ÉCOLE DE PHYSIQUE
LES HOUCHES
Session XXIV



École Prédoctorale

Optique Quantique

10-21 septembre 2007

Mesures à la limite quantique

~ 3ème cours ~

A. Heidmann

Laboratoire Kastler Brossel





CNRS CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE PIERRE & MARIE CURIE
LA SCIENCE A PARIS

Plan du troisième cours

Mesures en continu, mesure de position

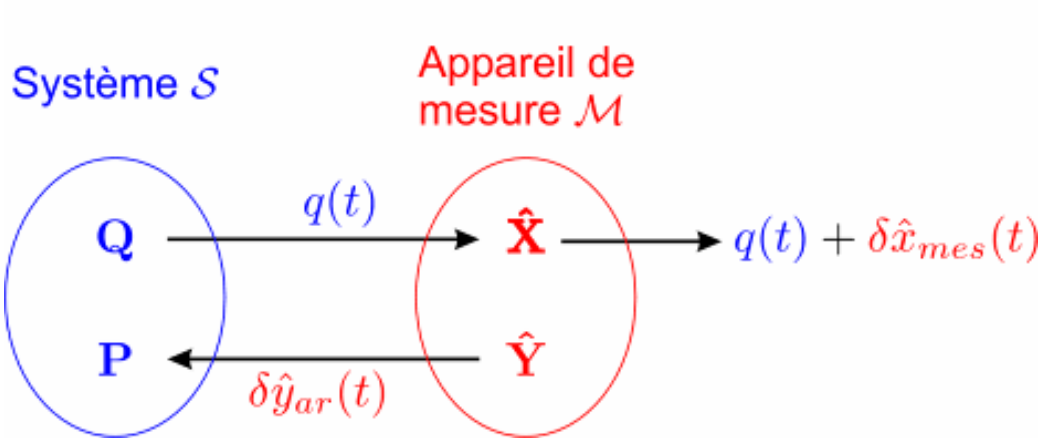
- Mesures en continu – théorie de la photodétection – approche semi-classique du bruit quantique
  - Mesure de l'intensité ou d'une quadrature d'un champ lumineux
  - Théorie d'entrée-sortie et description semi-classique basée sur la distribution de Wigner

- Réflexion sur un miroir mobile
  - Mesure optique de position, limite quantique
  - Redistribution du flux de photon par effet de retard
  - Comparaison entre mesures destructive et non destructive

Mesures continues

Concepts théoriques développés à partir des années 60 suite à la réalisation d'expériences de mesure fonctionnant au niveau quantique

Mesures continues considérées comme limite de séquences de mesures discrètes



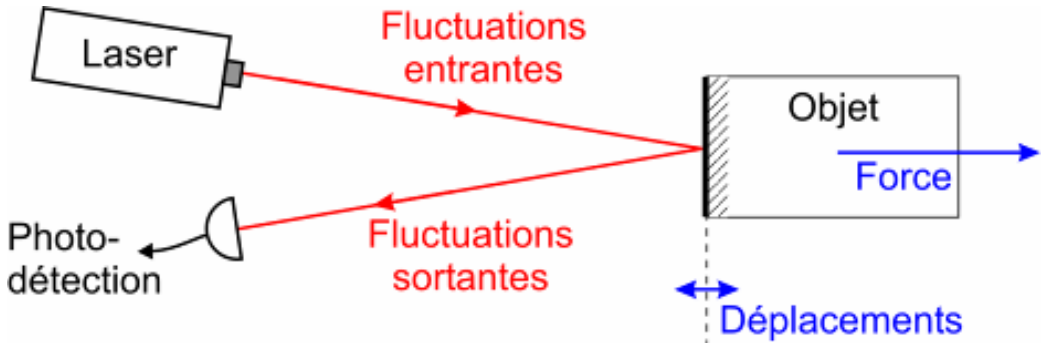
- Bruit de la mesure et action en retour

- Pour un système isolé, il est possible de *purifier* l'état quantique en *localisant* le système par les résultats de la mesure continue

  Concepts non étudiés dans ce cours

- Développement de modèles théoriques d'entrée – sortie

  Exemple : mesure de force en détectant optiquement les déplacements d'un objet

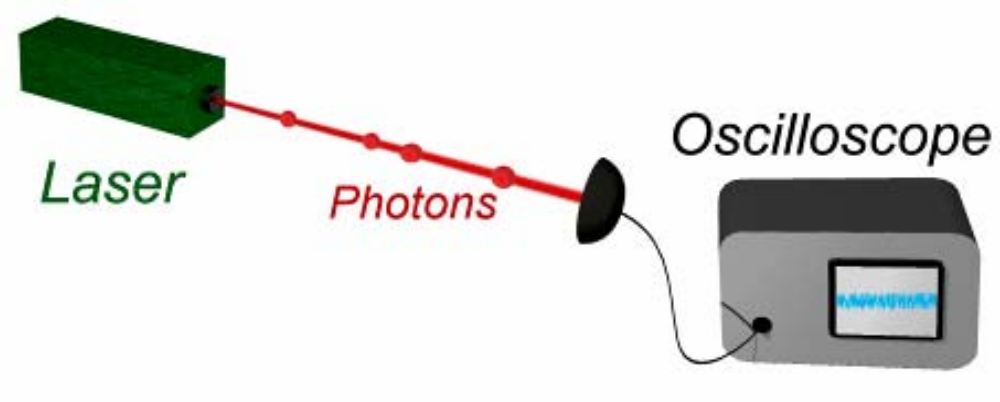


Photodétection et bruit de photon

Détection du flux de photon d'un faisceau lumineux
par transformation en courant électrique
(photo-multiplicateurs, photodiodes,…)







Interprétation corpusculaire de la photodétection :

Chaque photon détecté correspond à un évènement discret localisé dans le temps

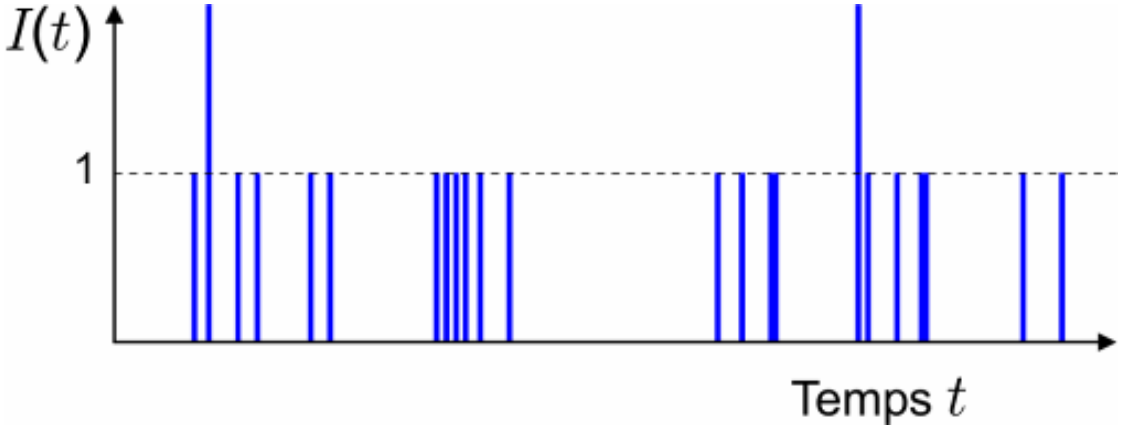
→ Ensemble d'évènements temporels $\{t_k\}$

Intensité instantanée : $I(t) = \sum_k \delta(t - t_k)$

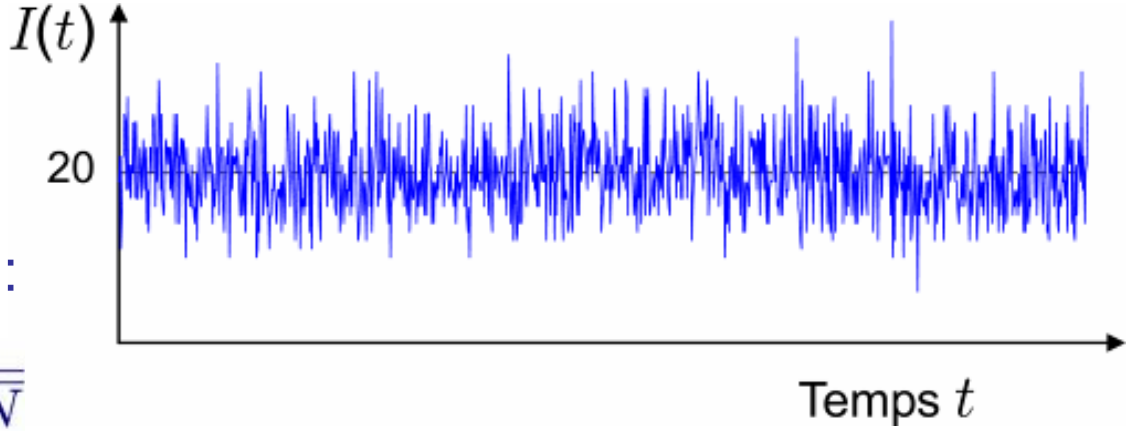
Photodétection et bruit de photon

Les photons émis par un laser ont une répartition aléatoire dans le temps (loi de Poisson)

Faisceau peu intense
(largeur de canal $< \overline{\tau}_{ph}$)



Faisceau intense
(largeur de canal $> \overline{\tau}_{ph}$)



Nombre N de photon par canal :

$$\mathcal{P}(N) = \frac{\overline{N}^N}{N!} e^{-N} \rightarrow \Delta N = \sqrt{\overline{N}}$$

Photodétection et bruit de photon

Caractérisation du bruit de photon :

Pour un processus stationnaire, on définit

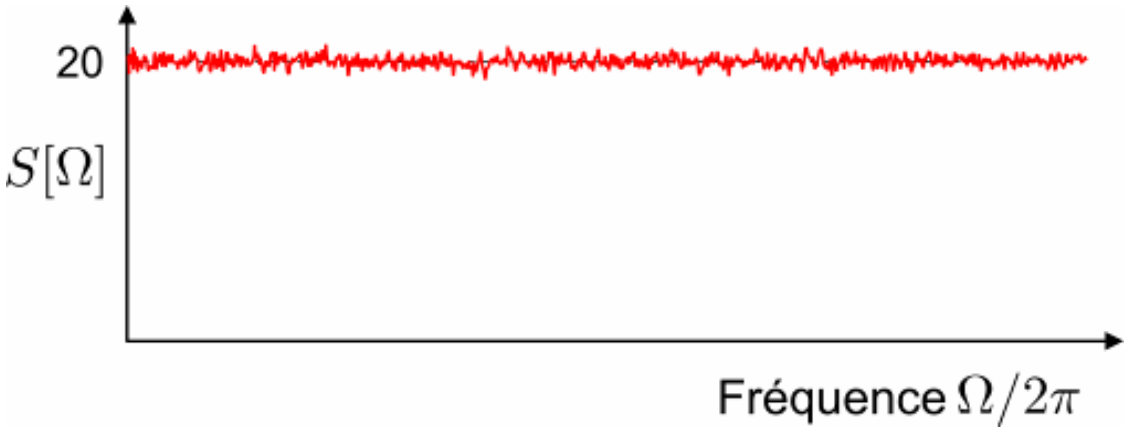
l'intensité moyenne : $\bar{I} = \bar{I}(t) = \overline{\sum_k \delta(t - t_k)}$

et le spectre (puissance de bruit à une fréquence donnée),
égal à la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation :

$$\begin{cases} C_I(\tau) = \overline{I(t+\tau)I(t)} - \bar{I}^2 \\ S_I[\Omega] = \int d\tau \, e^{i\Omega\tau} C_I(\tau) \end{cases}$$

Pour un processus Poissonien, on a :

$$\begin{cases} C_I(\tau) = \bar{I}\delta(\tau) \\ S_I[\Omega] = \bar{I} \end{cases}$$



→ Ce bruit blanc est le bruit de photon standard

Théorie quantique de la photodétection

Un mode du champ est caractérisé par les opérateurs de création $a^\dagger(t)$ et d'annihilation $a(t)$ de photons

Relation de commutation : $\left[a(t), a^\dagger(t')\right] = \delta(t-t')$

Opérateur intensité normalisé en nombre de photons : $I(t) = a^\dagger(t)a(t)$

Les fluctuations d'intensité $\delta I(t) = I(t) - \langle I \rangle$ sont caractérisées par la fonction d'autocorrélation et le spectre :

$$\begin{cases} C_I(\tau) = \langle I(t+\tau)I(t)\rangle - \langle I\rangle^2 \\ S_I[\Omega] = \int d\tau\, e^{i\Omega\tau} C_I(\tau) \end{cases}$$

Le spectre est relié à l'amplitude spectrale des fluctuations $\delta I[\Omega]$ par :

$$\left\langle \delta I[\Omega]\delta I[\Omega']\right\rangle = 2\pi\delta(\Omega+\Omega')S_I[\Omega]$$

où la fonction δ traduit la stationnarité du champ

Linéarisation des fluctuations – quadratures

Pour un faisceau laser intense monochromatique à la fréquence ω_0,
les fluctuations δI sont très petites devant l'intensité moyenne $\langle I \rangle$

En développant le champ en valeur moyenne et fluctuations :

$$a(t) = \bar{a}\, e^{-i\omega_0 t} + \delta a(t)$$

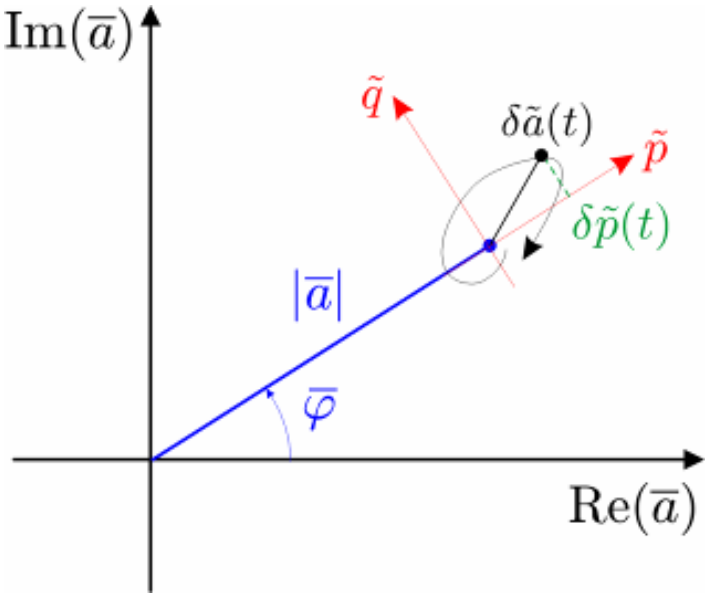
on obtient : $\langle I \rangle = |\bar{a}|^2$

$$\delta I(t) = \bar{a}^* \delta\tilde{a}(t) + \bar{a}\, \delta\tilde{a}^\dagger(t) \quad \text{où} \quad \delta\tilde{a}(\iota) = e^{i\omega_0 t} \delta a(\iota)$$

Quadratures : $\tilde{a}_\theta(t) = e^{-i\theta}\tilde{a}(t) + e^{i\theta}\tilde{a}^\dagger(t)$

Pour un champ moyen $\bar{a} = |\bar{a}|\, e^{i\bar{\varphi}}$,
2 quadratures particulières :

- amplitude $\tilde{p} = \tilde{a}_{\bar{\varphi}}$
- phase $\tilde{q} = \tilde{a}_{\bar{\varphi}+\pi/2}$

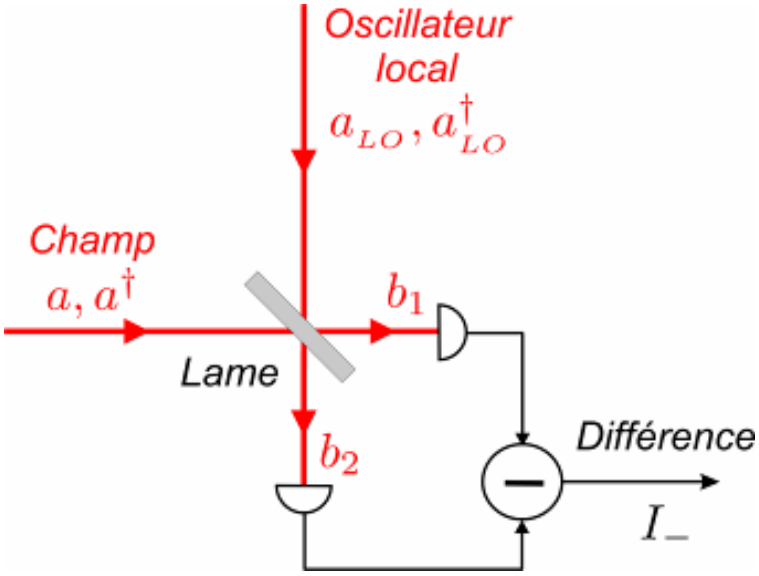


→ Bruit d'intensité : $\delta I(t) = |\bar{a}|\, \delta\tilde{p}(t)$

$$S_I[\Omega] = \langle I \rangle\, S_p[\Omega]$$

Mesure d'une quadrature quelconque

Mesure hétérodyne avec un champ oscillateur local intense



Transformation unitaire des champs sur la lame :

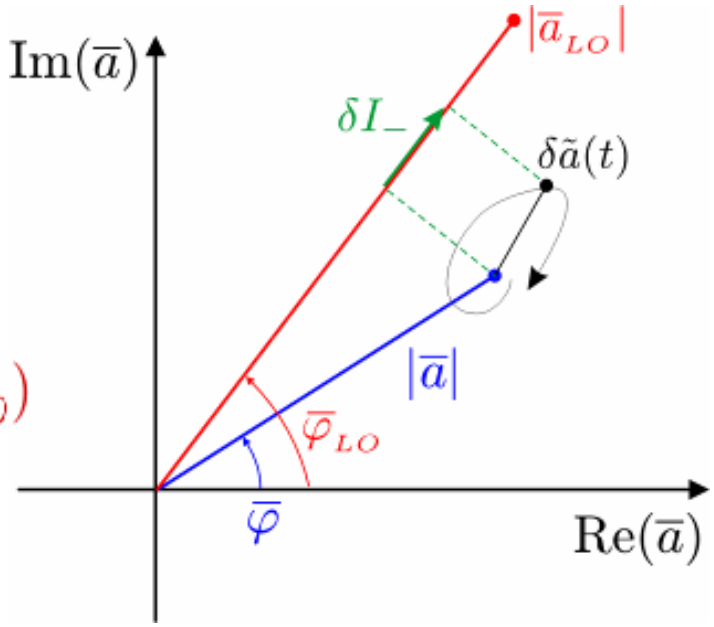
$$\begin{cases} b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a_{LO}) \\ b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{LO} - a) \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad I_- = b_1^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_2 = a_{LO}^\dagger a + a_{LO} a^\dagger$$

En ne conservant que les termes proportionnels à $\overline{a}_{LO}$:

$$\langle I_- \rangle = 2\mathrm{Re}\left(\overline{a}_{LO}^* \overline{a}\right) = 2\left|\overline{a}_{LO}\overline{a}\right| \cos\left(\overline{\varphi} - \overline{\varphi}_{LO}\right)$$

$$\delta I_- = \overline{a}_{LO}^\dagger \delta\tilde{a} + \overline{a}_{LO} \delta\tilde{a}^\dagger$$



$\rightarrow$ Mesure de la quadrature d'angle $\overline{\varphi}_{LO}$

Représentation semi-classique

Pour un champ monomode indépendant du temps

Relations de commutation : $\left[a, a^{\dagger}\right] = 1 \rightarrow [\tilde{p}, \tilde{q}] = 2i \rightarrow \Delta\tilde{p}.\Delta\tilde{q} \geq 1$

Distribution de quasi-probabilité de Wigner $\mathcal{W}(p,q)$:

On décrit le champ par des variables pseudo-aléatoires p, q de telle manière que la valeur moyenne de produits d'opérateurs champ dans l'ordre symétrique coïncide avec la valeur quantique :

$$\langle f(\tilde{p}, \tilde{q}) \rangle = \int dpdq\, \mathcal{W}(p,q) f(p,q)$$

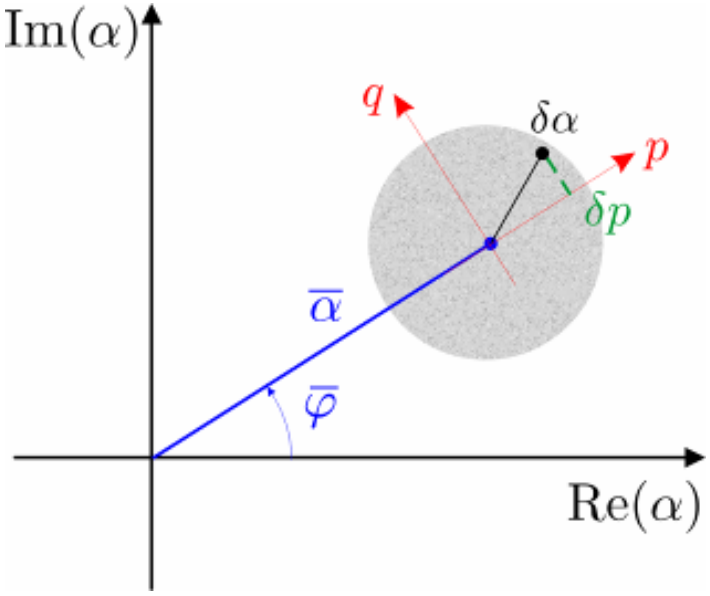
$\rightarrow$ Pour beaucoup d'états (vide, état cohérent, état comprimé), $\mathcal{W}(p,q)$ est une distribution positive

Représentation semi-classique :

$a \rightarrow \alpha = \overline{\alpha} + \delta\alpha$

avec $\overline{\alpha} = |\overline{a}|$

$\delta\alpha$: réalisations possibles du champ



Vide, états cohérents, états comprimés

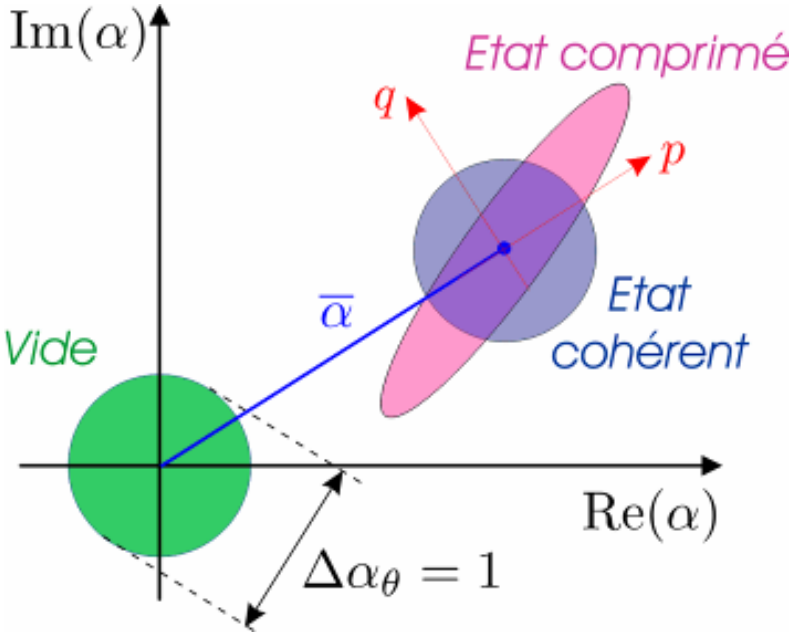
Etat minimum des relations d'incertitude :

$$\Delta\alpha_\theta . \Delta\alpha_{\theta+\pi/2} \geq 1$$

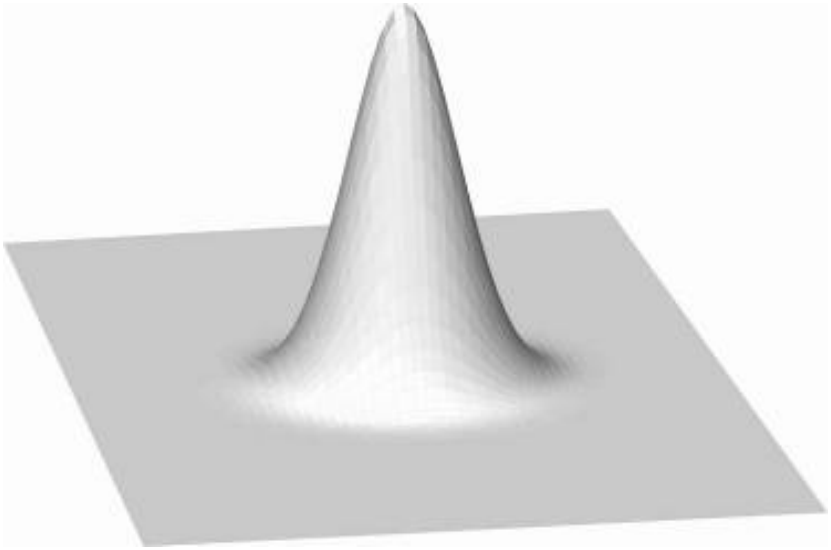
Vide, état cohérent : $\Delta\alpha_\theta = 1$

Etat comprimé :

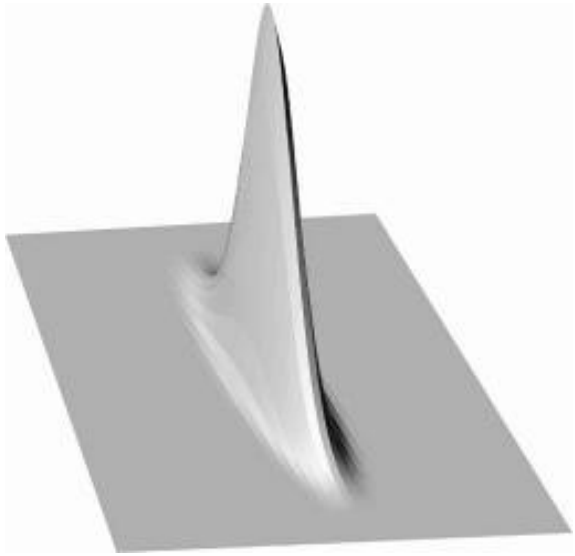
$$\Delta\alpha_{\theta_0} < 1, \ \Delta\alpha_{\theta_0+\pi/2} > 1$$



La distribution de Wigner est une Gaussienne

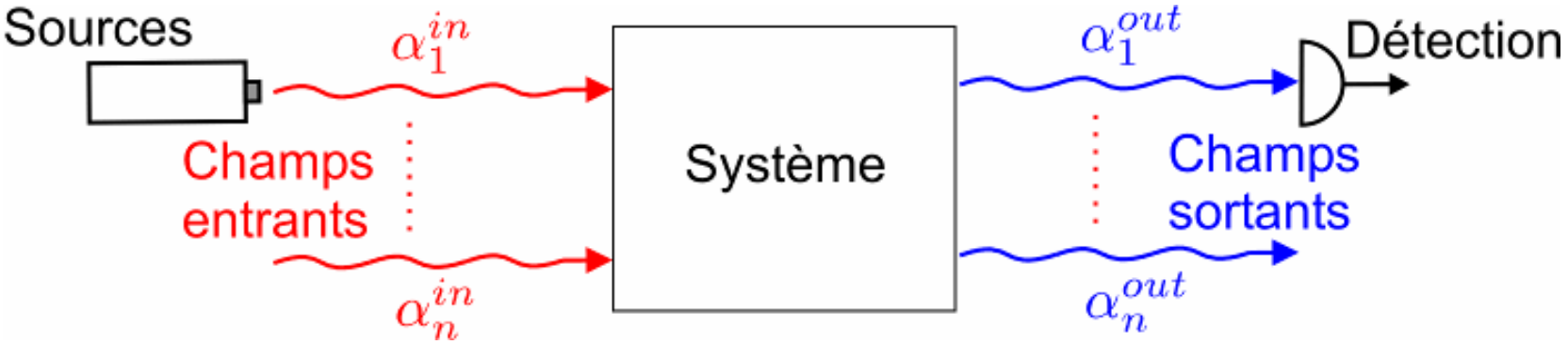


Etat cohérent



Etat comprimé

Théorie semi-classique d'entrée – sortie



- Les champs entrants dans le système sont décrits par des variables classiques aléatoires

  Pour des champs lasers cohérents, les spectres de bruit sont :

$$S_p^{in}[\Omega] = S_q^{in}[\Omega] = 1 \;\rightarrow\; S_I^{in}[\Omega] = \overline{I}$$

- Relations d'entrée-sortie pour les champs

  Pour les systèmes caractérisés par des couplages paramétriques, la distribution de Wigner obéit aux équations d'évolution classique

  → Les fluctuations sortantes $\delta\alpha^{out}$ sont obtenues à partir des champs entrants en utilisant les équations classiques linéarisées du système

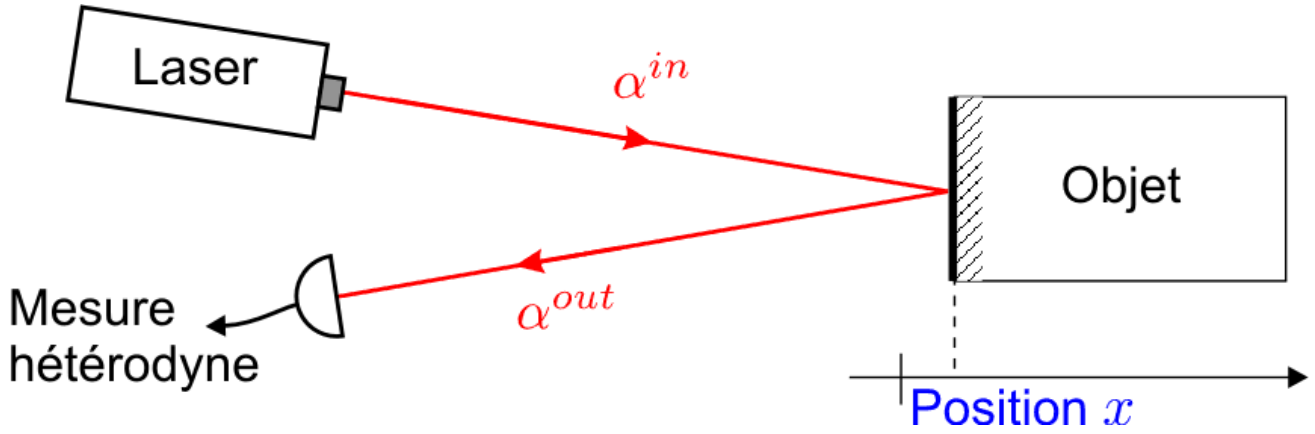
Plan

Mesures en continu, mesure de position

- Mesures en continu – théorie de la photodétection – approche semi-classique du bruit quantique
  - Mesure de l'intensité ou d'une quadrature d'un champ lumineux
  - Théorie d'entrée-sortie et description semi-classique basée sur la distribution de Wigner

- **Réflexion sur un miroir mobile**
  - Mesure optique de position, limite quantique
  - Redistribution du flux de photon par effet de retard
  - Comparaison entre mesures destructive et non destructive

Mesure optique de déplacements



Modification du chemin optique :

$$\alpha^{out}(t) = \alpha^{in}(t - 2x/c) \simeq \alpha^{in}(t)\, e^{2ikx(t)}$$

$\rightarrow$ Déphasage du champ $2kx(t)$ (effets de retard négligés)

Champs moyens : $\overline{\alpha}^{out} = \overline{\alpha}^{in}$

Fluctuations (on suppose $\delta x \ll \lambda = 2\pi/k$) : $\delta\alpha^{out} = \delta\alpha^{in} + 2ik\,\overline{\alpha}^{in}\delta x$

$$\begin{cases} \delta p^{out} = \delta p^{in} \\ \delta q^{out} = \delta q^{in} + 4k\,\overline{\alpha}^{in}\delta x \end{cases}$$

Conservation de l'intensité

Phase sensible au déplacement

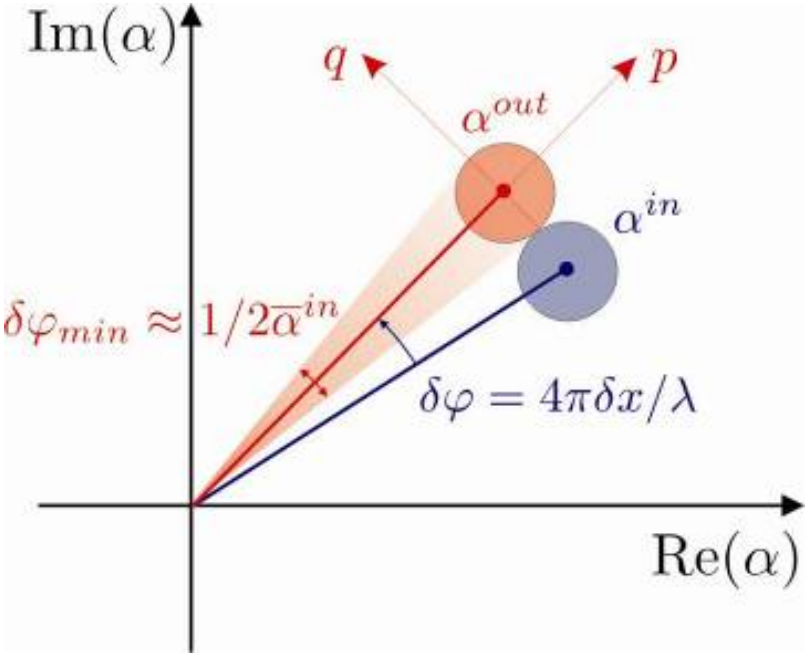
Sensibilité de la mesure

$$\delta q^{out} = \underbrace{\delta q^{in}}_{\text{Bruit de la mesure}} + \underbrace{4k\overline{\alpha}^{in}}_{\text{Amplification}}\underbrace{\delta x}_{\text{Signal}}$$

Spectre mesuré :

$$S_q^{out}[\Omega] = \underbrace{S_q^{in}[\Omega]}_{=1} + \frac{64\pi^2\overline{I}^{in}}{\lambda^2}S_x[\Omega]$$

Sensibilité : $\delta x_{min} = \dfrac{\lambda}{8\pi\sqrt{\overline{I}^{in}}}$

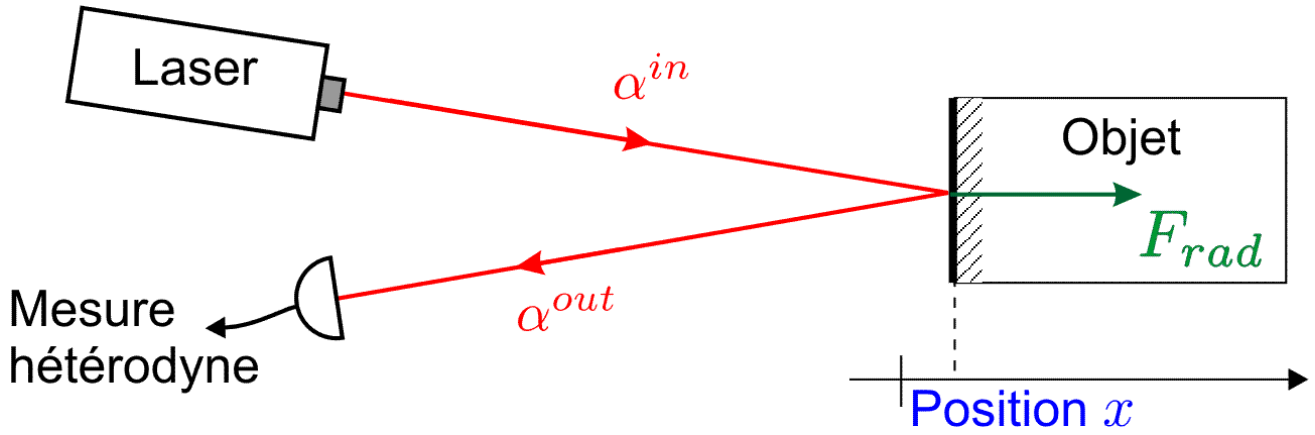


Ordre de grandeur :

$$P = 1\,\mathrm{W}, \lambda = 1\,\mu\mathrm{m} \rightarrow \overline{I}^{in} = P/\hbar\omega_0 = P/\hbar kc \approx 5\times10^{18}\,\mathrm{photons/s}$$

→ Amplitude spectrale de bruit : $\delta x_{min} \approx 2\times10^{-17}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$

Action en retour



Pression de radiation : $F_{rad}(t) = 2\hbar k I^{in}(t)$

avec $I^{in}(t) = \overline{\alpha}^{in}\delta p^{in}(t)$, bruit conjugué du bruit δq^{in} de la mesure

Cette force fluctuante perturbe l'impulsion de l'objet,
mais aussi sa position lors de son évolution temporelle

Pour un objet libre de masse m :

$$m\delta\ddot{x}(t) = F_{rad}(t) \rightarrow -m\Omega^2\delta x[\Omega] = F_{rad}[\Omega]$$

Ordre de grandeur : $\delta x_{rad} \simeq \dfrac{2\hbar k\sqrt{\bar{I}^{in}}}{m\Omega^2}$

$\rightarrow$ Du même ordre que δx_{min} à 1 kHz pour $m < 5\mu g$

Réponse mécanique du miroir

Miroir libre de masse m :

$$m\delta\ddot{x}(t) = F(t) \rightarrow \delta x[\Omega] = \chi[\Omega]F[\Omega]$$

avec $\chi[\Omega] = -1/m\Omega^2$ susceptibilité mécanique

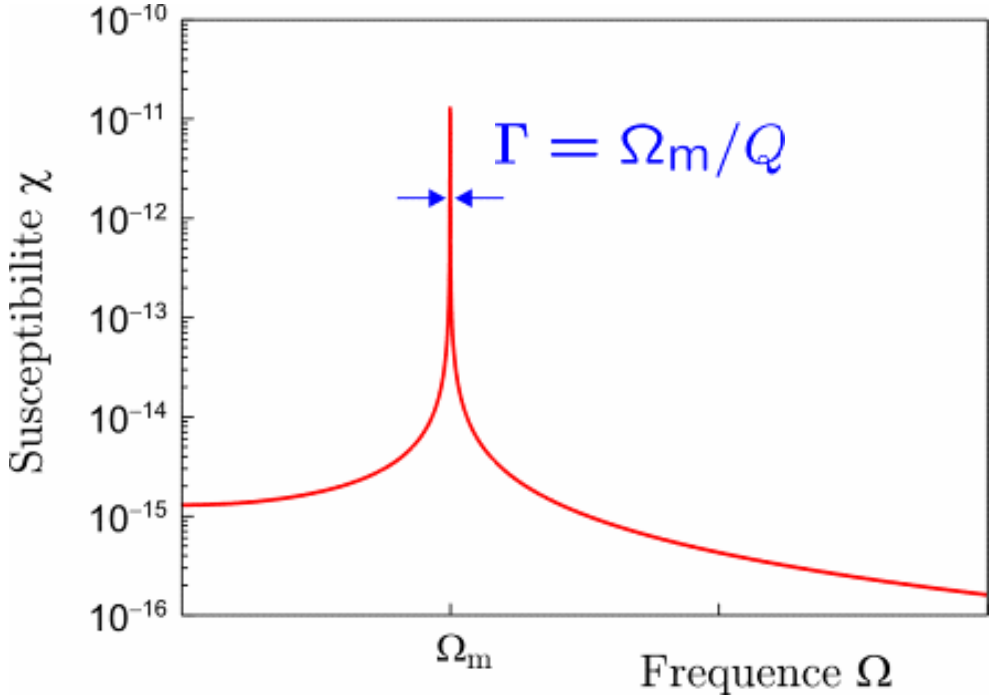
Oscillateur harmonique (pendule,…) :

$$\ddot{x}(t) + \Gamma\,\dot{x}(t) + \Omega_{\mathrm{m}}^2\,x(t) = \frac{F(t)}{m}$$

$$\rightarrow \chi[\Omega] = 1/m\left(\Omega_{\mathrm{m}}^2 - \Omega^2 - i\Gamma\Omega\right)$$

avec Ω_{m} : fréquence de résonance,

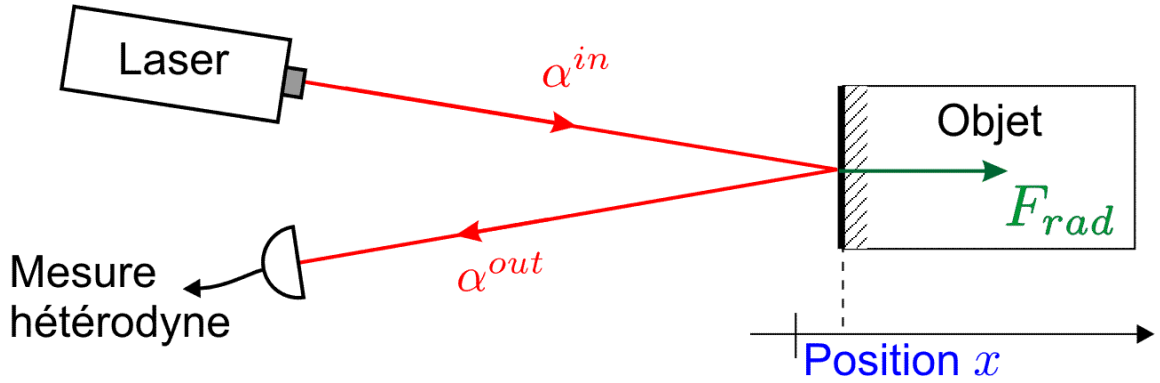
Γ : amortissement



Théorie de la réponse linéaire : $\delta x[\Omega] = \chi[\Omega]\,(F[\Omega] + F_T[\Omega])$

Agitation thermique, fluctuations quantiques

Limite quantique de la mesure de position

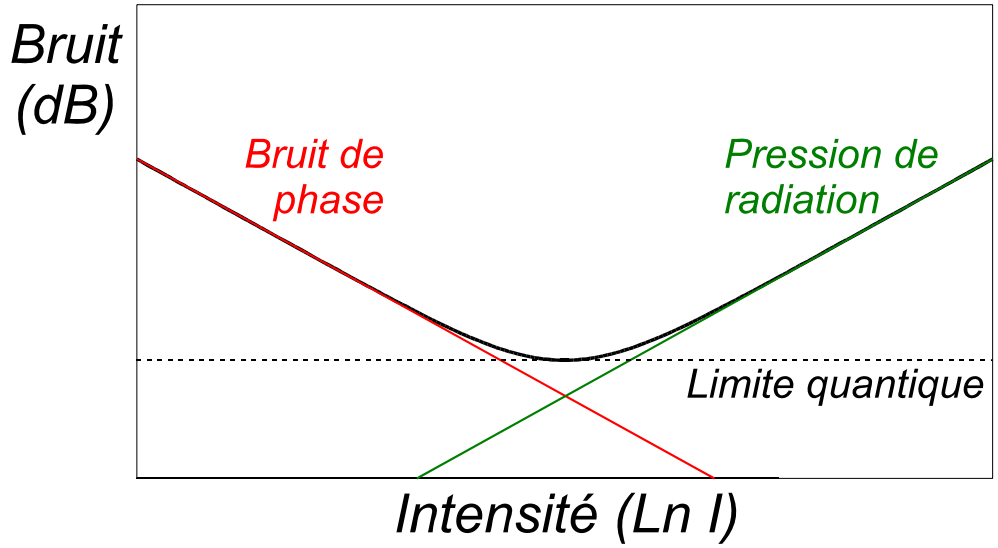


Mesure : $\delta q^{out} = \delta q^{in} + 4k\bar{\alpha}^{in}\delta x$

Sensibilité : $\delta x_{min} = \dfrac{\lambda}{8\pi\sqrt{\bar{I}^{in}}}$

Action en retour : $F_{rad} = 2\hbar k\bar{\alpha}^{in}\delta p^{in}$

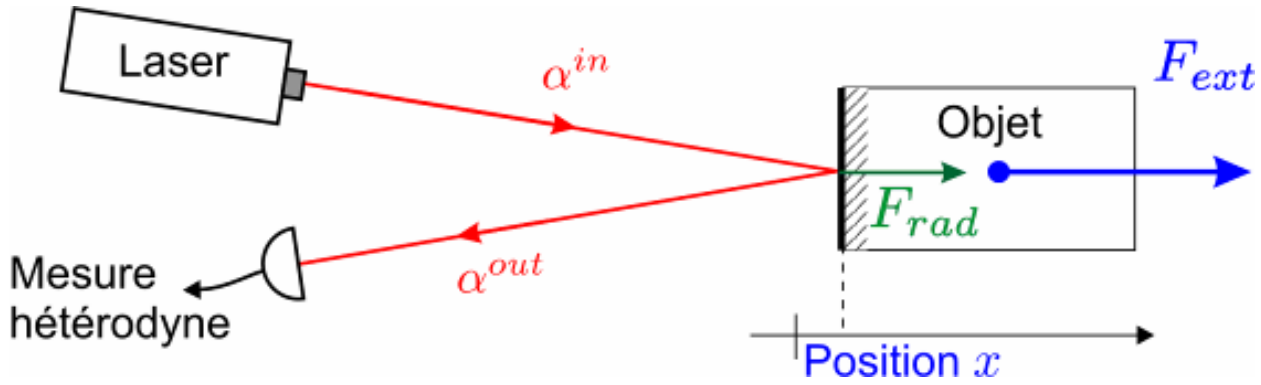
Perturbation : $\delta x_{rad} \simeq 2\hbar k\,|\chi[\Omega]|\sqrt{\bar{I}^{in}}$



→ Limite quantique standard :

$$\delta x_{LQS} = \sqrt{\hbar\,|\chi[\Omega]|}$$

Exemple : mesure de force



On veut mesurer l'amplitude d'une force F_{ext} appliquée au miroir

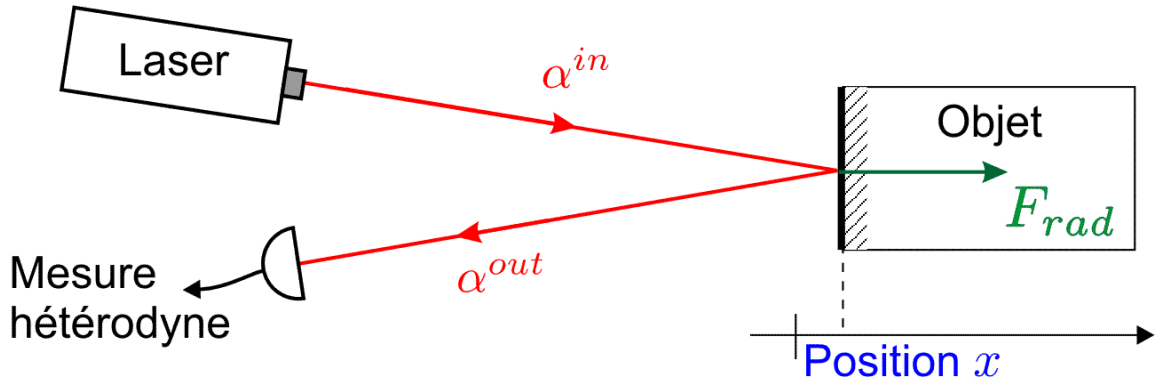
$$\delta x[\Omega] = \chi[\Omega]\,(F_{ext}[\Omega] + F_{rad}[\Omega] + \underbrace{F_T[\Omega]}_{\text{Peut être rendu petit devant } F_{rad}})$$

Résultat de la mesure :

$$\delta q^{out}[\Omega] = \underbrace{\delta q^{in}[\Omega]}_{\text{Bruit de phase}} + \underbrace{4k\bar{\alpha}^{in}\chi[\Omega]F_{rad}[\Omega]}_{\text{Pression de radiation}} + \underbrace{4k\bar{\alpha}^{in}\chi[\Omega]F_{ext}[\Omega]}_{\text{Signal}}$$

→ Limite quantique standard : $\delta F_{LQS} = \dfrac{\delta x_{LQS}}{|\chi[\Omega]|} = \sqrt{\dfrac{\hbar}{|\chi[\Omega]|}}$

Prise en compte des effets de retard



La modification du chemin optique ne se traduit pas uniquement par un déphasage $2kx$, mais induit aussi un retard

Le champ électrique s'écrit (cf. cours de Claude Fabre) :

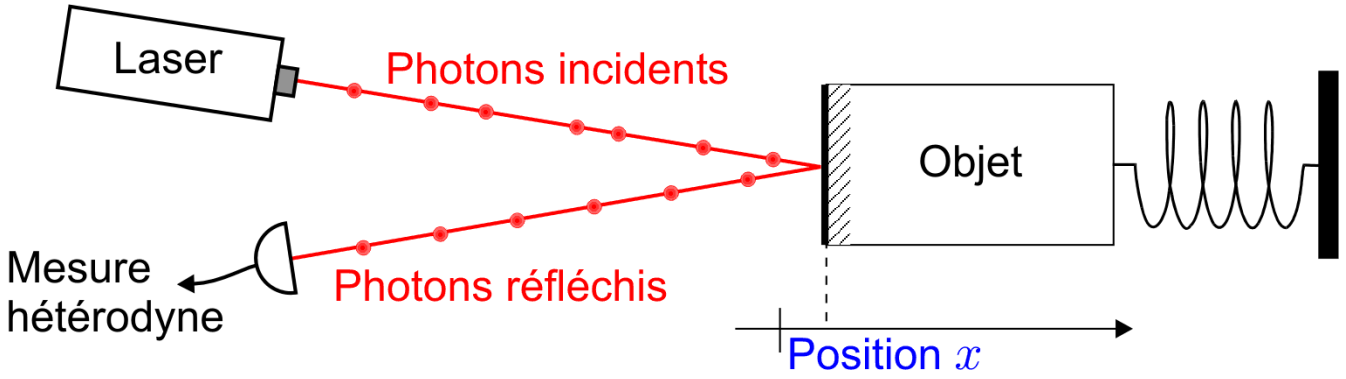
$$\overrightarrow{E}^{+}(\overrightarrow{r}, t-\tau) = i\mathcal{E}\overrightarrow{\epsilon}\,\underbrace{\tilde{a}(t-\tau)}_{\text{Effet de retard}}\, e^{i(\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}-\omega_0 t+\underbrace{\omega_0\tau}_{\text{Déphasage}})}$$

Conservation de l'intensité instantanée dans le référentiel de l'objet :

$$I^{out}(t) = \frac{1-v/c}{1+v/c} I^{in}(t-2x/c)$$

$\rightarrow$ Redistribution du flux de photon

Interprétation corpusculaire de la redistribution



- Simulation Monte-Carlo du flux de photon incident
- Choc élastique à la réflexion de chaque photon, en tenant compte de l'effet Doppler

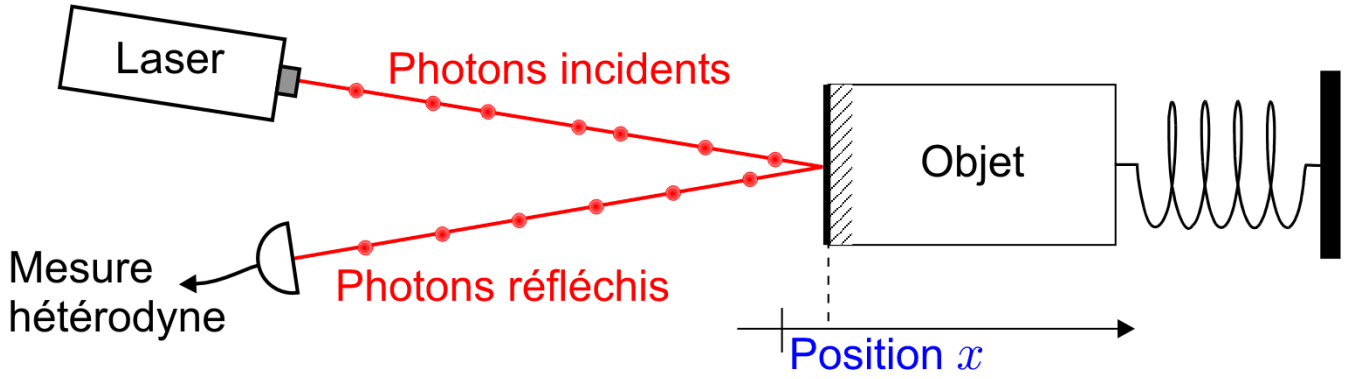
  Mouvement de l'objet supposé harmonique

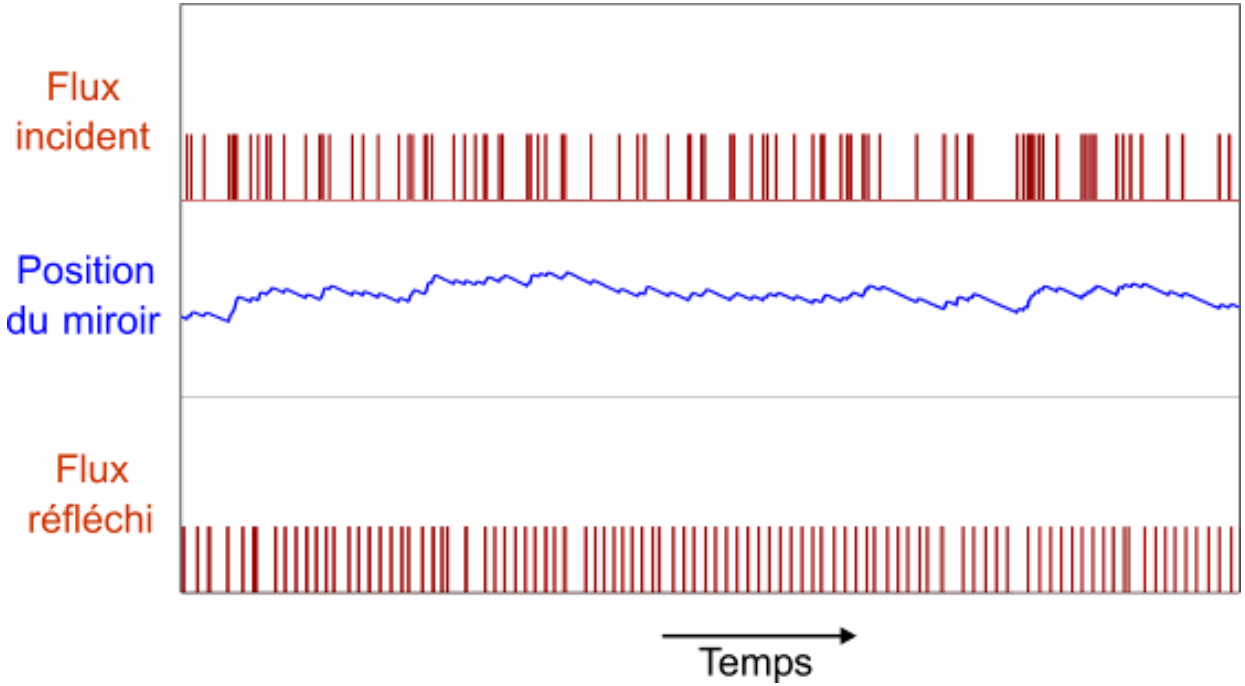
  Evolution libre entre 2 chocs :

$$\ddot{x}(t) + \Gamma\,\dot{x}(t) + \Omega_{\mathrm{m}}^2\,x(t) = 0$$

- Détermination du flux réfléchi selon la position instantanée de l'objet lors de la réflexion

Interprétation corpusculaire de la redistribution

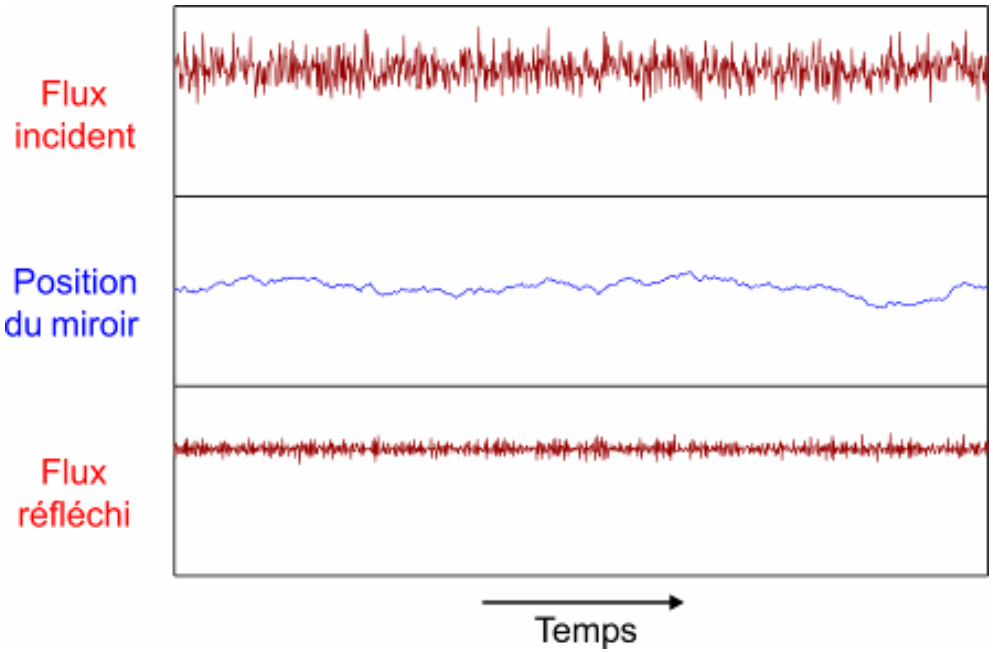




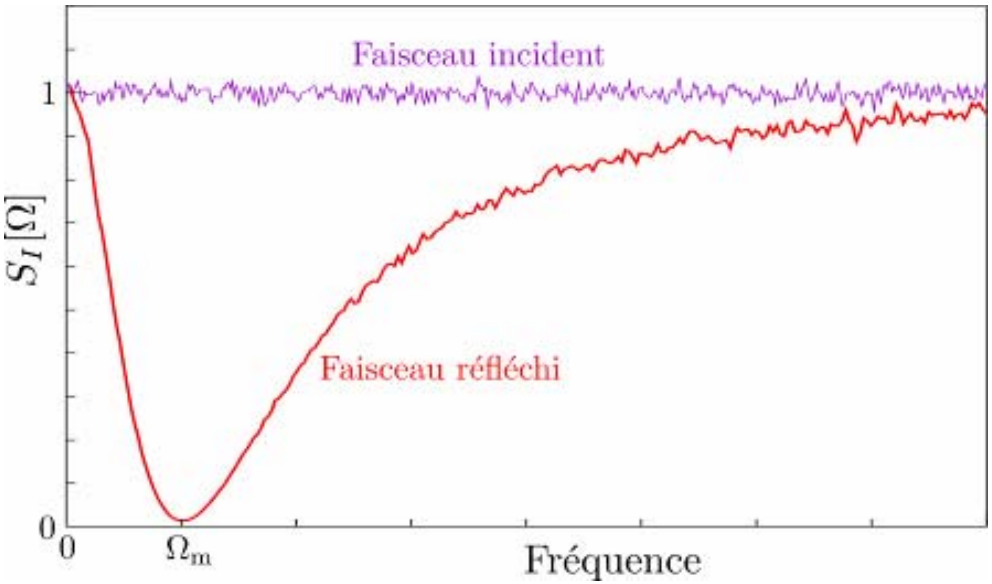
→ Le flux de photon réfléchi est plus régulier que le flux incident !

Interprétation corpusculaire de la redistribution

Simulation Monte-Carlo
pour un faisceau intense



Spectres du bruit d'intensité :

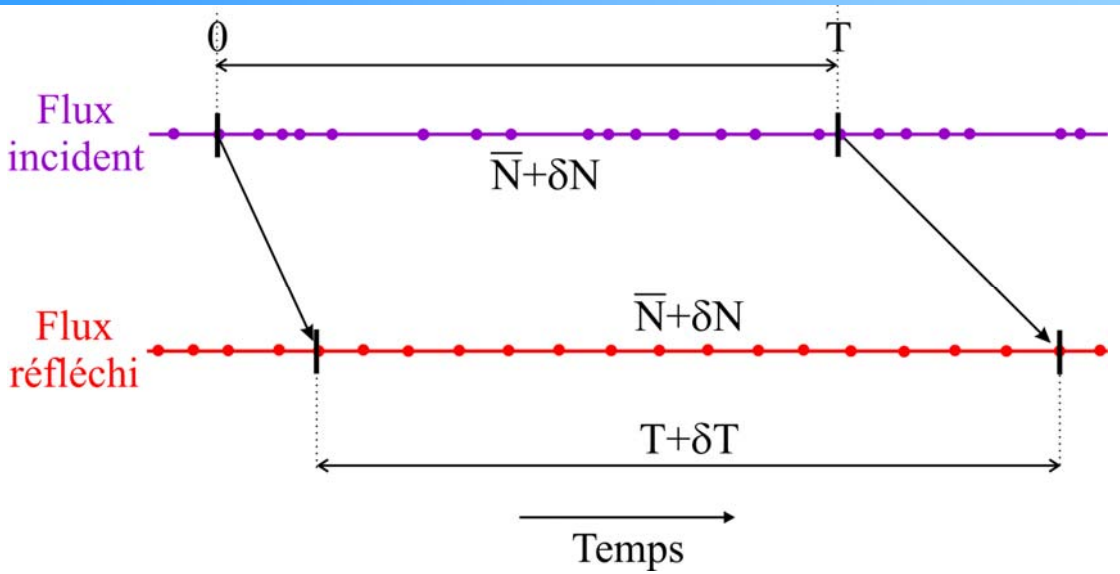


La régulation du flux de photon induit une réduction du bruit de photon par rapport au bruit de photon standard

→ Etat comprimé

Quadrature d'amplitude réduite

Ordres de grandeur



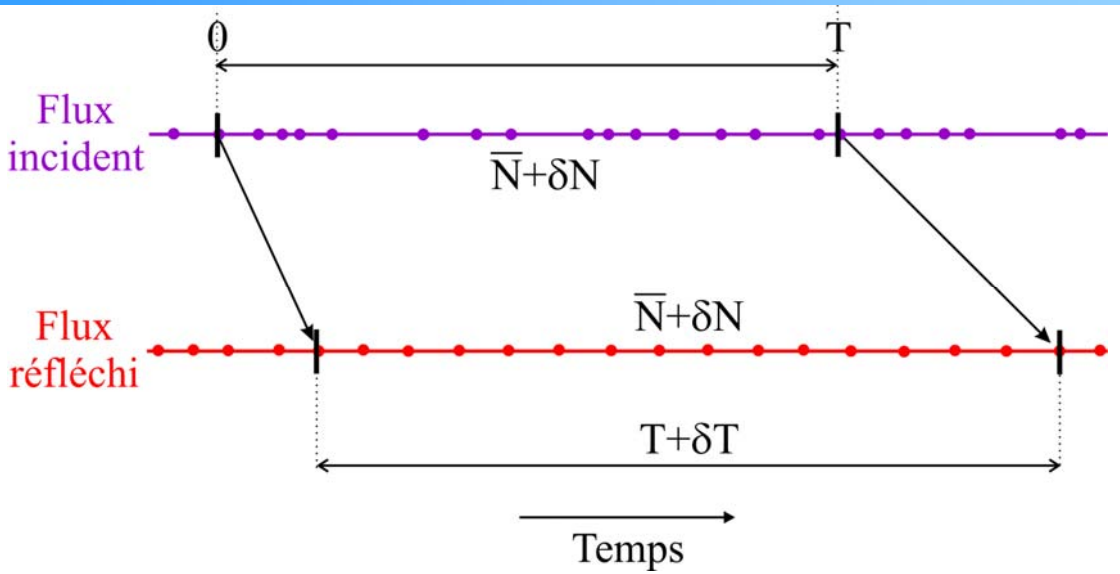
Sur une période d'oscillation T, si on compte $\overline{N} + \delta N$ photons incident (avec $\overline{N} = \overline{I}T$), la régulation est efficace si ces photons se retrouvent dans un intervalle $T + \delta T$ tel que :

$$\frac{\overline{N} + \delta N}{T + \delta T} \simeq \frac{\overline{N}}{T} = \overline{I}$$

Déplacement δx du miroir nécessaire sur un temps T : $\frac{2\delta x}{c} = \delta T = \frac{\delta N}{\overline{I}}$

Processus Poissonien : $\delta N \simeq \sqrt{\overline{N}} \rightarrow \delta x = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{T}{\overline{I}}}$

Ordres de grandeur



Ordre de grandeur :

Pour $P = 1\,\mathrm{W}$ ($\bar{I} \simeq 5 \times 10^{18}\,\mathrm{photons/s}$), et $T = 1\,\mathrm{ms}$

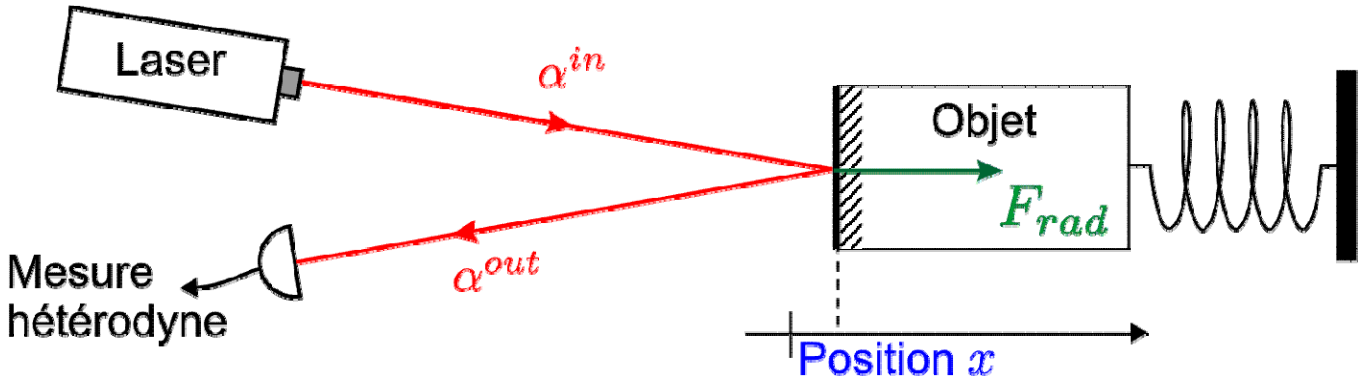
→ Déplacement nécessaire : $\delta x \approx 2\,\mathrm{mm}$!

Beaucoup plus grand que les déplacements créés par les fluctuations quantiques de la pression de radiation :

On a calculé une amplitude spectrale $\delta x_{rad} \approx 10^{-17}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ pour une masse libre de 5 µg…

→ Les effets de retard sont négligeables !

Mesure (destructive) des déplacements



$$\delta p^{out} = \delta p^{in}$$

L'intensité n'est pas modifiée

$$\delta q^{out} = \delta q^{in} + 4k\overline{\alpha}^{in}\delta x$$

La phase du faisceau réfléchi reproduit les déplacements

→ Permet la mesure de position

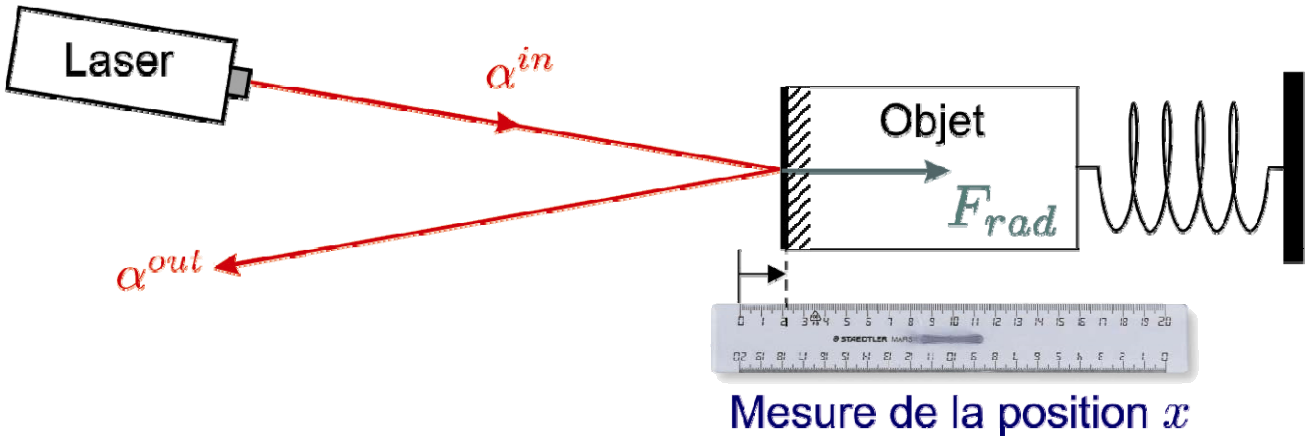
$$F_{rad} = 2\hbar k\overline{\alpha}^{in}\delta p^{in}$$

$$\delta x_{rad} = \chi F_{rad}$$

A cause de la pression de radiation, la mesure perturbe le mouvement ultérieur

→ La mesure perturbe la grandeur mesurée

Mesure non destructive de la lumière



On utilise le même système pour mesurer l'intensité du faisceau lumineux en détectant le recul de l'objet sous l'effet de la pression de radiation

$$\delta p^{out} = \delta p^{in}$$ ← La mesure est non destructive !

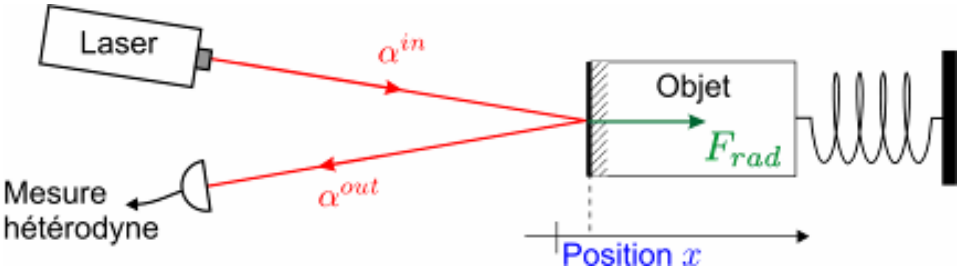
$$\delta q^{out} = \delta q^{in} + 4k\bar{\alpha}^{in}\delta x$$ ← La phase est perturbée par le mouvement (action en retour)

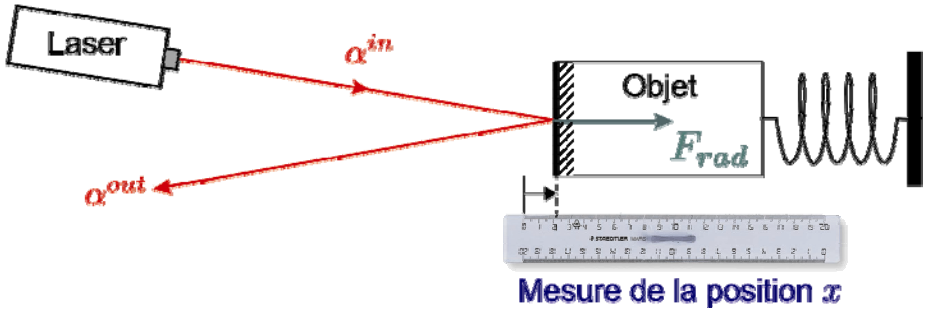
$$F_{rad} = 2\hbar k\bar{\alpha}^{in}\delta p^{in}$$

$$\delta x_{rad} = \chi F_{rad}$$

A cause de la pression de radiation, la position est sensible à l'intensité
→ Permet la mesure de l'intensité

Différences entre les deux mesures





La mesure perturbe l'impulsion de l'objet, variable conjuguée de l'observable x mesurée :

$$F_{rad} = 2\hbar k \bar{\alpha}^{in} \delta p^{in}$$

La mesure perturbe la phase du champ, variable conjuguée de l'observable intensité mesurée :

$$\delta q^{out} = \delta q^{in} + 4k\bar{\alpha}^{in}\delta x$$

$\rightarrow$ Deux systèmes couplés : le couplage (qui assure la mesure) est idéal

L'évolution ultérieure couple l'impulsion et la position

$$\delta x_{rad} = \chi F_{rad}$$

$\rightarrow$ La mesure perturbe la variable mesurée

L'intensité est une constante du mouvement et n'est pas couplée à la phase du champ

$\rightarrow$ La mesure est non destructive