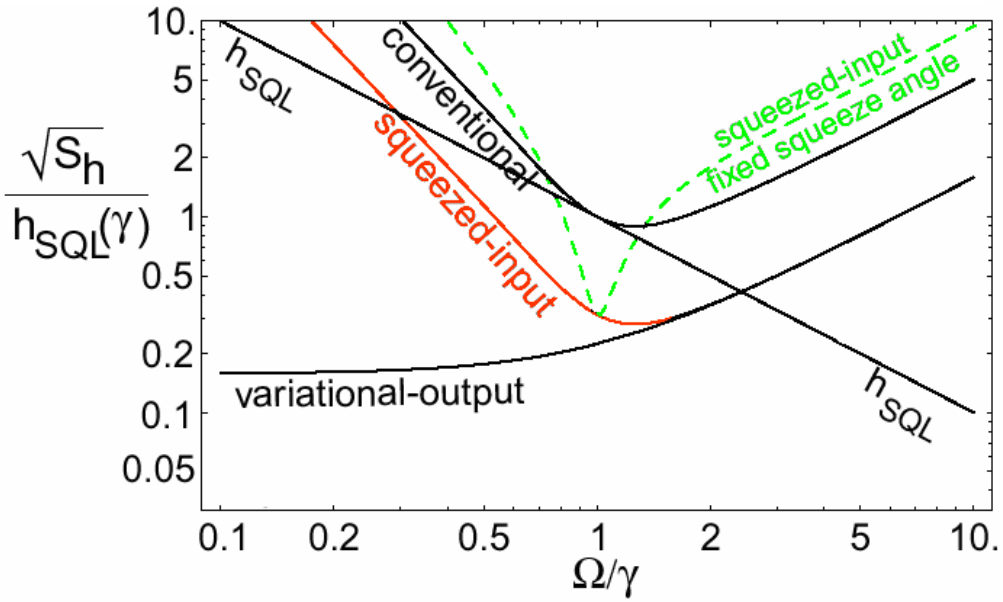
$$\cot\theta = -\kappa^2 \frac{\hbar \chi[\Omega]}{2}$$



# Mesure de type QND dans un interféromètre

Rotation de la quadrature mesurée
à l'aide de cavités de filtrage



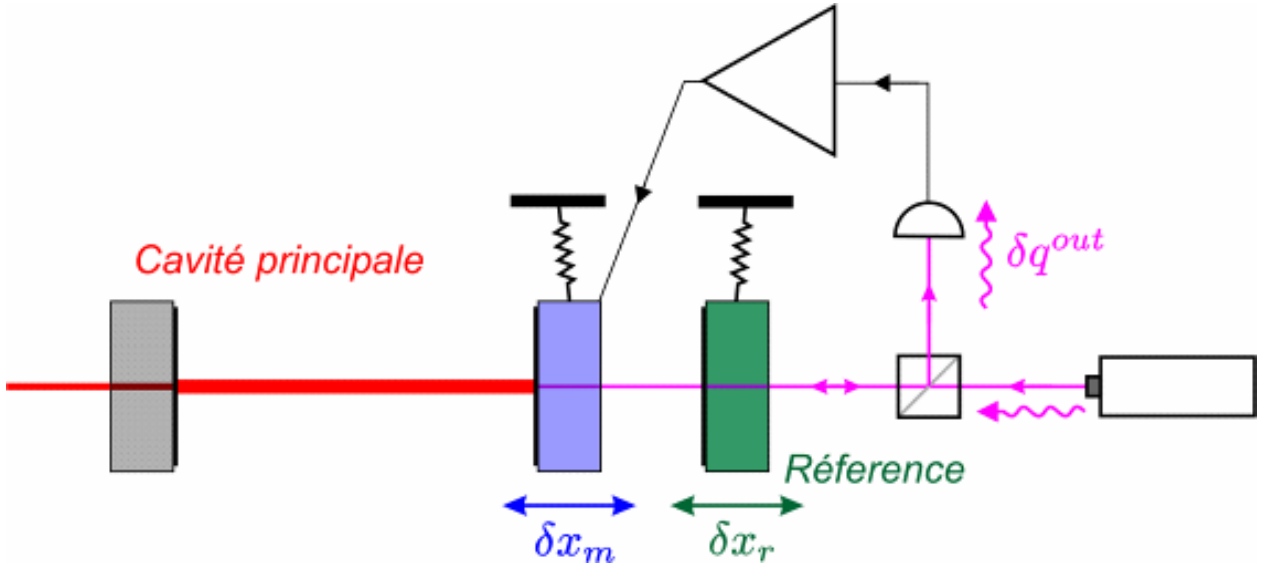




H.J. Kimble *et al.*, Phys. Rev. D **65**, 022002 (2002)

# Verrouillage quantique des miroirs

Principe :

- Utiliser une cavité auxiliaire pour mesurer les déplacements du miroir
- Asservir la position du miroir à partir du signal obtenu

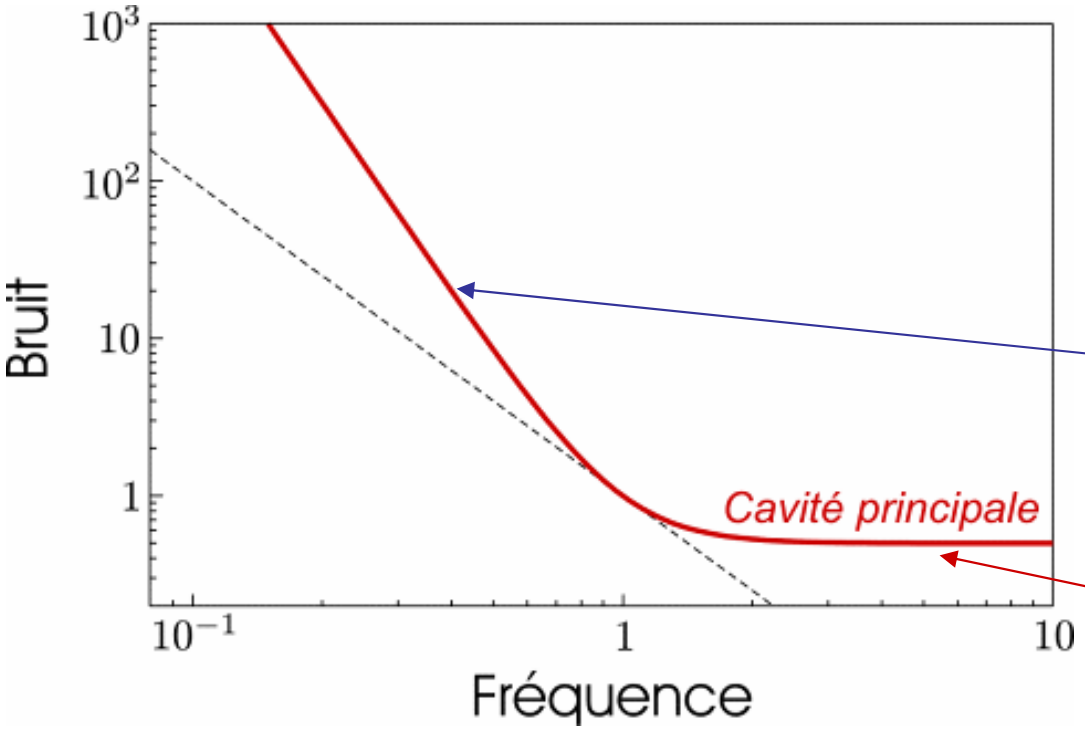


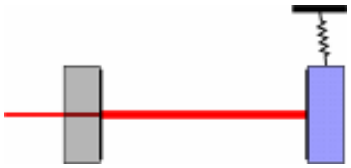

→ On verrouille la position du miroir par rapport à un *miroir de référence*

Mais le miroir de référence subit la pression de radiation de la cavité auxiliaire... Que se passe-t-il au niveau quantique ?

# Verrouillage quantique des miroirs

Bruits de phase et de pression de radiation dans la cavité principale



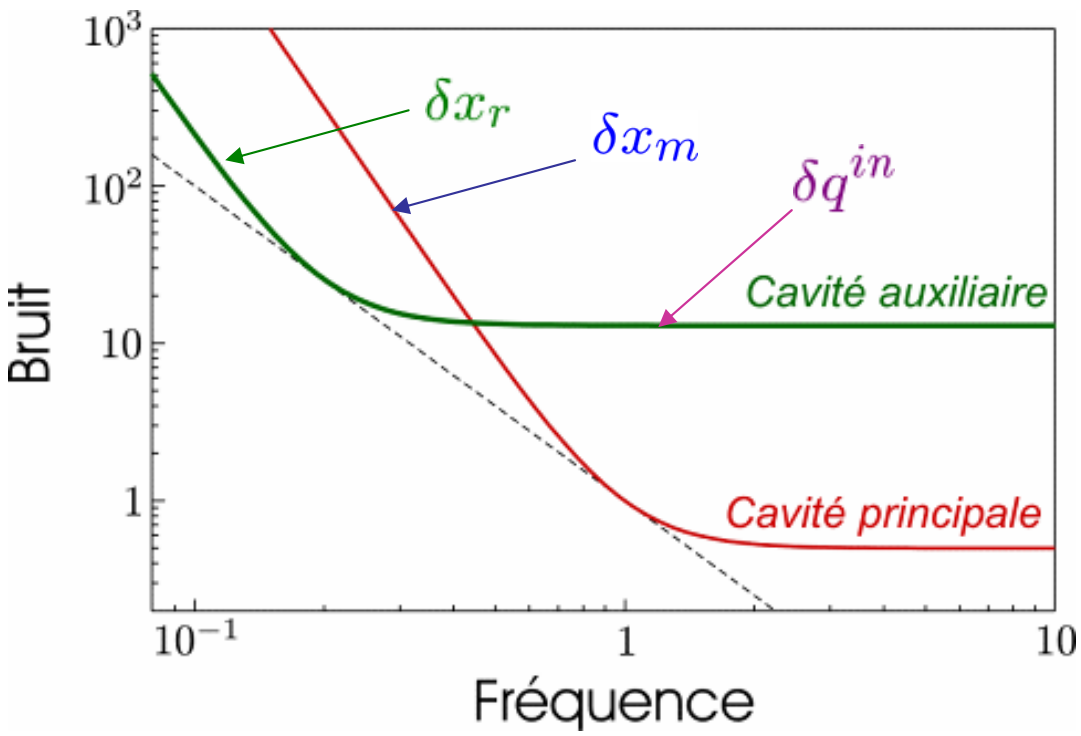
Bruit de pression de radiation du miroir $\delta x_m$

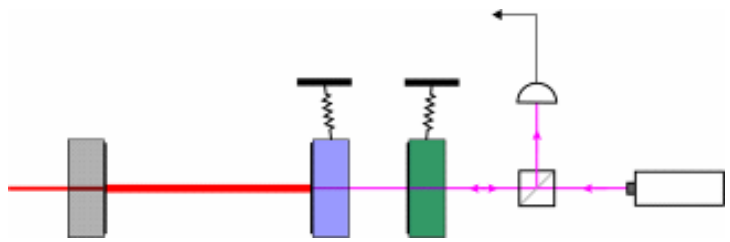
Bruit de phase dans la cavité principale

# Verrouillage quantique des miroirs

Faisceau moins intense dans la cavité auxiliaire :

- Les effets de pression de radiation sont plus faibles
- La sensibilité à haute fréquence est moins bonne



Mesure de la cavité auxiliaire :

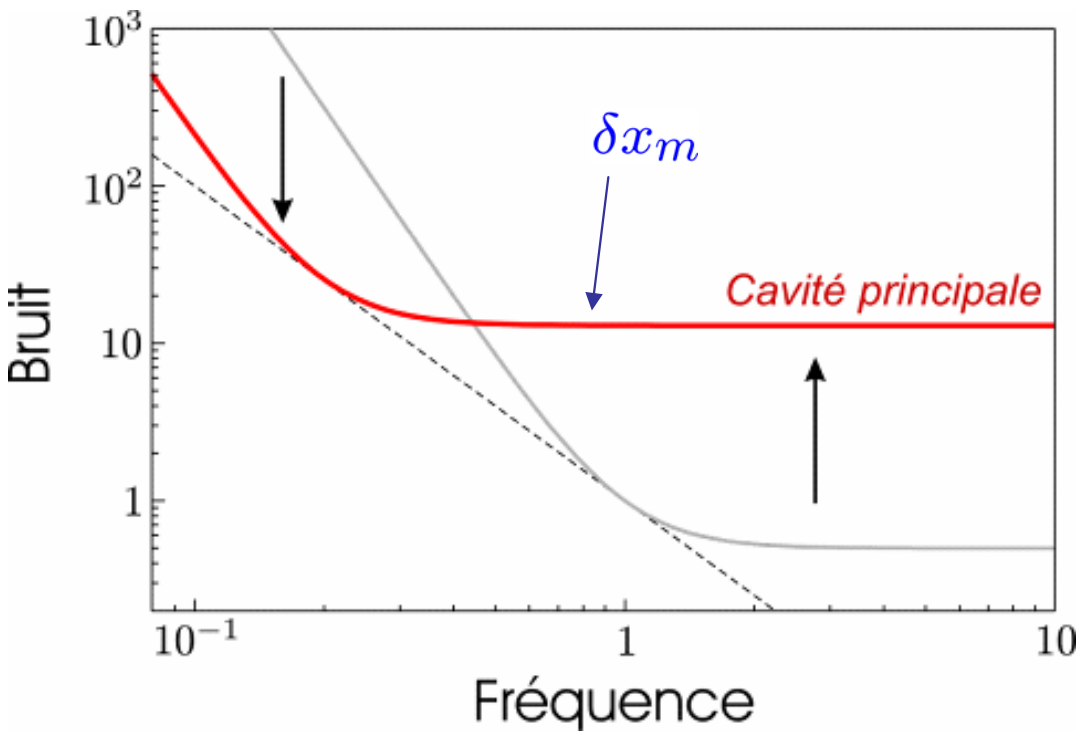
$$\delta q^{out} = \delta q^{in} + \kappa(\delta x_m - \delta x_r)$$

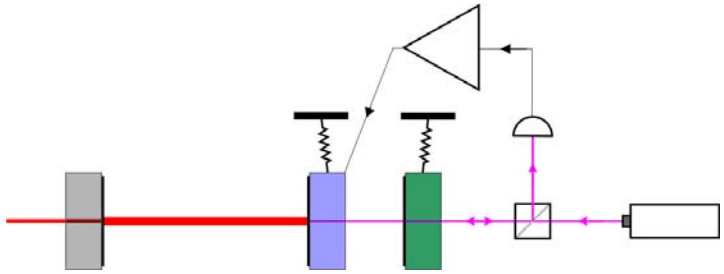
→ La cavité auxiliaire mesure les déplacements du miroir à basse fréquence

# Verrouillage quantique des miroirs

Gain infini de l'asservissement :

- Contrôle du miroir à basse fréquence
- Contamination du mouvement du miroir à haute fréquence



Asservissement : $\delta q^{out} \sim 0$

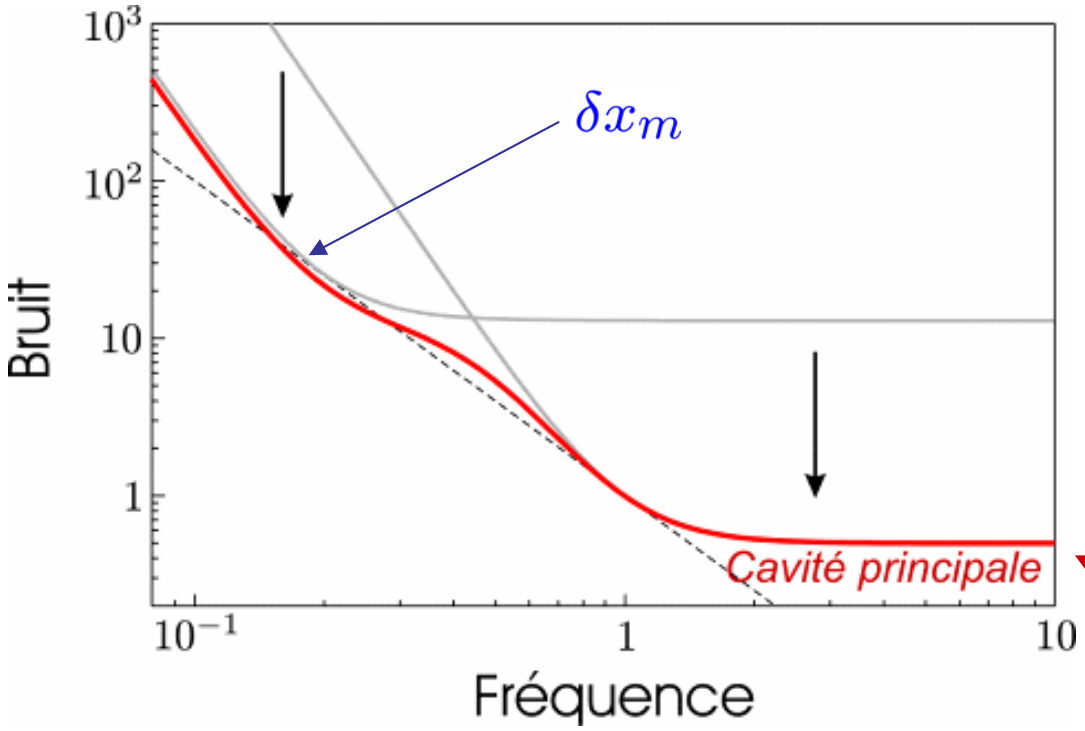
$\rightarrow \delta x_m = \delta x_r - \delta q^{in}/\kappa$

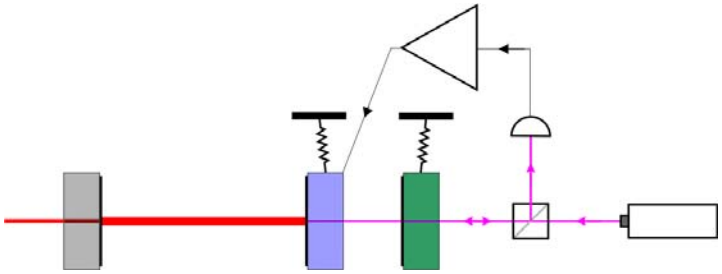
→ La sensibilité de la cavité principale est améliorée à basse fréquence, mais dégradée à haute fréquence

# Verrouillage quantique des miroirs

Gain optimisé : fort à basse fréquence, faible à haute fréquence

→ Contrôle du miroir à basse fréquence uniquement



Asservissement à basse fréquence:

$\rightarrow \delta x_m \simeq \delta x_r$

Bruit de phase dans la cavité principale

→ Réduction des effets de pression de radiation dans la cavité principale

# Plan

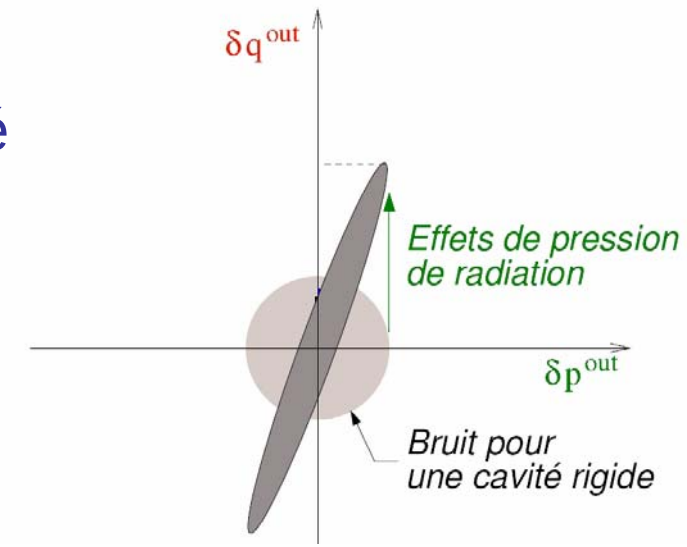
## Mesures de position : dépasser les limites quantiques

- Limites quantiques dans les cavités optiques
  Effets de la pression de radiation
- Dépasser la limite quantique
  - Enjeux – ondes gravitationnelles
  - Injection d'états comprimés
  - Mesure de type QND
  - Verrouillage quantique des miroirs
- **Optique quantique avec des miroirs qui bougent**
  - Génération d'état comprimé, mesure QND…
  - Contrôle du bruit d'un miroir au niveau quantique

# Optique quantique avec des miroirs qui bougent

Les effets de pression de radiation sont équivalents à un effet Kerr dans la cavité

→ Compression du champ réfléchi par la cavité

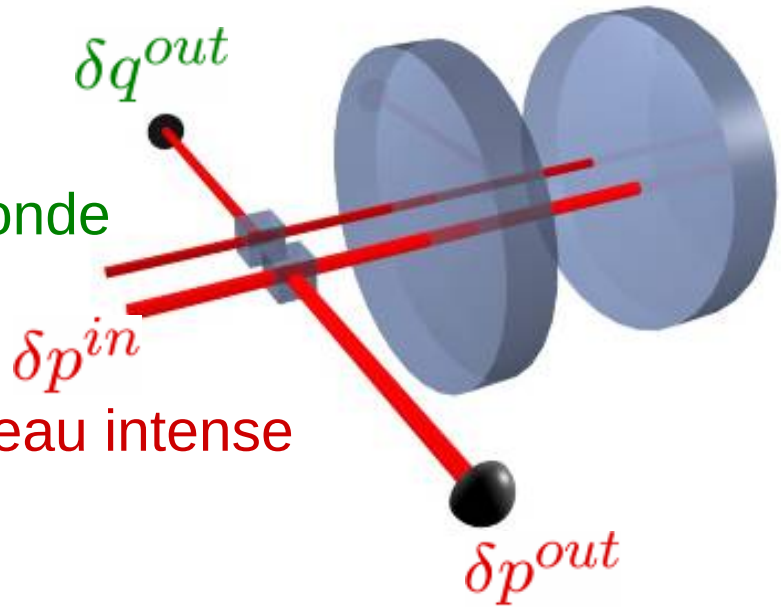



→ Mesure QND de la lumière :

$$\begin{cases} \delta q^{out} = \delta q^{in} + \kappa^2 \dfrac{\hbar\chi}{2} \delta p^{in} \\ \delta p^{out} = \delta p^{in} \end{cases}$$

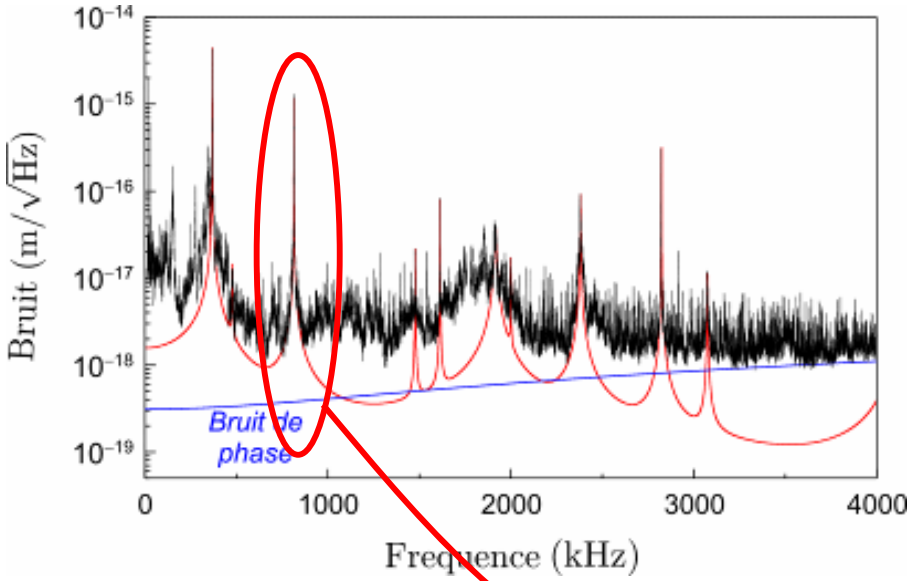
Faisceau sonde

Faisceau intense

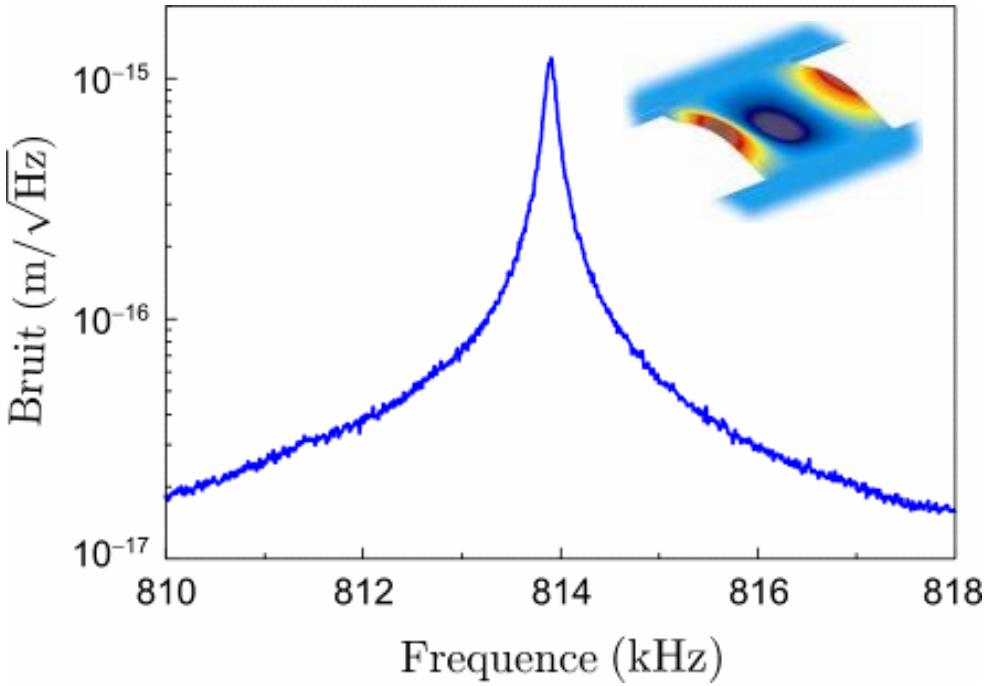



Corrélations quantiques entre les 2 faisceaux par l'intermédiaire du mouvement du miroir

# Contrôler les oscillations du miroir




Bruit thermique d'un mode de vibration du micro-miroir




$\Omega_m/2\pi \simeq 814\,\text{kHz}$

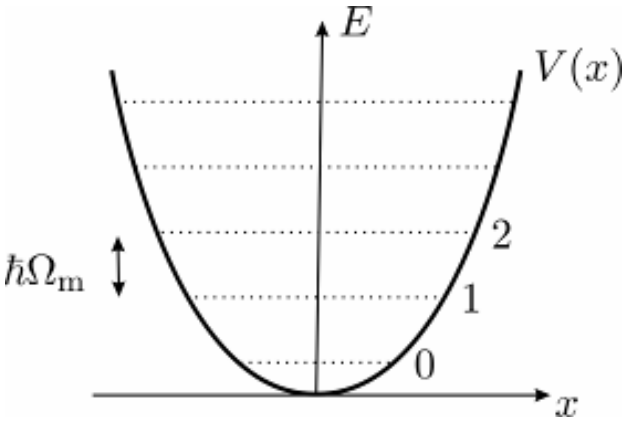
$M \simeq 190\,\mu\text{g}$

$Q \simeq 8\,000$

Nombre de phonons thermiques : $n_T = \dfrac{k_B T}{\hbar \Omega_m} \simeq 6.10^6$ !

# Régime quantique du micro-miroir

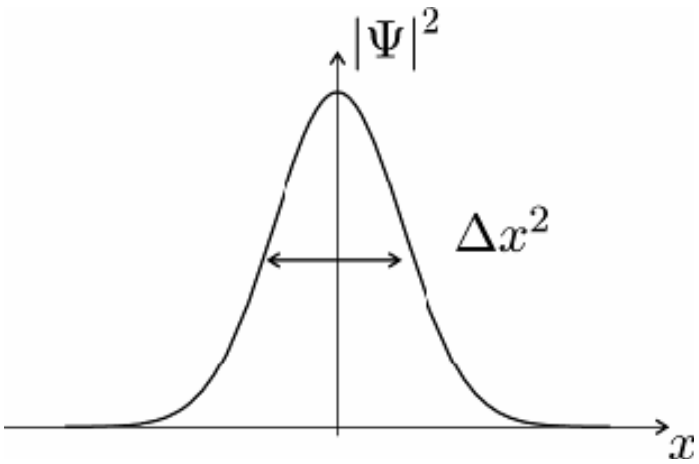
Etat quantique fondamental d'un oscillateur harmonique macroscopique




- Condition sur la température :

$$k_B T \leq \hbar\Omega_m$$

1 GHz $\leftrightarrow$ 50 mK
1 MHz $\leftrightarrow$ 50 $\mu$K




- Observation directe de l'extension spatiale de la fonction d'onde :

$$\frac{1}{2} M \Omega_m^2 \Delta x^2 = \frac{1}{2} \frac{\hbar\Omega_m}{2}$$

$$\rightarrow \quad \Delta x \simeq 10^{-17}\ \mathrm{m}$$

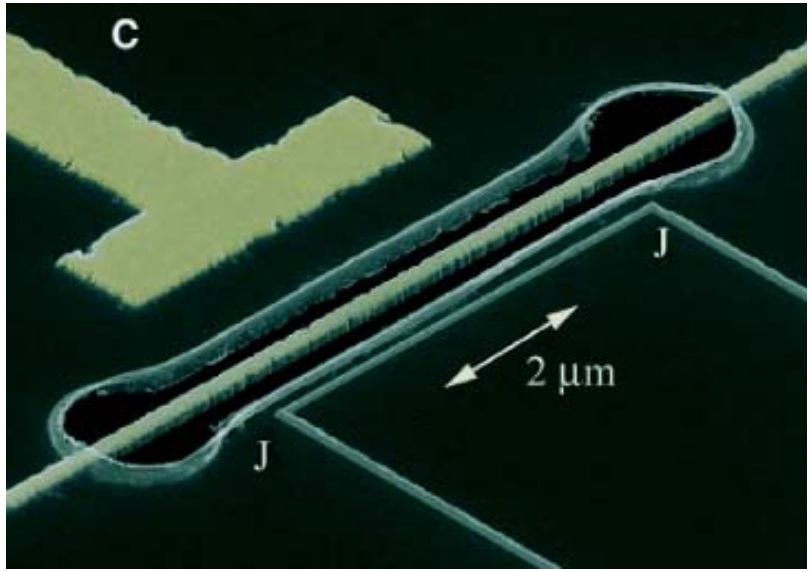
$(M \simeq 100\,\mu\mathrm{g},\ \Omega_m/2\pi \simeq 1\ \mathrm{MHz})$

# Systèmes mécaniques nanométriques

Fréquence de résonance élevée
jusqu'à 1 GHz

Fonctionnement cryogénique
Température atteinte ~ 50 mK

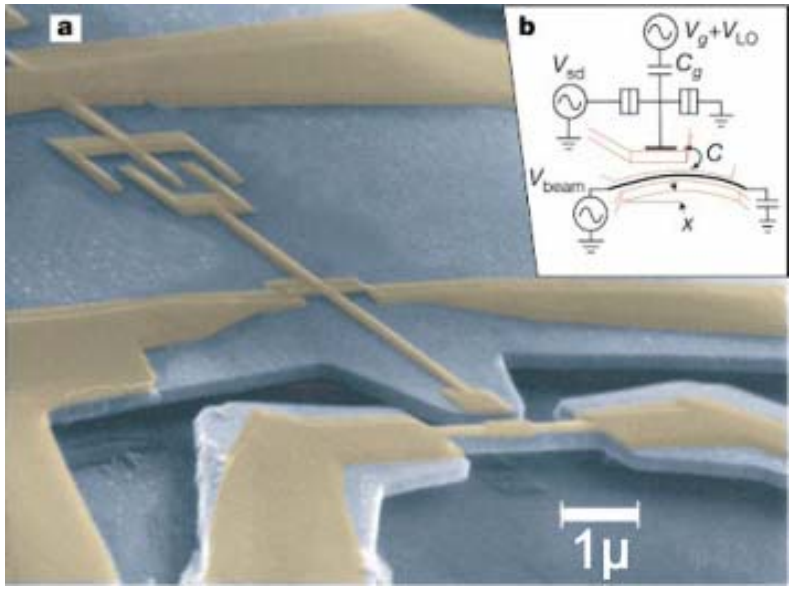
Détection capacitive
Sensibilité insuffisante $\sim 10^{-15}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$




*K.C. Schwab, U. Maryland, 2004*

$\Omega_m/2\pi = 20\,\mathrm{MHz}$

$Q = 40\,000$




$\Omega_m/2\pi = 116\,\mathrm{MHz}$

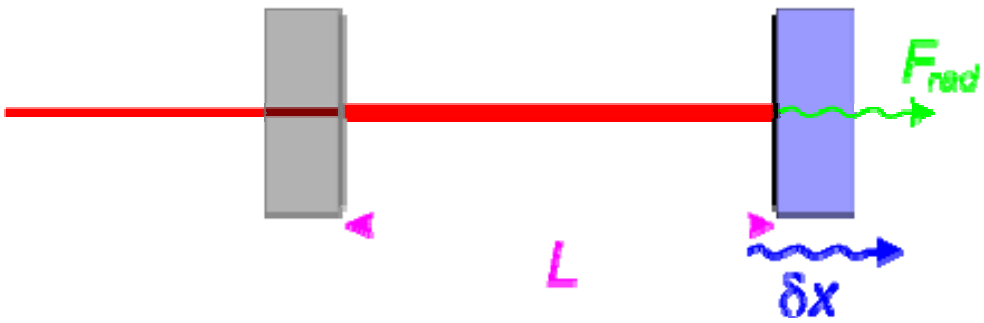
$Q = 1700$

$M = 3 \times 10^{-15}\,\mathrm{kg}$

*A.N. Cleland, UCSB, 2003*

# Effets dynamiques de la pression de radiation

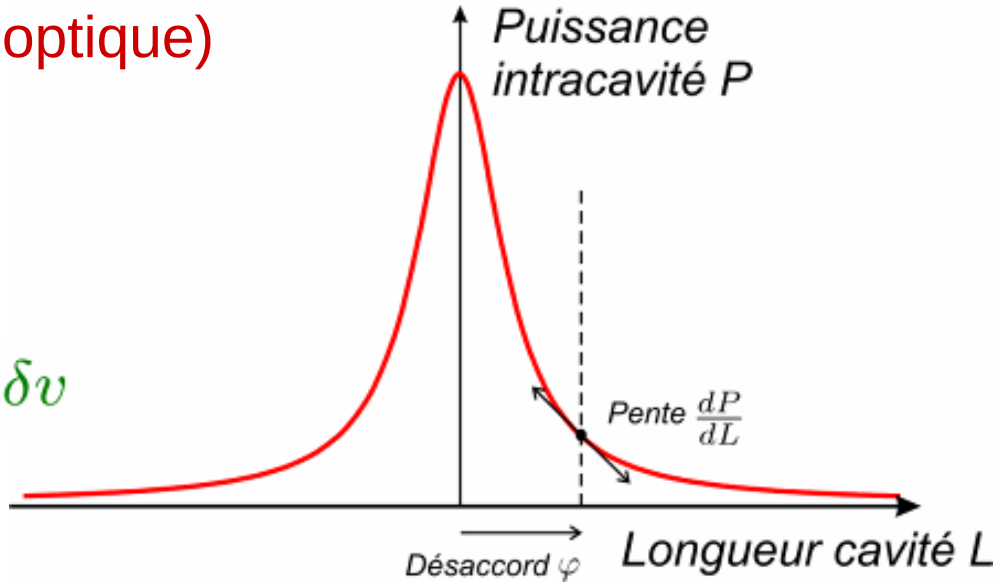
Dans une cavité désaccordée, la pression de radiation devient sensible aux déplacements




Force de rappel (ou répulsive) selon le signe du désaccord :

$$F_{\text{rad}} \propto \frac{dP}{dL}\ \delta x$$

Modification de la raideur (ressort optique)



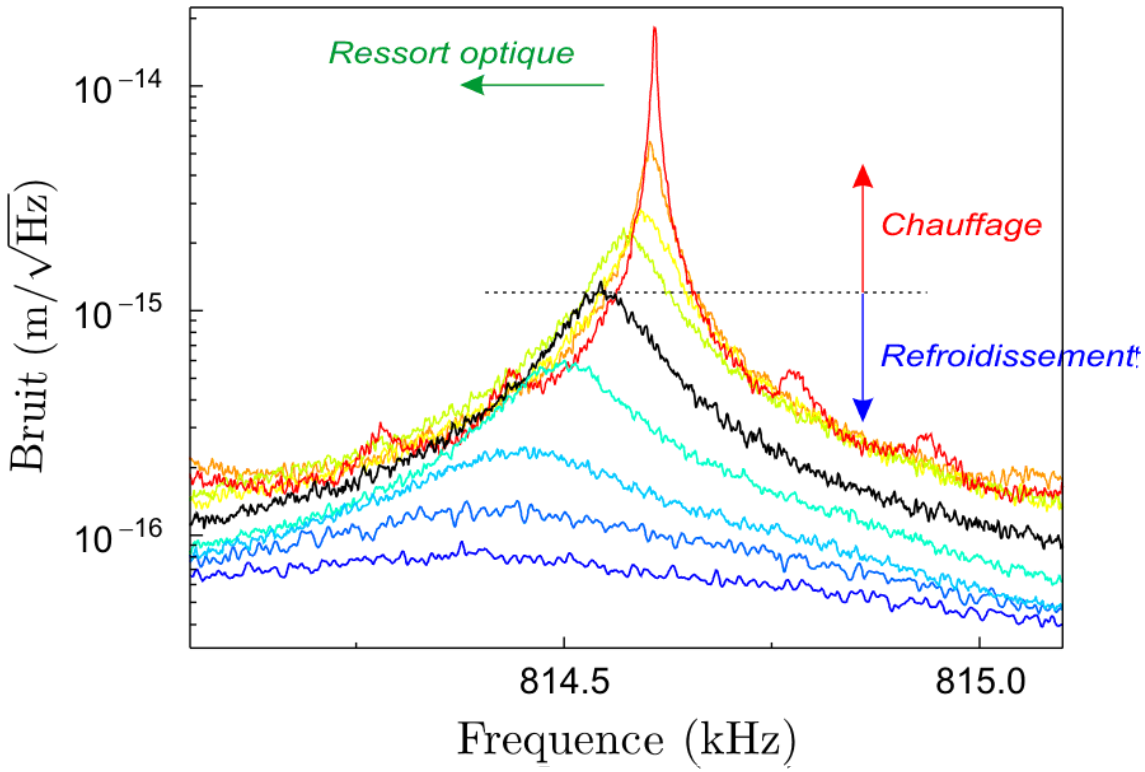

Dynamique de la cavité due au temps de stockage :

→ Force visqueuse : $F_{\text{rad}} \propto \frac{dP}{dL}\ \delta v$

→ Refroidissement (friction froide optique)

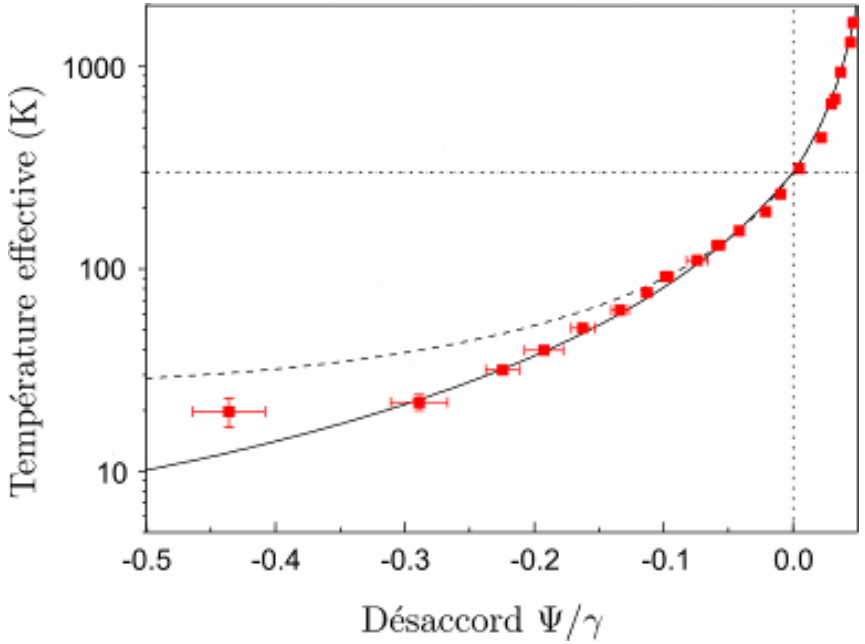
# Observation de la friction optique

## Spectres de bruit thermique




Désaccord négatif

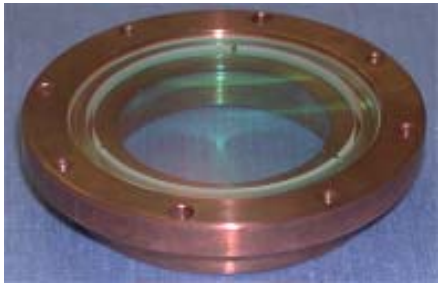
Désaccord positif

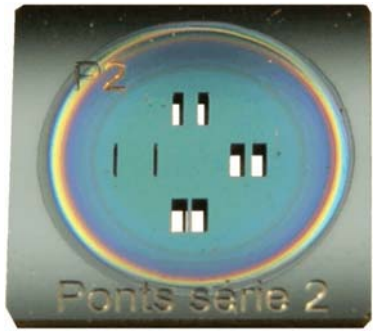



Refroidissement jusqu'à 10 K, chauffage jusqu'à 2000 K

*O. Arcizet et al, Nature **444**, 71 (2006)*

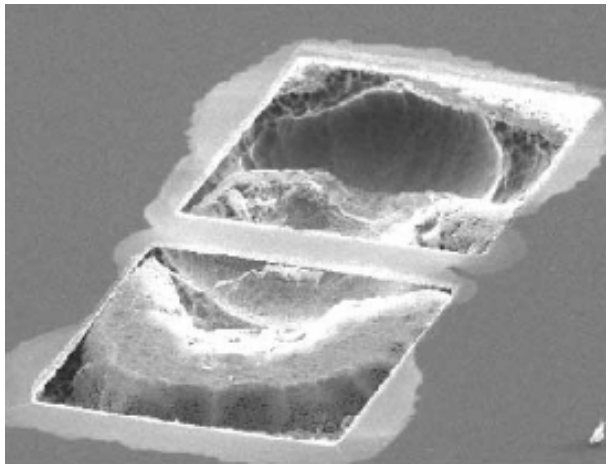
# Expériences dans le monde



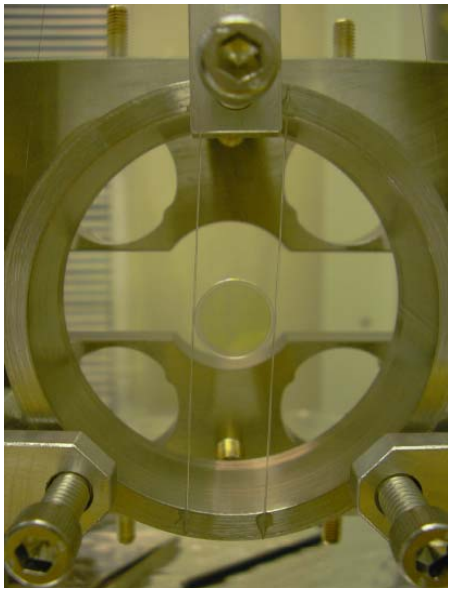


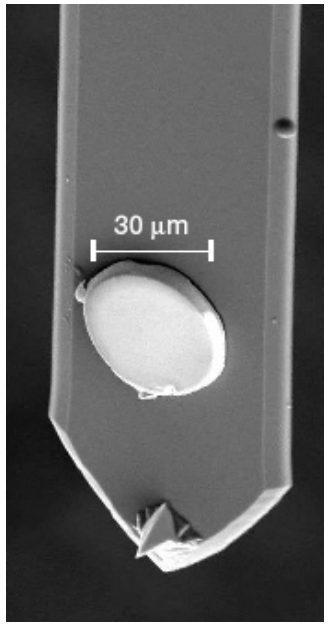

LKB

Vienne



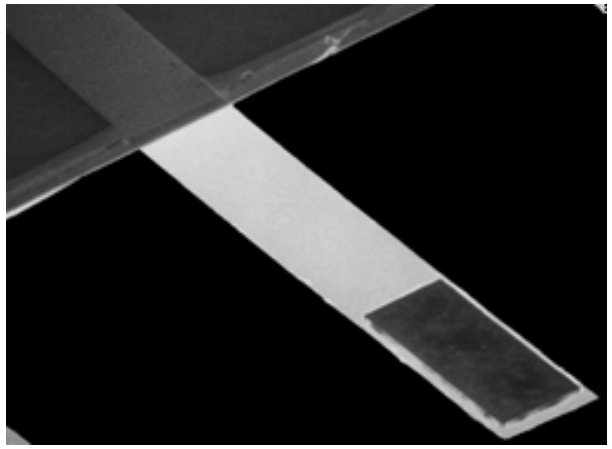
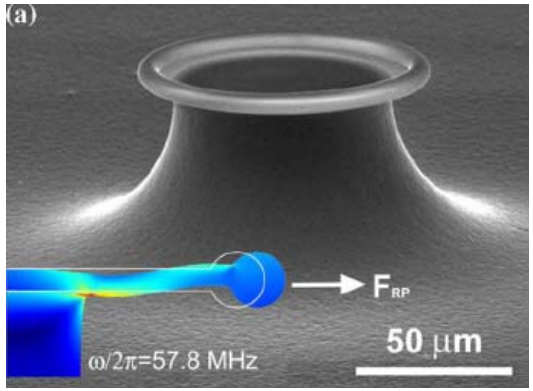
MIT






UCSB

Yale



Garching / Caltech