ÉCOLE DE PHYSIQUE
LES HOUCHES
Session XXIV

École Prédoctorale

Optique Quantique

*10-21 septembre 2007*

# Mesures à la limite quantique

~ 2ème cours ~

A. Heidmann

Laboratoire Kastler Brossel

Mesure et Bruits Fondamentaux

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

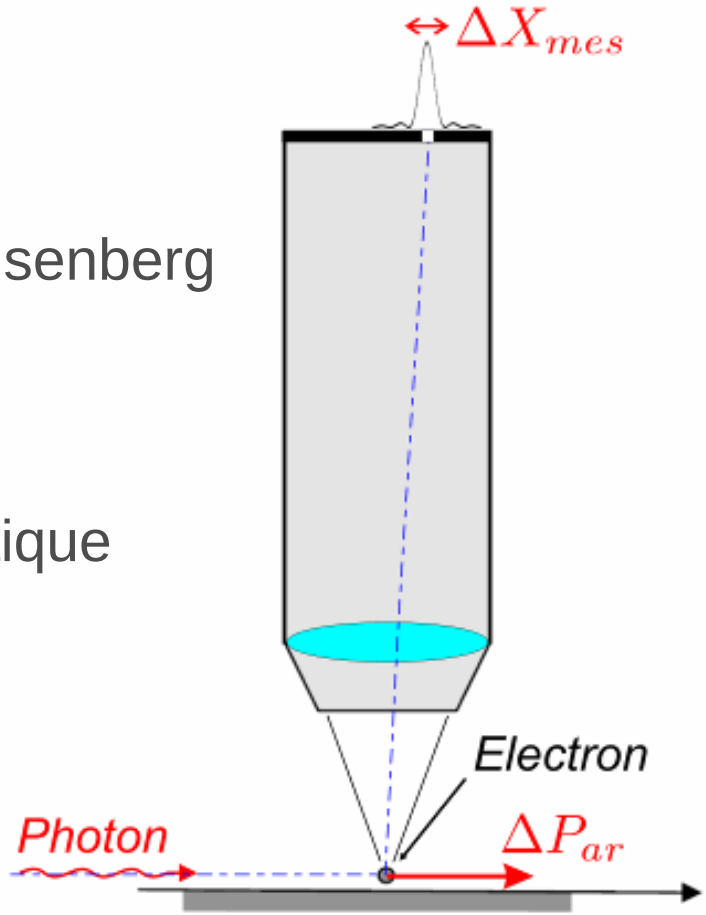
UNIVERSITE PIERRE & MARIE CURIE
LA SCIENCE A PARIS

# Résumé du 1er cours

- Les postulats de base de la mesure décrivent des mesures idéales
  - Mesure infiniment précise et action en retour minimale
  - Comment réaliser une mesure idéale ?
  - Interprétation physique de la réduction du paquet d'onde ?

- Description d'une expérience de pensée :
  le microscope de Heisenberg
  - Bruit dans la mesure et action en retour
  - Liés par une relation d'incertitude de Heisenberg
  - Processus irréversible

- Modélisation d'une mesure indirecte
  Couplage de l'objet avec une sonde quantique



# Plan du deuxième cours

## Exemple de mesure indirecte,
## Interprétation moderne de la réduction du paquet d'onde

- Exemple : vie et mort d'un photon

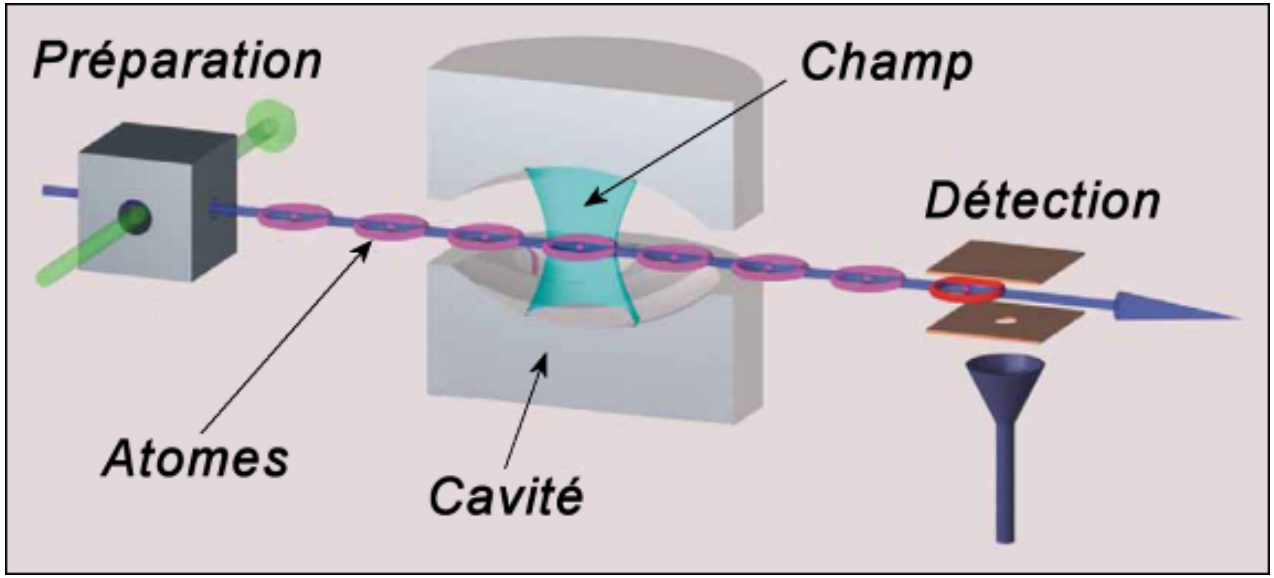
  mesure non destructive de l'énergie dans une cavité micro-onde

- Frontière classique – quantique dans la mesure

  Décohérence quantique par couplage avec l'environnement

# Exemple de mesure indirecte

## Mesure non destructive du nombre de photons dans une cavité



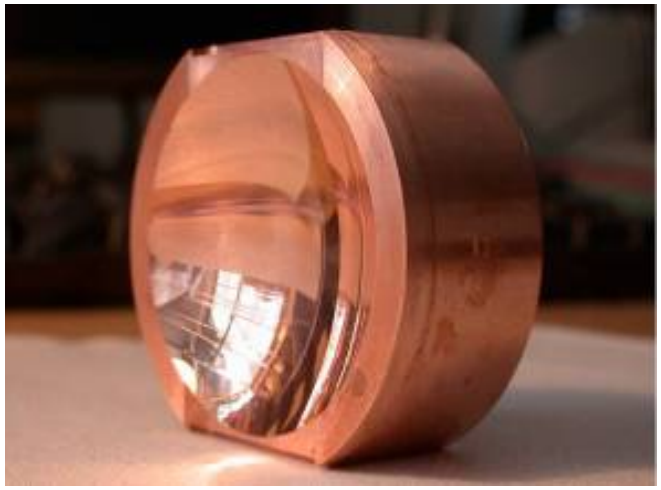

- La mesure est réalisée en envoyant un par un des atomes de Rydberg dans une cavité micro-onde

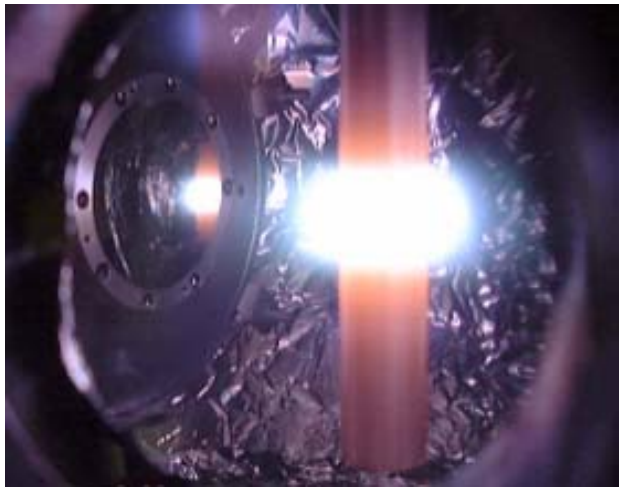
  Interaction non résonnante → Modification de l'état de l'atome sans changer le nombre de photons présents dans la cavité

- Les mesures successives des états des atomes permettent de suivre en temps réel l'évolution du nombre de photons

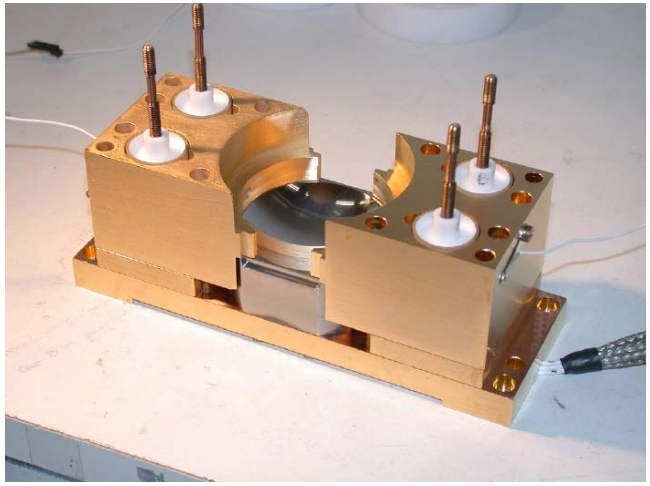
- Source : S. Gleyzes, …, M. Brune, J.-M. Raimond, S. Haroche, *Nature* **446**, 297 (2007)

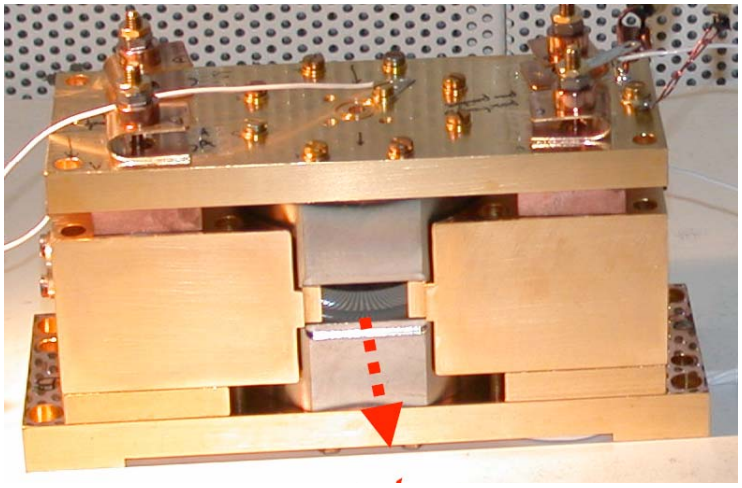
# Cavité micro-onde de très grande finesse





Dépôt de Niobium sur un substrat en cuivre de très faible rugosité (10 nm).
Cavité ouverte (pour laisser passer les atomes) à basse température (0.8 K)

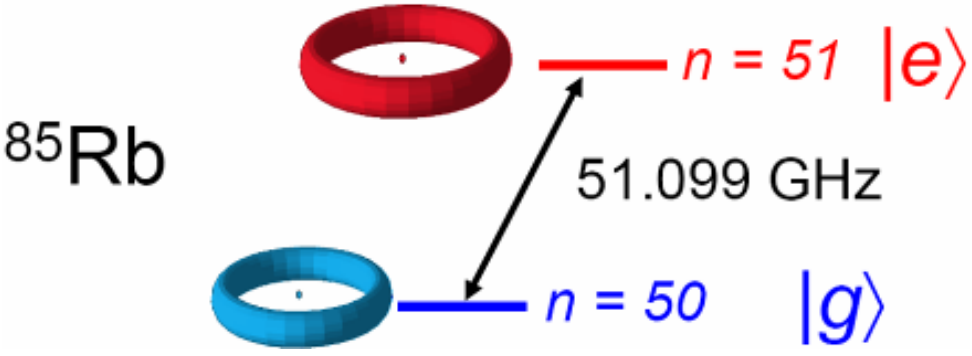


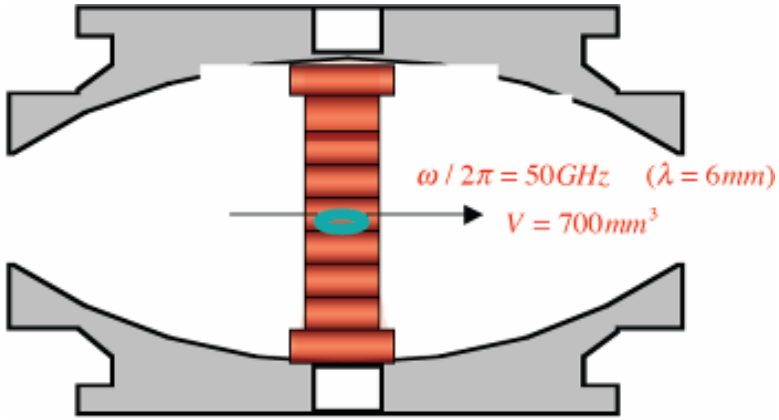


Durée de vie moyenne d'un photon = 0.13 s

→ Un photon effectue un milliard de réflexions sur les miroirs !

# Couplage atome de Rydberg - cavité




- Atomes circulaires
  $n$ large, $l = |m| = n - 1$
- Equivalent à un système à 2 niveaux
- Très grand dipôle électrique

$$D \approx q\, a_0\, n^2 \approx 2000\, q\, a_0$$

- Amplitude du champ du vide :

$$E_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 V}} \approx 1.5 \text{ mV/m}$$

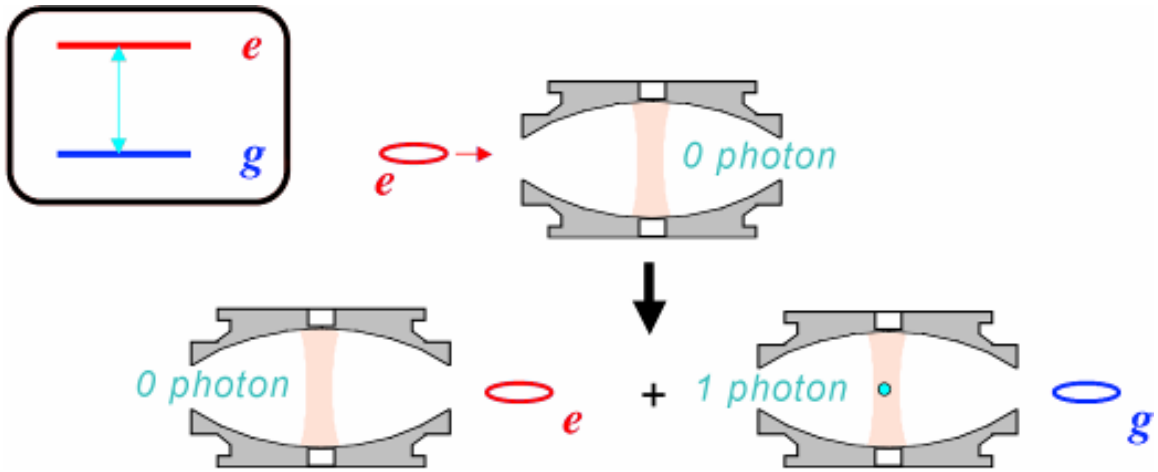
→ Fréquence de Rabi dans le vide :

$$\hbar\Omega_R = D.E_0 \approx 2\pi \times 50 \text{ kHz}$$

# Couplage résonnant : préparation de l'état

Processus d'émission spontanée d'un photon, suivi d'une réabsorption

→ Oscillation de Rabi



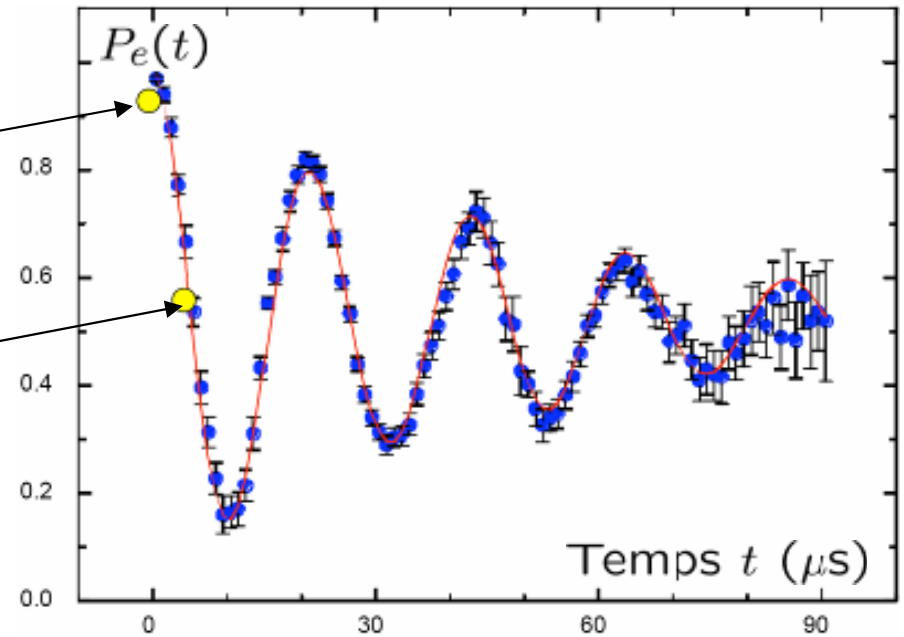

Etat à l'instant $t$ :

$$\cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)|g,1\rangle + \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)|e,0\rangle$$

Un pulse $\pi/2$ crée de l'intrication

$|e,0\rangle$

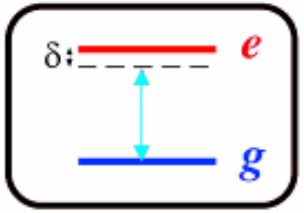
$|g,1\rangle + |e,0\rangle$

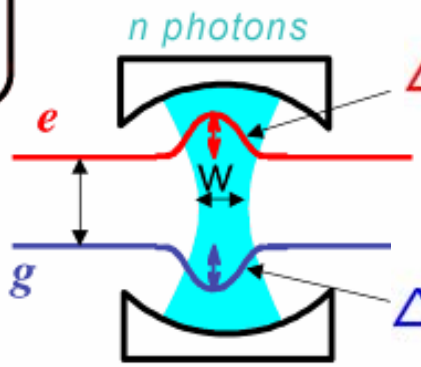



→ Avec un champ classique intense, un pulse $\pi/2$ crée un état $(|g\rangle + |e\rangle)$

# Couplage non résonnant : déphasages

L'atome ne peut pas absorber des photons, mais il subit un déplacement lumineux qui dépend de son état




$$\Delta\Omega_e = \frac{\Omega_R^2(n+1)}{4\delta}$$

$$\Delta\Omega_f = \frac{\Omega_R^2 n}{4\delta}$$

→ Déphasage entre les 2 états $|g\rangle$ et $|e\rangle$ subi à la traversée de la cavité :

Déplacement lumineux

Déplacement de Lamb (Lamb shift)

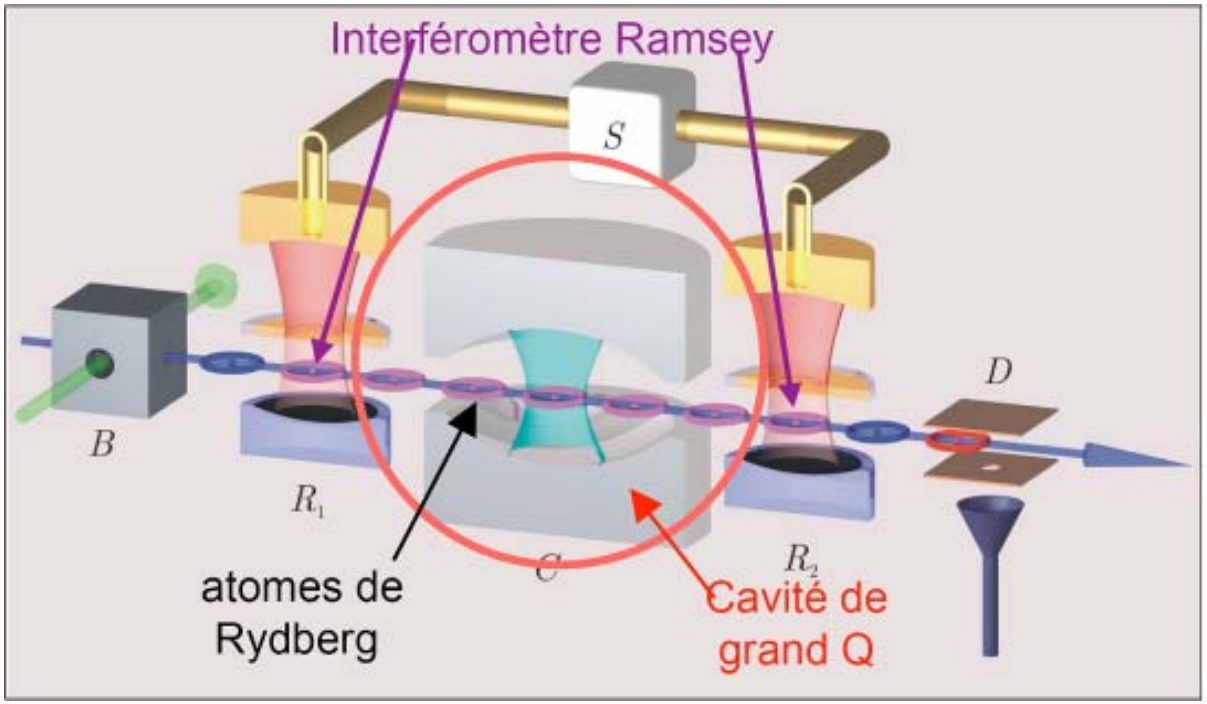
$$\Delta\Phi = \frac{\Omega_R^2\,(n+1/2)}{2\delta}\tau$$

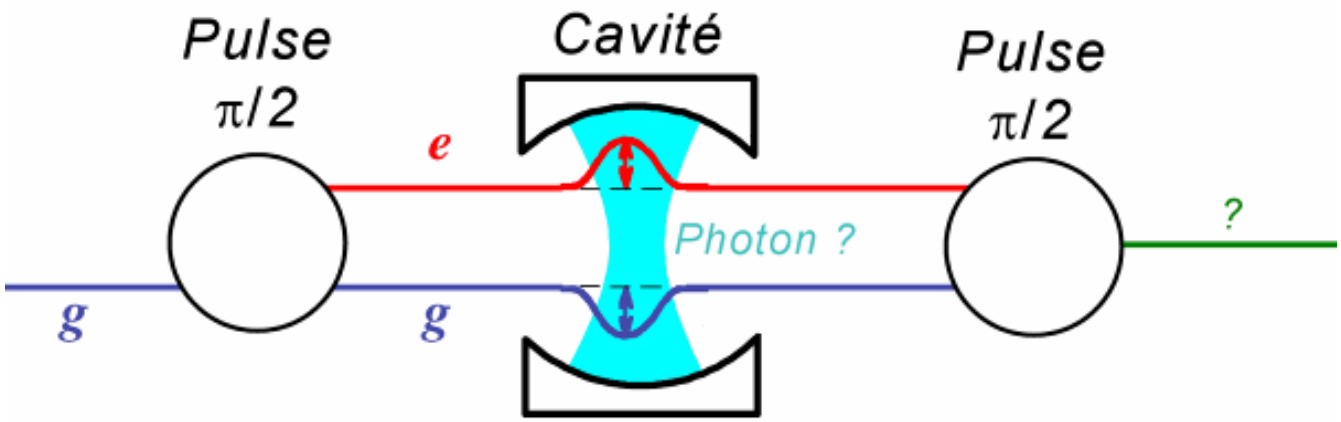
($\tau$ : temps d'interaction)

→ Le déphasage est égal à $\pi$ par photon si $\frac{\Omega_R^2\tau}{\delta} = 2\pi$

La mesure du déphasage fournit des informations sur le nombre de photons sans les perturber

# Montage : interféromètre de Ramsey




Préparation Couplage Détection

$$|g\rangle \rightarrow |g\rangle + |e\rangle \rightarrow |g\rangle + e^{i\Delta\Phi}|e\rangle \rightarrow \begin{cases} |e\rangle & \text{si } \Delta\Phi = \pi \\ |g\rangle & \text{si } \Delta\Phi = 0 \end{cases}$$

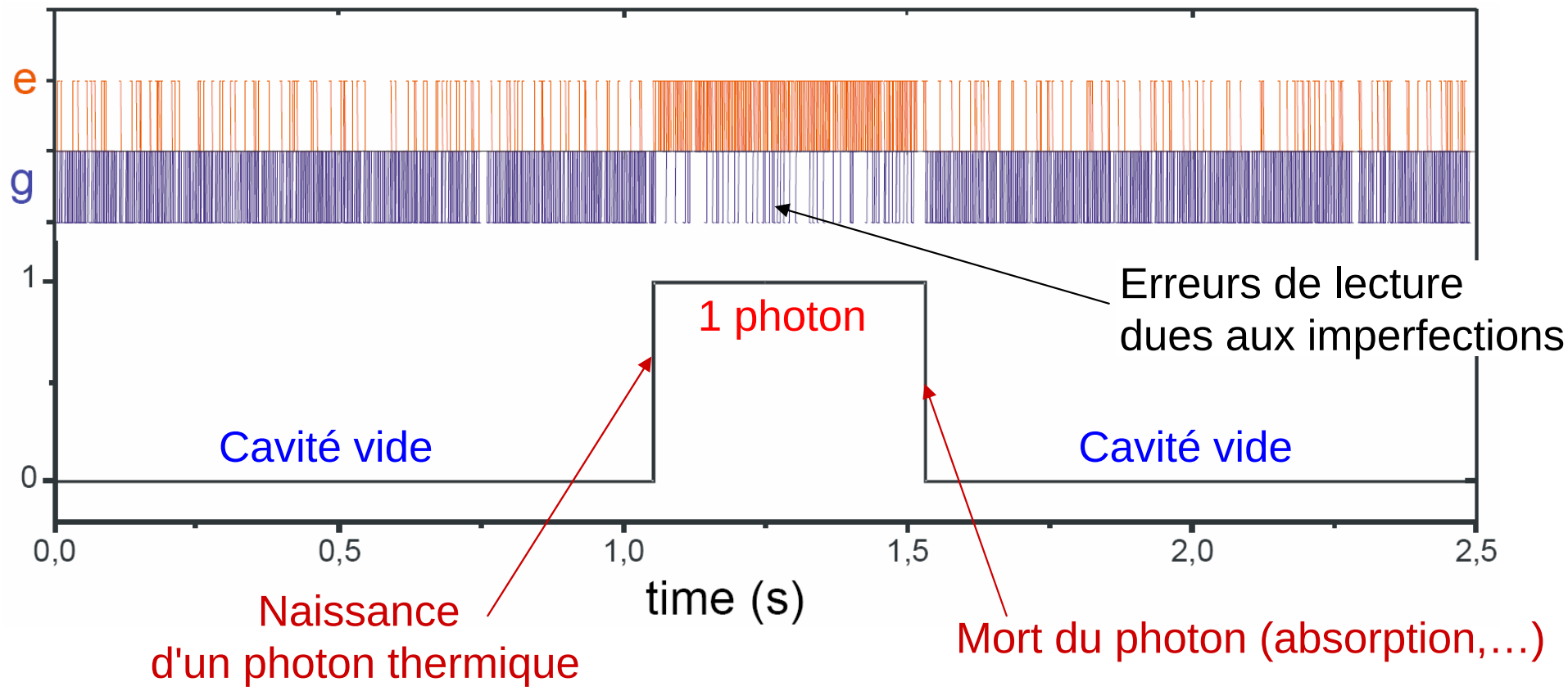
# Naissance et mort d'un photon

Environ 1000 atomes sont envoyés par seconde

→ Mesure répétée et non destructive des photons dans la cavité

La détection de l'état de l'atome à la sortie de l'interféromètre de Ramsey fournit le nombre (0 ou 1) de photon dans la cavité sans modifier ce nombre

A 0.8 K, le champ thermique correspond à 0.05 photon en moyenne



# Plan

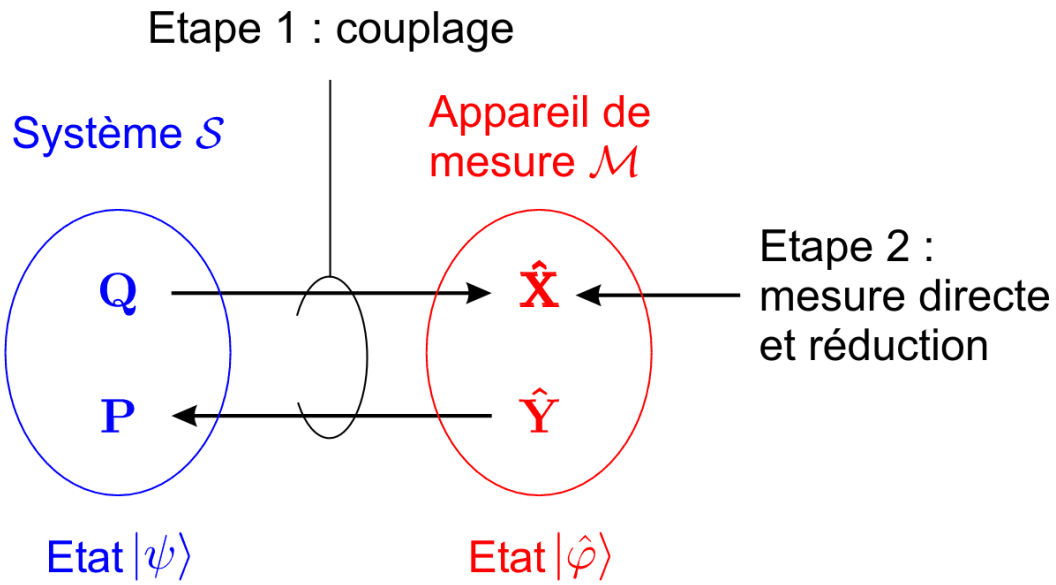
## Exemple de mesure indirecte,
## Interprétation moderne de la réduction du paquet d'onde

- Exemple : vie et mort d'un photon
  mesure non destructive de l'énergie dans une cavité micro-onde

- **Frontière classique – quantique dans la mesure**
  Décohérence quantique par couplage avec l'environnement

# Rappels sur la mesure indirecte

Couplage du système avec
une sonde quantique,
puis mesure idéale de la sonde




Vecteurs et états propres :

$$\mathbf{Q}\,|q\rangle = q\,|q\rangle \quad , \quad \hat{\mathbf{X}}\,|\hat{x}\rangle = \hat{x}\,|\hat{x}\rangle$$

Etat initial

$$\underbrace{\left(\int dq\, c_q\, |q\rangle\right)}_{|\psi\rangle} \otimes |\hat{\varphi}\rangle \longrightarrow$$

Etat couplé

$$\int dq\, c_q\, |q\rangle \otimes |\hat{\varphi}_q\rangle \longrightarrow$$

Mesure de $\hat{x}$

$$\underbrace{\left(\int dq\, c_q\, \langle\hat{x}|\hat{\varphi}_q\rangle\, |q\rangle\right)}_{\sqrt{\mathcal{P}(\hat{x})}\,|\psi_{\hat{x}}\rangle} \otimes |\hat{x}\rangle$$

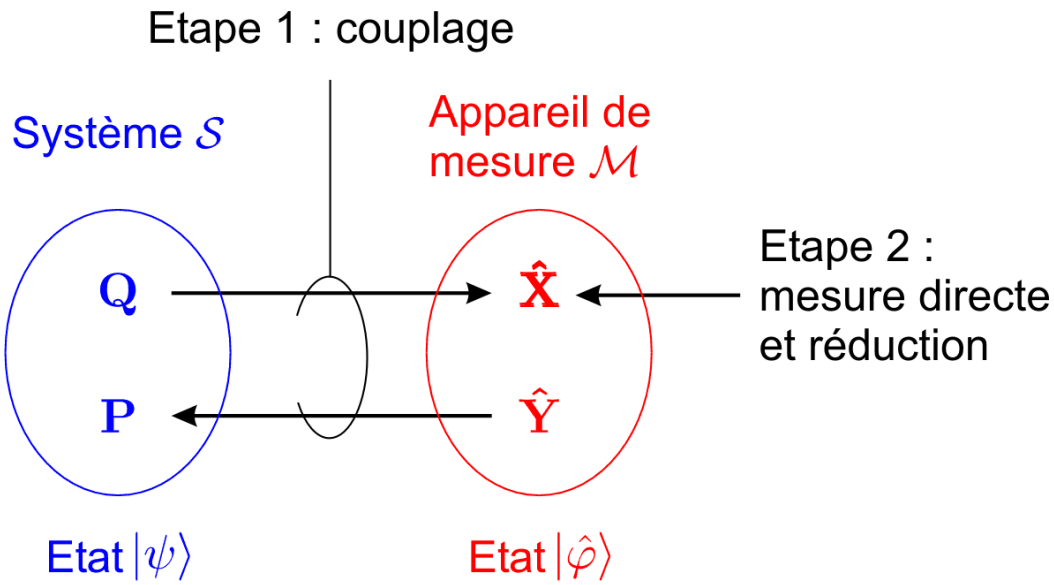
$|\hat{\varphi}_q\rangle = \exp\left(-i\eta\tau\, q\hat{\mathbf{Y}}/\hbar\right)|\hat{\varphi}\rangle$ est l'état de la sonde si le système est dans $|q\rangle$

$\mathcal{P}(\hat{x}) = \int dq\, |c_q|^2\, |\langle\hat{x}|\hat{\varphi}_q\rangle|^2$ est la probabilité de mesurer $\hat{x}$

# Rappels sur la mesure indirecte

## Mesure idéale :

Préparation de l'état initial de l'appareil de mesure dans un état propre de $\hat{\mathbf{X}}$ : $|\hat{\varphi}\rangle = |\hat{x} = 0\rangle$




Les états $|\hat{\varphi}_q\rangle$ sont alors états propres de $\hat{\mathbf{X}}$, obtenus par translation :

$$|\hat{\varphi}_q\rangle = |\hat{x} = \eta\tau q\rangle$$

Etat couplé

$$\int dq\, c_q\, |q\rangle \otimes |\hat{\varphi}_q\rangle \longrightarrow$$

La mesure de $|\hat{\varphi}_q\rangle$ réalise une mesure idéale de $|q\rangle$

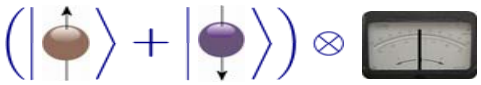
## Mesure non idéale :

Sinon, l'incertitude sur la mesure de $|\hat{\varphi}_q\rangle$ ( $\langle\hat{x}|\hat{\varphi}_q\rangle \neq 0$ pour différents $\hat{x}$ ) ajoute du bruit sur la mesure du système

# Réduction du paquet d'onde (mesure idéale)

Etat initial

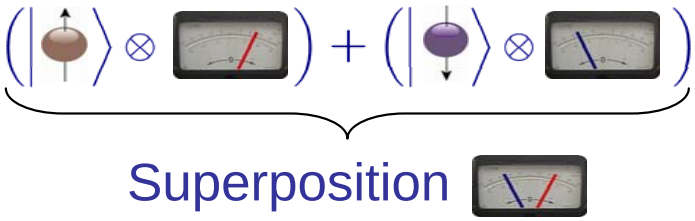
$$\left(\int dq\, c_q\, |q\rangle\right) \otimes |\widehat{\varphi}\rangle$$



$\longrightarrow$

Etat couplé

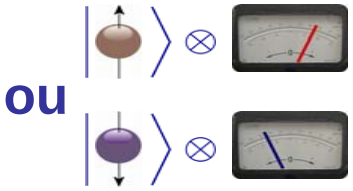
$$\int dq\, c_q\, |q\rangle \otimes |\widehat{\varphi}_q\rangle$$




$\longrightarrow$

Mesure de $|\widehat{\varphi}_q\rangle$

$$|q\rangle \otimes |\widehat{\varphi}_q\rangle$$




On ne peut pas faire l'économie du postulat de réduction du paquet d'onde (2ème étape), car :

- l'évolution du système couplé (1ère étape) obéit à l'équation de Shrödinger : elle est réversible et déterministe
- l'état couplé est non séparable : il présente des corrélations quantiques entre le système et l'appareil de mesure.

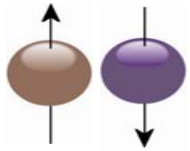
Le postulat de réduction du paquet d'onde permet de passer du monde quantique avec des superpositions de type chat de Schrödinger au monde classique où n'existent que des mélanges statistiques

# 2 mondes distincts…

Où se situe la frontière quantique - classique ?

# Où se situe la frontière quantique – classique ?

Système quantique



Appareil de mesure

Observateur

Univers

Ecole de Copenhague :

Une mesure fait intervenir un appareil de mesure macroscopique qui sort du cadre de la mécanique quantique. On doit appliquer le postulat de réduction à l'appareil.

Von Neumann, Wigner, …:

La conscience de l'observateur ne fait pas partie du champ d'investigation de la physique. Elle échappe au monde quantique et c'est elle qui applique la réduction.

Everett :

A chaque mesure, l'univers se scinde en autant d'univers parallèles qu'il existe de résultats possibles de la mesure.

Position de Schrödinger en 1926 :

" *If all this damned quantum jumping were really to stay,*
*I should be sorry I ever got involved with quantum theory* "

# Le problème du choix de la base de projection

Un même état couplé non séparable peut être décrit dans plusieurs bases distinctes

Exemple : spin ½ de vecteurs propres $|+\rangle$ , $|-\rangle$ selon un axe $Oz$, couplés aux états $\left|\widehat{\varphi}_+\right\rangle$ , $\left|\widehat{\varphi}_-\right\rangle$ de l'appareil de mesure.

Etat initial

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right) \otimes |\widehat{\varphi}\rangle \longrightarrow$$

Etat couplé

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|+, \widehat{\varphi}_+\right\rangle + \left|-, \widehat{\varphi}_-\right\rangle\right)$$

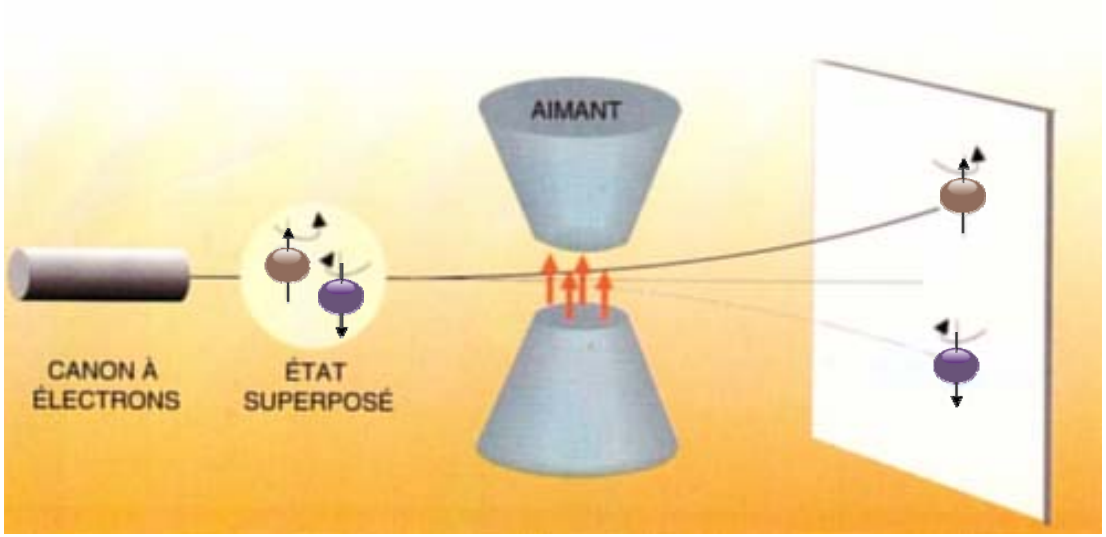
Si on choisit la base du spin selon l'axe $Ox$ : $\begin{cases} |\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right) \\ |\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle - |-\rangle\right) \end{cases}$

L'état couplé peut s'écrire : $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\rightarrow, \widehat{\varphi}_\rightarrow\rangle + |\leftarrow, \widehat{\varphi}_\leftarrow\rangle\right)$

avec $|\widehat{\varphi}_\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\widehat{\varphi}_+\right\rangle + \left|\widehat{\varphi}_-\right\rangle\right)$ , $|\widehat{\varphi}_\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\widehat{\varphi}_+\right\rangle - \left|\widehat{\varphi}_-\right\rangle\right)$

$\rightarrow$ Quelle est la base choisie par la réduction du paquet d'onde ?

# Exemple : appareil de Stern – Gerlach




Les taches sur l'écran correspondent aux états $\left|\widehat{\varphi}_+\right\rangle$, $\left|\widehat{\varphi}_-\right\rangle$ couplés par interaction avec le champ magnétique aux états $|+\rangle$, $|-\rangle$ du spin

Pourquoi ne peut-on voir classiquement sur l'écran que des taches distinctes (états $\left|\widehat{\varphi}_+\right\rangle$, $\left|\widehat{\varphi}_-\right\rangle$),
et jamais des superpositions de ces taches (états $|\widehat{\varphi}_\rightarrow\rangle$ , $|\widehat{\varphi}_\leftarrow\rangle$ ) ?

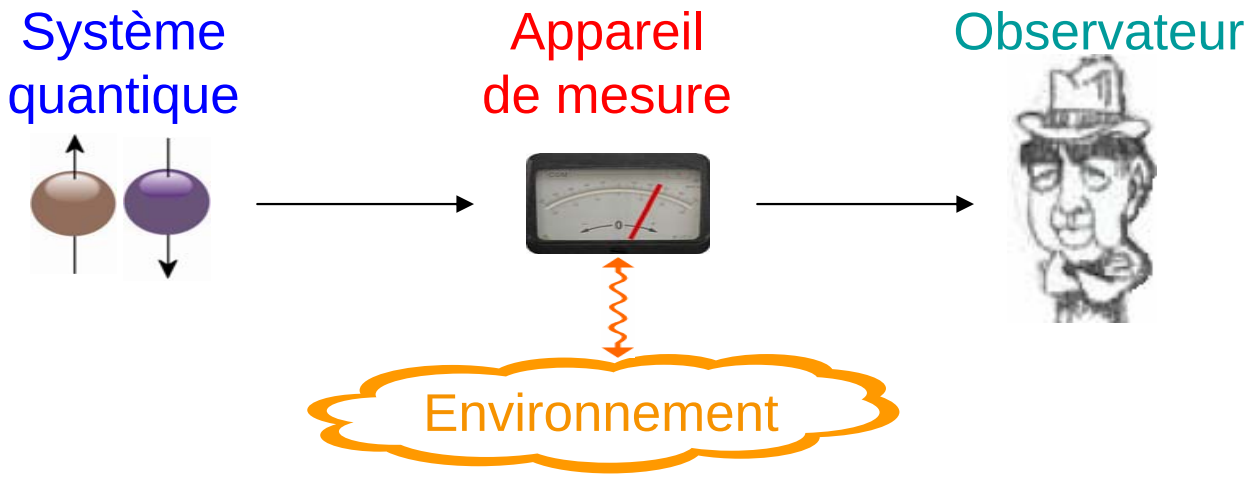
Pourquoi la réduction du paquet d'onde projette sur la base $\left|\widehat{\varphi}_+\right\rangle$, $\left|\widehat{\varphi}_-\right\rangle$ et non sur la base $|\widehat{\varphi}_\rightarrow\rangle$ , $|\widehat{\varphi}_\leftarrow\rangle$ ?

# Couplage avec l'environnement

Les différentes difficultés :

- interprétation physique de la réduction du paquet d'onde
- où placer la frontière quantique – classique
- choix de la base de projection

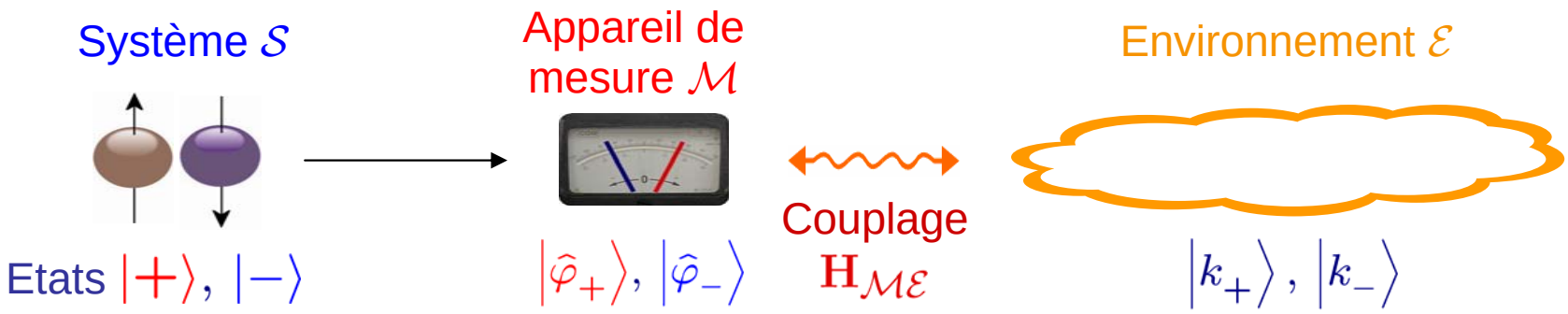
peuvent être résolues en considérant le couplage avec l'environnement.




Le système quantique est bien isolé en général du monde extérieur (excepté par son couplage à l'appareil de mesure).

L'appareil de mesure est un objet macroscopique couplé à un environnement dans un état indéterminé. Par exemple, une aiguille est couplée à l'air et se trouve dans un équilibre thermodynamique classique

# Couplage avec l'environnement




On s'intéresse toujours à un spin ½ couplé aux états $|\widehat{\varphi}_+\rangle$, $|\widehat{\varphi}_-\rangle$ d'un appareil de mesure

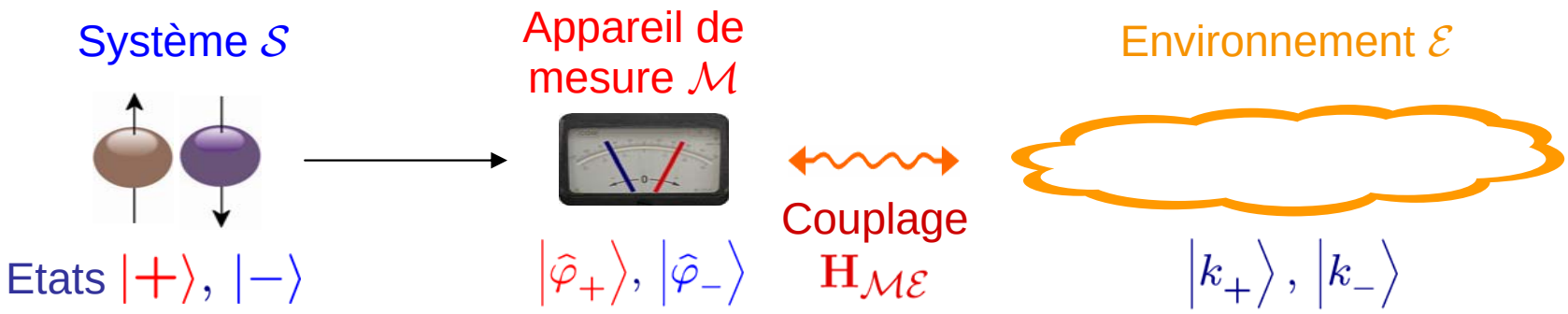
L'environnement est décrit par un ensemble de systèmes à 2 niveaux $|k_+\rangle$, $|k_-\rangle$ couplés à l'appareil par le Hamiltonien :

$$\mathbf{H}_{\mathcal{ME}} = \sum_k \hbar g_k \left\{ |\widehat{\varphi}_+\rangle\langle\widehat{\varphi}_+| - |\widehat{\varphi}_-\rangle\langle\widehat{\varphi}_-| \right\} \otimes \left\{ |k_+\rangle\langle k_+| - |k_-\rangle\langle k_-| \right\}$$

→ Le couplage est diagonal dans les bases considérées :

$$\mathbf{H}_{\mathcal{ME}} |\widehat{\varphi}_\epsilon, k_{\epsilon'}\rangle = \epsilon\epsilon' \hbar g_k |\widehat{\varphi}_\epsilon, k_{\epsilon'}\rangle \qquad (\epsilon, \epsilon' = \pm 1)$$

# Couplage avec l'environnement




Etat initial : $(\alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle) \otimes |\widehat{\varphi}\rangle \otimes |\mathcal{E}_0\rangle$

avec $|\mathcal{E}_0\rangle = \prod_k \left(\alpha_k \left|k_+\right\rangle + \beta_k \left|k_-\right\rangle\right)$

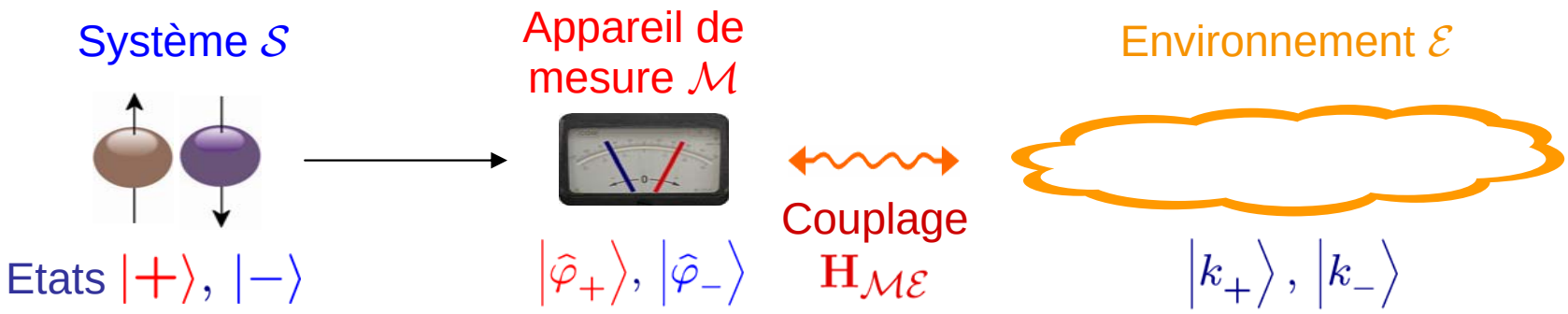
Etat après l'interaction $\mathcal{S} - \mathcal{M}$ : $\left(\alpha \left|+, \widehat{\varphi}_+\right\rangle + \beta \left|-, \widehat{\varphi}_-\right\rangle\right) \otimes |\mathcal{E}_0\rangle$

Interaction entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{E}$ pendant un temps $t$ :

$$|\psi_{\mathcal{SME}}(t)\rangle = \alpha \left|+, \widehat{\varphi}_+, \mathcal{E}_+(t)\right\rangle + \beta \left|-, \widehat{\varphi}_-, \mathcal{E}_-(t)\right\rangle$$

avec $|\mathcal{E}_\epsilon(t)\rangle = \prod_k \left(\alpha_k\, e^{-i\epsilon\, g_k t} \left|k_+\right\rangle + \beta_k\, e^{i\epsilon\, g_k t} \left|k_-\right\rangle\right)$

# Sélection de la base de projection




$$\boxed{|\psi_{\mathcal{S}\mathcal{M}\mathcal{E}}(t)\rangle = \alpha\,|+,\,\widehat{\varphi}_+,\,\mathcal{E}_+(t)\rangle + \beta\,|-,\,\widehat{\varphi}_-,\,\mathcal{E}_-(t)\rangle}$$

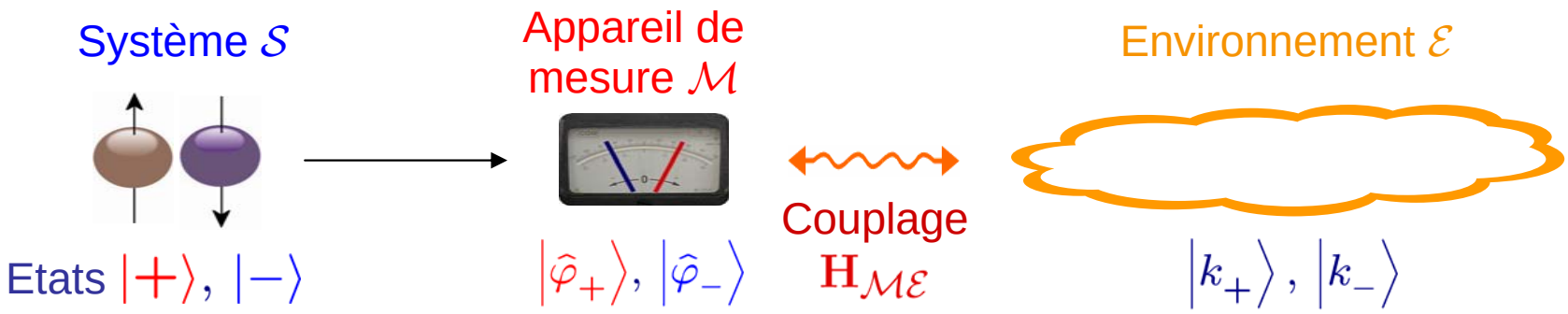
Création de corrélations entre l'appareil et l'environnement, mais les corrélations entre le système et l'appareil ne sont pas modifiées.

Par contre ces corrélations sont brouillées dans une autre base des états du système et de l'appareil :

$$\begin{aligned}|\psi_{\mathcal{S}\mathcal{M}\mathcal{E}}(t)\rangle \;=\; & |\rightarrow\rangle \otimes \left(\alpha\,|\widehat{\varphi}_+,\,\mathcal{E}_+(t)\rangle + \beta\,|\widehat{\varphi}_-,\,\mathcal{E}_-(t)\rangle\right)/\sqrt{2} \\ & + |\leftarrow\rangle \otimes \left(\alpha\,|\widehat{\varphi}_+,\,\mathcal{E}_+(t)\rangle - \beta\,|\widehat{\varphi}_-,\,\mathcal{E}_-(t)\rangle\right)/\sqrt{2}\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Les états couplés aux états de spin $|\rightarrow\rangle$ , $|\leftarrow\rangle$ ne sont plus des états purs de l'appareil mais des états intriqués avec l'environnement

# Destruction des cohérences quantiques




$$\boxed{|\psi_{\mathcal{S}\mathcal{M}\mathcal{E}}(t)\rangle = \alpha\,|+,\,\widehat{\varphi}_+,\,\mathcal{E}_+(t)\rangle + \beta\,|-,\,\widehat{\varphi}_-,\,\mathcal{E}_-(t)\rangle}$$

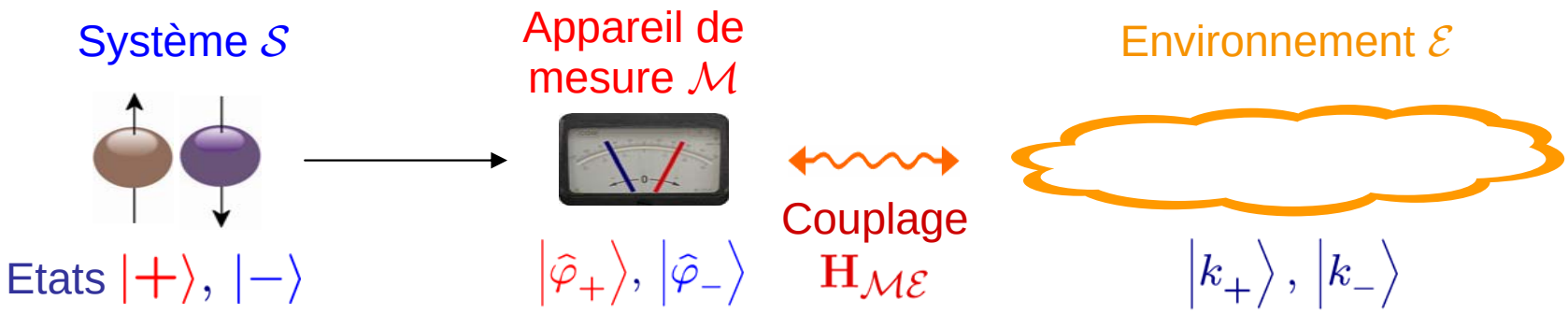
Si on ne s'intéresse qu'au système $\mathcal{S}$ et à l'appareil de mesure $\mathcal{M}$, l'état final est obtenu en prenant la trace sur l'environnement $\mathcal{E}$ :

$$\rho_{\mathcal{S}\mathcal{M}}(t) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}\left(|\psi_{\mathcal{S}\mathcal{M}\mathcal{E}}(t)\rangle\langle\psi_{\mathcal{S}\mathcal{M}\mathcal{E}}(t)|\right)$$

Dans la base $\left\{|+,\,\widehat{\varphi}_+\rangle,\,|-,\,\widehat{\varphi}_-\rangle\right\}$ : $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{M}}(t) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* z(t) \\ \alpha^*\beta z^*(t) & |\beta|^2 \end{pmatrix}$

avec $z(t) = \langle\mathcal{E}_-(t)|\mathcal{E}_+(t)\rangle$ et $\langle\mathcal{E}_+(t)|\mathcal{E}_+(t)\rangle = \langle\mathcal{E}_-(t)|\mathcal{E}_-(t)\rangle = 1$

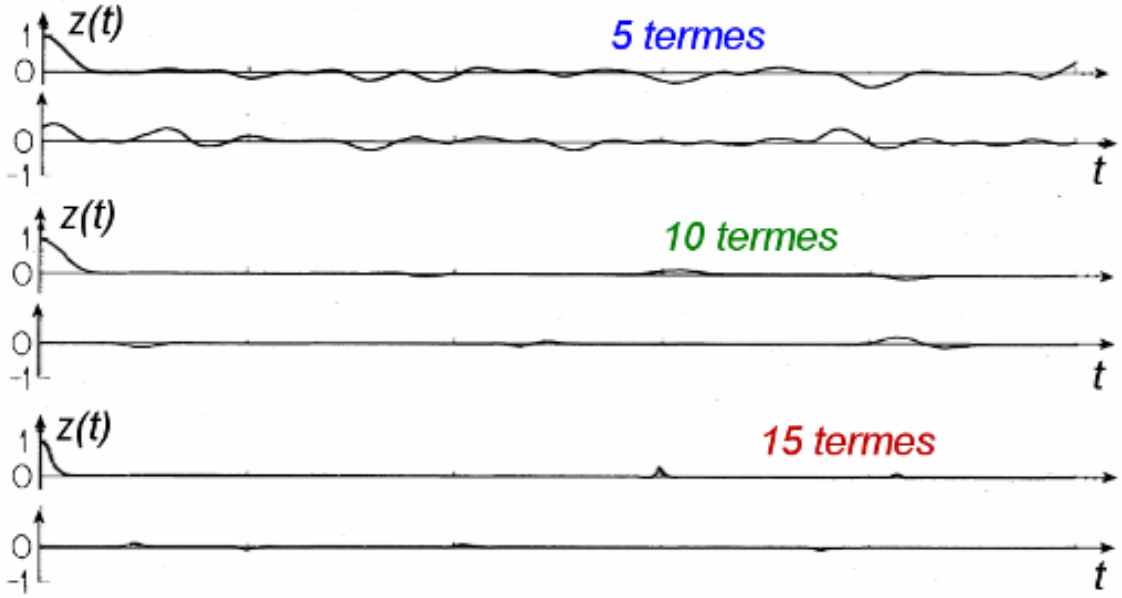
# Destruction des cohérences quantiques



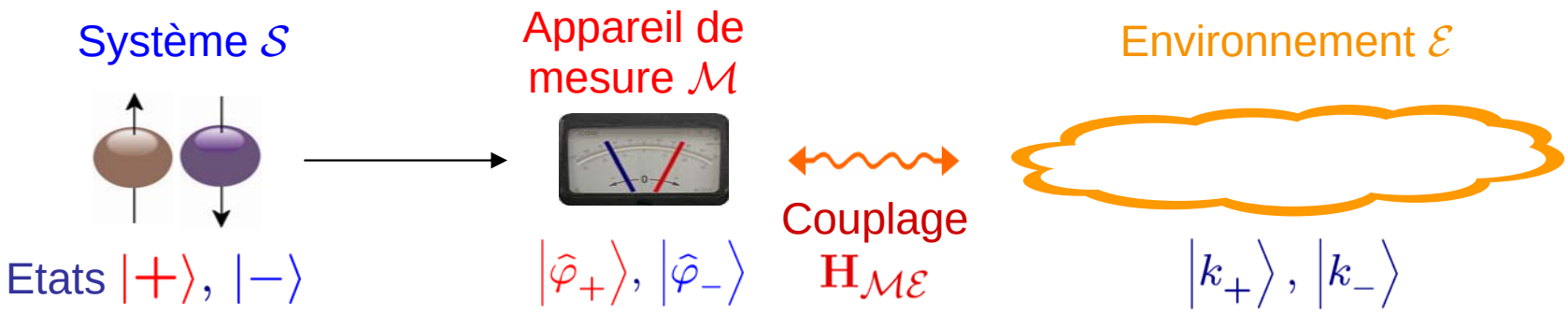

$$z(t) = \langle \mathcal{E}_-(t) | \mathcal{E}_+(t) \rangle = \prod_k \left( |\alpha_k|^2 \, e^{-2i\, g_k t} + |\beta_k|^2 \, e^{2i\, g_k t} \right)$$

$z(t)$ est le produit d'un grand nombre de facteurs de module < 1 sauf en $t$ = 0.

Si les fréquences $g_k$ sont réparties au hasard sur un intervalle $\Delta$, $z(t)$ tend vers 0 en un temps $1/\Delta$



# Destruction des cohérences quantiques




Au bout d'un temps très court, $z(t) \approx 0$ et l'état de $\mathcal{S}$ + $\mathcal{M}$ est donné par :

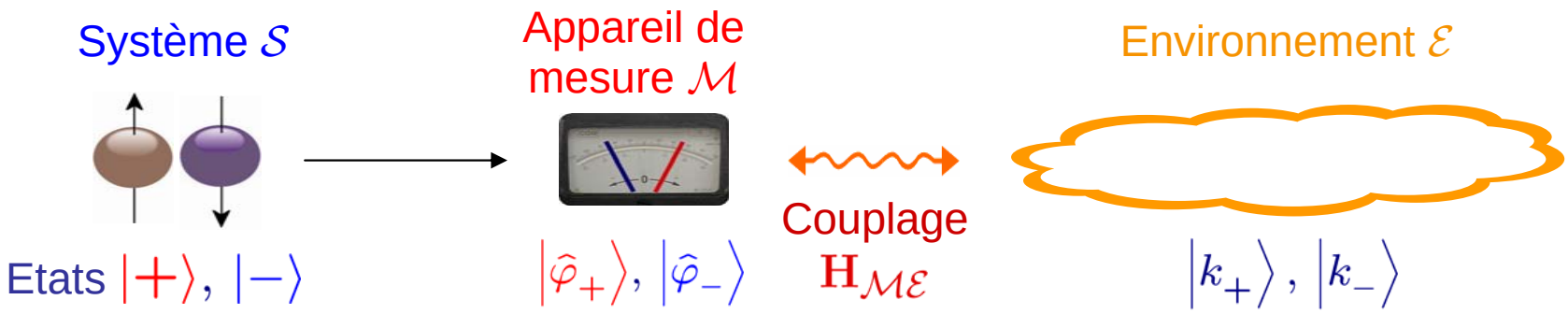
$$\rho_{\mathcal{SM}}(t) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix}$$

→ Mélange statistique des états $|+, \hat{\varphi}_+\rangle$, $|-, \hat{\varphi}_-\rangle$ avec des poids $|\alpha|^2$, $|\beta|^2$

$$\rho_{\mathcal{SM}}(t) = |\alpha|^2 |+, \hat{\varphi}_+\rangle\langle +, \hat{\varphi}_+| \; + \; |\beta|^2 |-, \hat{\varphi}_-\rangle\langle -, \hat{\varphi}_-|$$

Les cohérences quantiques entre états différents dans la base propre de $\mathcal{S}$ + $\mathcal{M}$ ont été détruites par le couplage avec l'environnement

# Conséquences pour la mesure




$$\boxed{\rho_{\mathcal{SM}}(t) = |\alpha|^2 \left|+, \widehat{\varphi}_+\right\rangle\left\langle+, \widehat{\varphi}_+\right| \; + \; |\beta|^2 \left|-, \widehat{\varphi}_-\right\rangle\left\langle-, \widehat{\varphi}_-\right|}$$

Règles de supersélection : l'interaction de l'appareil $\mathcal{M}$ avec l'environnement empêche $\mathcal{M}$ d'être dans une superposition des états $\left|\widehat{\varphi}_\pm\right\rangle$

$\mathcal{M}$ acquiert un comportement classique : seuls les états $\left|\widehat{\varphi}_\pm\right\rangle$ sont accessibles

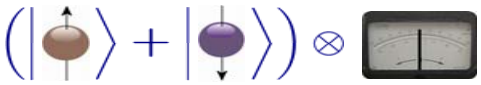
$\rightarrow$ La seule base de projection possible est la base $\left|\widehat{\varphi}_\pm\right\rangle$, dans laquelle le couplage avec l'environnement est diagonal

$\rightarrow$ Le passage d'un cas pur à un mélange statistique est un processus irréversible (perte d'information) qui réalise la mesure des états $|\pm\rangle$ du système

# Mesure idéale

Etat initial

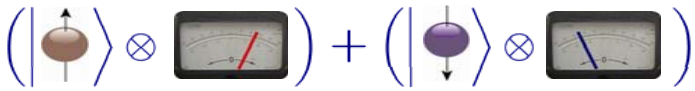
$$\left(\int dq\, c_q\, |q\rangle\right) \otimes |\widehat{\varphi}\rangle$$



$\longrightarrow$

Etat couplé $\mathcal{S}$ - $\mathcal{M}$

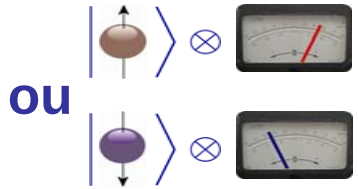
$$\int dq\, c_q\, |q, \widehat{\varphi}_q\rangle$$



$\longrightarrow$

Couplage avec $\mathcal{E}$

$$\rho = \sum_q |c_q|^2\, |q, \widehat{\varphi}_q\rangle\, \langle q, \widehat{\varphi}_q|$$



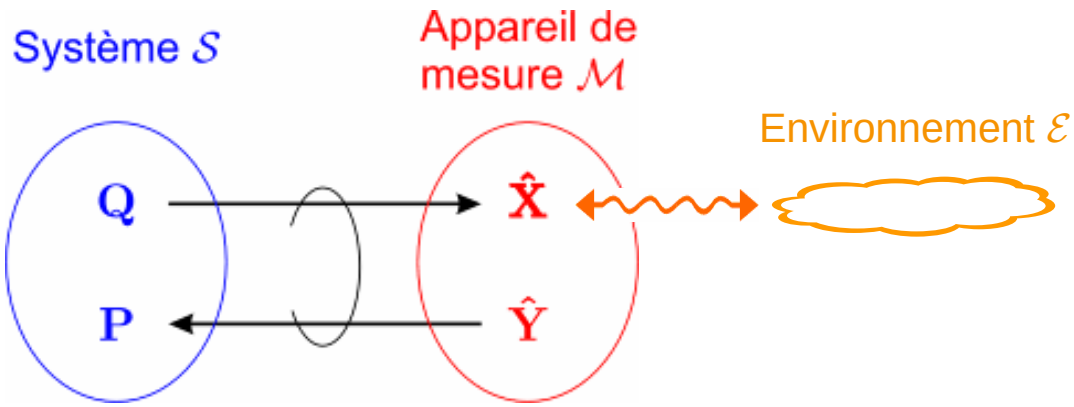

Sans faire appel au postulat de réduction du paquet d'onde, l'état après interaction avec l'environnement apparaît comme un mélange statistique d'états corrélés du système et de l'appareil

$\rightarrow$ Les résultats de la mesure correspondent aux valeurs propres $q$ du système avec des probabilités égales à $|c_q|^2$

$\rightarrow$ L'état du système après la mesure est décrit comme un mélange statistique des états possibles $|q\rangle$ du système après la mesure, corrélés aux états classiques correspondants $|\widehat{\varphi}_q\rangle$ de l'appareil

# Mesure non idéale

Les états $|\widehat{\varphi}_q\rangle$ ne sont plus nécessairement états propres de $\widehat{\mathbf{X}}$




On prend un couplage avec l'environnement diagonal dans la base des vecteurs propres $|\widehat{x}\rangle$ de $\widehat{\mathbf{X}}$

On écrit l'état couplé dans la base $|\widehat{x}\rangle$ :

Etat couplé $\mathcal{S}$ - $\mathcal{M}$ : $\int dq\, c_q\, |q, \widehat{\varphi}_q\rangle = \int d\widehat{x} \underbrace{\left(\int dq\, c_q\, \langle \widehat{x}|\widehat{\varphi}_q\rangle\, |q\rangle\right)}_{\sqrt{\mathcal{P}(\widehat{x})}\,|\psi_{\widehat{x}}\rangle} \otimes |\widehat{x}\rangle$

$\sqrt{\mathcal{P}(\widehat{x})}\,|\psi_{\widehat{x}}\rangle$ : état après réduction du paquet d'onde

→ Couplage à l'environnement :

$$\rho_{\mathcal{S}\mathcal{M}}(t) = \int d\widehat{x}\, \mathcal{P}(\widehat{x})\, |\psi_{\widehat{x}}\rangle\, \langle\psi_{\widehat{x}}|$$

On retrouve le bruit dans la mesure décrit par la probabilité $\mathcal{P}(\widehat{x})$ et l'action en retour décrite par l'état $|\psi_{\widehat{x}}\rangle$