



HAL
open science

**EFFET MÉCANIQUE DU SPIN DES PHOTONS EN
RÉFLEXION SUR UN MILIEU ISOTROPE
ABSORBANT** Comparaison des effets ondulatoires pour
le spin, l'impulsion et l'énergie

Luc Dettwiller

► **To cite this version:**

Luc Dettwiller. EFFET MÉCANIQUE DU SPIN DES PHOTONS EN RÉFLEXION SUR UN MILIEU ISOTROPE ABSORBANT Comparaison des effets ondulatoires pour le spin, l'impulsion et l'énergie. Master. 2006. sfo-00361405

HAL Id: sfo-00361405

<https://hal-sfo.ccsd.cnrs.fr/sfo-00361405>

Submitted on 14 Feb 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Effet mécanique du spin des photons en réflexion sur un milieu isotrope absorbant

Comparaison des effets ondulatoires pour le spin, l'impulsion et l'énergie

par Luc DETTWILLER
Lycée Blaise Pascal – 63037 Clermont-Ferrand
dettwillerluc@voila.fr

Résumé

On s'intéresse à un effet mécanique de la réflexion d'une onde sur une face plane d'un milieu isotrope très absorbant : l'apparition d'un moment de forces par rapport à un axe Oz normal à cette face réfléchissante, même si Oz est l'axe de symétrie du faisceau incident ! Le calcul de ce moment peut être mené soit en considérant les actions électromagnétiques subies par le milieu (ce qui est assez difficile s'il est diélectrique et aussi magnétique), soit beaucoup plus rapidement en déterminant les flux de spin incident et réfléchi dans le cas de l'incidence normale ; il est facile de voir que le résultat obtenu est compatible avec une interprétation corpusculaire simple invoquant le spin des photons ($\pm \hbar$) polarisés circulairement. Contrairement à la pression de radiation en incidence normale, ce phénomène dépend de la polarisation de l'onde incidente, et nous l'analysons de façon générale. Enfin nous abordons le cas de l'incidence oblique, et nous soulignons le fait que l'aspect irréductiblement ondulatoire de la lumière se manifeste alors dans l'expression du moment, tandis qu'il peut passer inaperçu dans celle de l'énergie dissipée et de la force subie par le milieu absorbant.

Introduction

Dans une série d'articles récents, nous étudions certaines propriétés insolites du phénomène de réfraction entre un premier milieu $\{1\}$ isotrope transparent et un second milieu isotrope mais dont l'indice n peut être complexe [1-2], ou bien un second milieu comme CaF_2 ou BaF_2 ayant une anisotropie très particulière [3-4]. Ces travaux s'intéressaient surtout aux effets optiques de ces phénomènes de réfraction ; maintenant nous voudrions attirer l'attention sur certains de leurs effets mécaniques. La pression de radiation est un phénomène bien connu : il a été deviné par Johannes KEPLER dès 1616 d'après l'observation de la queue d'une comète, mais sa première visualisation en laboratoire est due à Pyotr LEBEDEV (avec son expérience sur de la poudre de vesce de loup grillée) en 1900. Peu après les travaux d'EINSTEIN on a mieux compris que cet effet s'explique aussi bien par les forces électromagnétiques que par le bilan de l'impulsion photonique, même dans le cas de l'incidence oblique sur un milieu autre qu'un métal parfait, par exemple un milieu absorbant quelconque ; donc on en déduit facilement que la pression de radiation augmente avec le facteur de réflexion, car les photons réfléchis ont leur composante normale de l'impulsion qui est opposée à celle des photons incidents. Comme cet effet ne concerne que la résultante des actions exercées par l'onde sur le second milieu, pour avoir une description plus complète des phénomènes mécaniques liés aux ondes en présence il est nécessaire de s'intéresser en outre aux moments de ces actions ; de

même, ceux-ci doivent pouvoir s'expliquer aussi bien par les actions électromagnétiques que par le bilan des moments photoniques, ce qui est une façon de mettre en évidence le spin $\pm \hbar$ des photons si on admet l'expression de leur énergie $\hbar\omega$ en fonction de leur pulsation ω .

La première vérification expérimentale d'un bilan de spin photonique est celle de Richard BETH en 1936. Dans son expérience célèbre [5-6], il éclaire une lame quart d'onde, suivie d'un miroir plan, par un faisceau collimaté en incidence normale : la polarisation du faisceau incident étant circulaire, le spin de chaque photon est renversé par la double traversée de la lame, donc celle-ci subit un moment qui tend à la faire tourner sur elle-même. Cet effet a donné lieu très récemment à d'autres réalisations expérimentales [7-8]. Le but de notre article est de chercher si un effet analogue peut exister lors d'une banale réflexion sur un milieu isotrope ; comme elle change le sens de l'impulsion des photons mais *pas* leur spin, cet effet de rotation ou de moment ne peut exister que si le *flux* de spin réfléchi est différent du *flux* incident, donc si la réflexion n'est pas totale.

Nous voulons traiter ici du calcul du moment moyen $\langle d^2 M_{Oz} \rangle$, par rapport à Oz , des forces électromagnétiques sur une portion d'une lame de milieu {2} linéaire local homogène isotrope absorbant : une colonne (δV) cylindrique de hauteur égale à l'épaisseur de la lame et de génératrice parallèle à l'axe Oz normal à la lame, de base (δS), d'aire $d^2 S$ infinitésimale, située dans le plan Oxy de la face antérieure et contenant l'origine O du repère orthonormé direct $Oxyz$. Nous nous plaçons aussi dans le cas d'un milieu suffisamment absorbant (comme un métal par exemple) pour que l'épaisseur de la lame soit très grande devant la profondeur pénétration de l'onde dans le milieu ; alors on peut faire l'approximation consistant à considérer que la hauteur de (δV) est infinie. Et pour mieux cerner la cause principale du phénomène nous supposons que {1} est le vide.

D'abord, nous supposons que la lame reçoit une onde en incidence normale, et nous partons de la connaissance du champ électromagnétique $(\mathbf{E}_i, \mathbf{B}_i)$ de l'onde transmise *dans* la lame pour calculer le moment des actions électromagnétiques subies par (δV). Ensuite, nous montrerons qu'on peut retrouver ces actions de façon très rapide, sans connaître ce champ transmis mais uniquement le dernier paramètre de STOKES de l'onde incidente et celui de l'onde réfléchie (ce paramètre caractérisant, dans le cas d'une onde transverse quasi-monochromatique, l'ellipticité de sa polarisation si son intensité et son degré de polarisation sont connus) ; ces résultats coïncident avec ceux donnés par une interprétation corpusculaire simple invoquant le spin des photons. Enfin nous terminerons cette étude en abordant des situations plus complexes comme celles de l'incidence oblique ou de la réflexion sur un miroir ferromagnétique, et nous verrons apparaître certaines limites de l'interprétation corpusculaire simple – ce qui est normal compte tenu de la dualité onde-corpuscule.

1. Calcul direct de l'action électromagnétique en incidence normale

Nous nous plaçons d'abord dans le cas où le milieu absorbant reçoit une onde plane monochromatique homogène progressive en incidence normale, parce que cette situation se prête à une interprétation corpusculaire simple ; cependant son explication électromagnétique est subtile par la multiplicité des approches possibles.

1.1 Cas d'un diélectrique isolant

Pour commencer, notons que les densités de forces en volume ne contribuent pas au moment par rapport à Oz , à l'ordre 2 de d^2S , puisque $d^2\mathcal{M}_{Oz}$ est le même que si \mathbf{OM} était colinéaire à \mathbf{u}_z pour tout point M de ce domaine élémentaire (δV) ! Il en est de même pour la densité de force en surface exercée sur les éventuelles sources de (δS)...

Si le milieu {2} est isolant et non magnétique, la relation entre son indice complexe n et sa permittivité électrique relative ε_r s'écrit $n^2 = \varepsilon_r$, et $\langle d^2\mathcal{M}_{Oz} \rangle$ se trouve complètement dû à la composante sur \mathbf{u}_z de la densité de *couple* électrique $\mathbf{P} \times \mathbf{E}_t$ en tout point de {2} dont \mathbf{P} désigne la polarisation, et ainsi

$$\langle d^2\mathcal{M}_{Oz} \rangle = \mathbf{u}_z \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \Re e(\mathbf{P} \times \mathbf{E}_t^*) dz d^2S \quad (1)$$

où $\Re e$ désigne la partie réelle, et le soulignement d'une grandeur monochromatique indique sa représentation complexe ; dans un tel milieu {2} les seules densités de *forces* électromagnétiques vraies en volume sont, pour mémoire, $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{E}_t$ et $\partial \mathbf{P} / \partial t \times \mathbf{B}_t$. Or

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \mathbf{E}_{0t} e^{-n'k_0 z} \exp -i(\omega t - n'k_0 z) \quad (2)$$

avec $k_0 \equiv \omega/c$ où c désigne la célérité de la lumière dans le vide, ε_0 la permittivité électrique du vide, \mathbf{E}_{0t} l'amplitude complexe du champ électrique de l'onde transmise en O , et $\Re e n \equiv n'$ l'indice de réfraction de {2} ; de même qu'il sera commode de désigner ainsi la partie réelle de toute grandeur complexe en lui mettant un « prime », on notera la partie imaginaire avec un « seconde » comme pour $\Im m n \equiv n''$ (indice d'absorption de {2}). En reportant l'expression (2) dans (1) et en utilisant les composantes de \mathbf{E}_{0t} dans la base liée à $Oxyz$, il vient

$$\begin{aligned} \langle d^2\mathcal{M}_{Oz} \rangle &= \int_0^{\infty} e^{-2n''k_0 z} dz \mathbf{u}_z \cdot \Re e \frac{\varepsilon_0}{2} [(\varepsilon_r - 1) \mathbf{E}_{0t} \times \mathbf{E}_{0t}^*] d^2S \\ &= \frac{1}{2n''k_0} \Re e \frac{\varepsilon_0}{2} [(\varepsilon_r - 1) (\underline{E}_{0tx} \underline{E}_{0ty}^* - \underline{E}_{0ty} \underline{E}_{0tx}^*)] d^2S \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{donc } \frac{\langle d^2\mathcal{M}_{Oz} \rangle}{d^2S} = \frac{1}{2n''k_0} \Re e \frac{\varepsilon_0}{2} [(n^2 - 1) 2i \Im m(\underline{E}_{0tx} \underline{E}_{0ty}^*)] = \frac{\varepsilon_0}{4n''k_0} \Re e [(n^2 - 1) (i S_{3t})] \quad (4)$$

où $S_{3t} \equiv 2 \Im m(\underline{E}_{0tx} \underline{E}_{0ty}^*)$ est le dernier paramètre de STOKES [9-11] de l'onde transmise en O ; dans le cas de l'incidence normale il est proportionnel à celui de l'onde incidente S_{3i} , et

$$\frac{\langle d^2\mathcal{M}_{Oz} \rangle}{d^2S} = -\frac{\varepsilon_0 c}{4n''\omega} \Im m(n^2 - 1) S_{3t} = -\frac{2\varepsilon_0 c n' n''}{4n''\omega} |\tau|^2 S_{3t} \quad (5)$$

où τ désigne le coefficient de transmission par le dioptre Oxy . Comme les milieux considérés sont non magnétiques, le facteur de transmission par la face antérieure en incidence normale s'écrit $T = n' |\tau|^2$; et comme le premier milieu est transparent [15], ce facteur T est lié à celui de réflexion R par la relation usuelle $T = 1 - R$, d'où finalement l'expression simple

$$\boxed{\frac{\langle d^2\mathcal{M}_{Oz} \rangle}{d^2S} = -\frac{\varepsilon_0 c}{2\omega} (1 - R) S_{3t}} \quad (6)$$

qui montre clairement le rôle crucial de l'ellipticité de l'onde – voir la relation (III.9) de l'annexe III.

Discussion

Cette expression est valable même si le milieu linéaire est aussi magnétique – et en fait, dans tout corps le processus de diamagnétisme est présent... On obtient encore (6) après avoir rajouté, à $\mathbf{P} \times \mathbf{E}_t$, la densité de couple magnétique $\mathbf{I} \times \mathbf{B}_t$ où \mathbf{I} désigne l'aimantation du milieu (voir annexe I), et en se souvenant qu'à cause des propriétés magnétiques la relation entre τ et $T = 1 - R$ est un peu plus compliquée : $T = \Re e(n/\mu_r) |\tau|^2$ où μ_r désigne la perméabilité magnétique relative de $\{2\}$. De plus, on vérifie que les pertes de spin photonique dues aux processus magnétiques (resp. électriques) d'absorption provoquent l'apparition d'un moment (par rapport à Oz) de forces dues à l'aimantation (resp. à la polarisation). Pour mémoire (puisque'elle ne contribue pas à $d^2\mathcal{M}_{Oz}$), la densité de force vraie en volume due à l'aimantation a pour composantes $\mathbf{I} \cdot \partial \mathbf{B}_t / \partial x$, $\mathbf{I} \cdot \partial \mathbf{B}_t / \partial y$ et $\mathbf{I} \cdot \partial \mathbf{B}_t / \partial z$.

Dans ce cas idéalisé où l'effet de la conduction est omis, on voit donc qu'il y a une explication simple à l'existence du lien entre le moment moyen $\langle d^2\mathcal{M}_{Oz} \rangle \neq 0$ et la polarisation non rectiligne de l'onde incidente associée à $S_3 \neq 0$, ainsi que le facteur d'absorption *par la lame* $1 - R \neq 0$: car \mathbf{P} (resp. \mathbf{I}) est colinéaire à \mathbf{E}_t (resp. \mathbf{B}_t) si la polarisation de l'onde transmise est rectiligne ou si la permittivité électrique (resp. la perméabilité magnétique) est réelle – éventuellement négative si l'indice du milieu est imaginaire pur.

Bien sûr, si le milieu était anisotrope et traversé par une onde polarisée différemment de ses vibrations propres, on pourrait avoir $\langle d^2\mathcal{M}_{Oz} \rangle$ non nul avec un milieu transparent ! C'est l'effet expérimentalement observé en 1936 par BETH : il utilisait une lame biréfringente, où donc \mathbf{P} et \mathbf{E}_t peuvent être non colinéaires (en un point M) même s'ils ne sont pas déphasés (car le milieu est transparent) et même s'ils sont polarisés rectilignement en M .

1.2 Prise en compte de la conduction électrique

On considère dorénavant que le milieu est diélectrique et conducteur (ohmique).

Supposons qu'il y ait des charges électriques surfaciques de densité σ sur la surface latérale du cylindre (δV), les mêmes que si celle-ci était un bord du milieu matériel ; on va voir que la valeur moyenne du moment, par rapport à Oz , des forces subies compte tenu de ces charges fictives, est identique à celle trouvée au paragraphe précédent 1.1 – et nous la noterons de la même façon.

En appelant (δC) le contour de (δS), on peut écrire ce moment moyen sous la forme

$$\langle d^2\mathcal{M}_{Oz} \rangle = \mathbf{u}_z \cdot \int_0^\infty \oint_{(\delta C)} \mathbf{OM} \times \frac{1}{2} \Re e(\sigma \underline{\mathbf{E}}_t^*) dl dz \quad (7)$$

car, pour la surface latérale du cylindre, le vecteur surface élémentaire extérieur s'écrit $\mathbf{n} dl dz = (dy \mathbf{u}_x - dx \mathbf{u}_y) dz$ en orientant (δC) dans le sens direct (lié à Oz) ; comme la densité σ de charge libre surfacique latérale fictive est donnée par

$$-i\omega \sigma_l = \gamma \underline{\mathbf{E}}_t \cdot \mathbf{n}, \quad (8)$$

et la densité σ_p de charge de polarisation par

$$\sigma_p = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \underline{\mathbf{E}}_t \cdot \mathbf{n}, \quad (9)$$

on en déduit que

$$\underline{\sigma} \equiv \underline{\sigma}_p + \underline{\sigma}_l = \varepsilon_0 (\varepsilon_{r, \text{eff}} - 1) \underline{\mathbf{E}}_t \cdot \mathbf{n} \quad (10)$$

$$\text{où } \varepsilon_{r, \text{eff}} \equiv \varepsilon_r + i \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_0} \quad (11)$$

est la permittivité électrique effective relative, égale au carré de l'indice complexe du milieu (non magnétique). Alors il vient, compte tenu de la décroissance exponentielle de l'amplitude de l'onde transmise,

$$\begin{aligned} \langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle &= \int_0^\infty e^{-2n^* k_0 z} dz \mathbf{u}_z \cdot \oint_{(\delta C)} \mathbf{OM} \times \Re e \frac{\varepsilon_0}{2} [(\varepsilon_{r, \text{eff}} - 1) (\underline{\mathbf{E}}_{0t} \cdot \mathbf{n}) \underline{\mathbf{E}}_{0t}^*] dl \\ &= \frac{1}{2n^* k_0} \Re e \frac{\varepsilon_0}{2} \left[(n^2 - 1) \oint_{(\delta C)} D(\underline{\mathbf{E}}_{0t} \cdot \mathbf{n}) dl \right] \\ &= \frac{\varepsilon_0}{4n^* k_0} \Re e \left[(n^2 - 1) \oint_{(\delta C)} D(\underline{E}_{0t,x} dy - \underline{E}_{0t,y} dx) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

où $D \equiv (\mathbf{u}_z, \mathbf{OM}, \underline{\mathbf{E}}_{0t}^*) = x \underline{E}_{0t,y}^* - y \underline{E}_{0t,x}^*$. La formule de GREEN-RIEMANN [12] permet d'écrire

$$\oint_{(\delta C)} D(\underline{E}_{0t,x} dy - \underline{E}_{0t,y} dx) = \iint_{(\delta S)} \left[\frac{\partial D \underline{E}_{0t,x}}{\partial x} + \frac{\partial D \underline{E}_{0t,y}}{\partial y} \right] dx dy = [\underline{E}_{0t,x} \underline{E}_{0t,y}^* - \underline{E}_{0t,y} \underline{E}_{0t,x}^*] d^2 S \quad (13)$$

$$\text{et on trouve bien } \frac{\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle}{d^2 S} = \frac{\varepsilon_0}{4n^* k_0} \Re e [(n^2 - 1) (i S_3)] ! \quad (4)$$

Discussion

Cette expression est valable même si le milieu linéaire est aussi magnétique : alors il faut rajouter à la densité moyenne de force électrique $\frac{1}{2} \Re e (\underline{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{E}}_t)$, exercée sur les charges surfaciques, celle de la force magnétique $\frac{1}{2} \Re e \left[\left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \frac{\underline{\mathbf{B}}_t}{\mu_0} \times \mathbf{n} \right) \times \underline{\mathbf{B}}_t \right]$, exercée sur les courants d'aimantation surfaciques fictifs, et on obtient encore le résultat ci-dessus (voir annexe II) – alors que $\mu_0 = (\varepsilon_0 c^2)^{-1}$ désigne la perméabilité magnétique du vide.

Quoiqu'il en soit, on voit que l'électromagnétisme permet d'écrire le moment des forces, exercées sur un cylindre (V) de section finie, sous la forme de la somme double des $\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle$ dus à chaque cylindre élémentaire (δV) – les résultantes des forces sur les autres cylindres sont colinéaires à \mathbf{u}_z donc leurs moments sont nuls par rapport à Oz . Alors on voit que dans cette somme, seules les forces exercées sur les charges (et les courants d'aimantation) de la surface latérale extérieure de (V) interviennent, car celles des autres surfaces latérales fictives des (δV) se compensent : la surprise est que l'origine électromagnétique du moment de BETH, en termes d'actions sur des charges et des courants, est due à l'existence concrète de la surface latérale extérieure !

Remarque : on trouverait aussi le même résultat (4) dans le cas d'un conducteur ohmique, par la méthode du sous-paragraphe 1.1, si on y remplaçait $\underline{\mathbf{P}}$ par la polarisation effective

$$\underline{\mathbf{P}}_{\text{eff}} = \underline{\mathbf{P}} + i \frac{\gamma \underline{\mathbf{E}}_t}{\omega} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r \text{eff} - 1) \underline{\mathbf{E}}_t. \quad (14)$$

ATTENTION

On rappelle que deux analyses différentes des actions électromagnétiques sur les milieux sont possibles :

- l'une en termes d'actions partielles en volume sur la distribution de polarisation et d'aimantation éventuelle, puis sur les charges libres et les courants volumiques libres et de polarisation – dans cette analyse (utilisée au § 1.1) on trouve que $d^2 \mathcal{M}_{Oz}$ vient de la densité de *couple volumique* des actions électriques sur la polarisation effective (et des actions magnétiques sur l'aimantation), mais il y a aussi la densité de *force volumique* vraie (ne contribuant pas à $d^2 \mathcal{M}_{Oz}$) dont la composante sur Ox s'écrit $\mathbf{u}_x \cdot [\rho_t \mathbf{E}_t + (\mathbf{j}_t + \partial \mathbf{P} / \partial t) \times \mathbf{B}_t] + \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{F}_v^e + F_{vx}^m$ avec $\mathbf{F}_v^e = (\mathbf{P} \cdot \text{grad}) \mathbf{E}_t$ et $F_{vx}^m = \mathbf{I} \cdot \partial \mathbf{B}_t / \partial x$;
- l'autre en termes d'actions équivalentes sur l'ensemble global des charges et des courants de toute nature (*i.e.* regroupant les charges et les courants volumiques et surfaciques libres, les charges volumique et surfacique de polarisation, le courant volumique de polarisation, et enfin les courants volumique et surfacique d'aimantation) ; dans notre étude, seules les *actions en surface* (calculées dans ce sous-paragraphe) contribuent à $d^2 \mathcal{M}_{Oz}$, mais pas les *actions en volume* – dont la densité de *force volumique* équivalente s'écrit $\rho_t \mathbf{E}_t + (\mathbf{j}_t + \partial \mathbf{P} / \partial t) \times \mathbf{B}_t + \mathbf{f}_v^e + \mathbf{f}_v^m$ où ρ_t et \mathbf{j}_t désignent les densités de charge et de courant libres volumiques (dans notre étude \mathbf{j}_t est le courant de conduction) et $\mathbf{f}_v^e = (-\text{div} \mathbf{P}) \mathbf{E}_t$, $\mathbf{f}_v^m = (\text{rot} \mathbf{I}) \times \mathbf{B}_t$.

Il faut ainsi veiller à bien séparer les actions sur les charges volumiques et surfaciques de polarisation (et sur les courants d'aimantation volumiques et surfaciques), de celles sur la polarisation (et l'aimantation) volumiques : ce sont deux descriptions équivalentes des mêmes actions, qu'il ne faut donc pas ajouter ! Mais leur équivalence n'est pas locale (car $\mathbf{F}_v^e \neq \mathbf{f}_v^e$ et $\mathbf{F}_v^m \neq \mathbf{f}_v^m$), elle est partiellement globale...

2. Lien avec le moment cinétique de l'onde globale dans le milieu d'entrée

Un des intérêts de ces considérations est qu'elles font intervenir une caractéristique intrinsèque du champ électromagnétique dans le vide [13] : son moment cinétique par rapport à O

$$\Sigma_O \equiv \iiint_{\mathbf{R}^3} \mathbf{OM} \times \pi d^3v \quad \text{où} \quad \pi \equiv \mathbf{R} / c^2 \quad (15)$$

désigne la densité de quantité de mouvement électromagnétique, et \mathbf{R} le vecteur de POYNTING.

2.1 Spin du champ électromagnétique et des photons

Un champ d'extension finie dans le vide en dehors des charges étant décrit par une jauge quelconque (\mathbf{A}, V) , on sait [13] que Σ_O se décompose en un terme

$$\varepsilon_0 \iiint_{\mathbf{R}^3} \mathbf{OM} \times (E_x \mathbf{grad} A_x + E_y \mathbf{grad} A_y + E_z \mathbf{grad} A_z) d^3v \text{ dit orbital (à cause de la présence}$$

de l'opérateur gradient qui est lié à l'opérateur quantité de mouvement),

plus un terme propre $\iiint_{\mathbf{R}^3} \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{A} d^3v$ – comme dans l'interprétation corpusculaire par les photons,

leur spin étant $\pm \hbar$. Notons bien que cette décomposition est valable pour toute jauge, mais si on veut donner une signification physique précise à chacun de ses termes, il faut préciser la jauge choisie ; pour assimiler le terme propre au spin du champ créé par une distribution de charges et de courants d'extension finie on prend sa jauge naturelle (*i.e.* celle des potentiels retardés).

Dans le cas d'une onde plane progressive dans le vide, pour fixer les idées on pourrait considérer qu'elle est engendrée par un dipôle de HERTZ situé à très grande distance. Comme ses potentiels retardés dépendent de l'angle entre la direction d'émission et celle du moment dipolaire, on voit tout de suite qu'il existe une infinité de jauges de LORENTZ en $\exp-i(\omega t - k_0 z)$ décrivant une onde plane monochromatique se propageant dans le sens de Oz ; les différences entre elles résident dans l'amplitude complexe de $V = c A_z$.

Pour le champ dans le vide $\{1\}$ occupant n'importe quelle portion du prolongement du cylindre (δV) , la composante sur Oz du terme orbital est nulle toujours (à l'ordre de $d^2 S$). De plus, la densité volumique de spin sur Oz de l'onde incidente de champ électrique complexe $\underline{\mathbf{E}}_i$ a une valeur moyenne indépendante de la jauge $(\underline{\mathbf{A}}_i, V_i)$ choisie en $\exp-i(\omega t - k_0 z)$ car

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d^3 \sigma_{Oz}^i}{d^3 v} \right\rangle &= \mathbf{u}_z \cdot \frac{1}{2} \Re e \left(\varepsilon_0 \underline{\mathbf{E}}_i^* \times \underline{\mathbf{A}}_i \right) = -\frac{1}{2k_0} \Im m \left[\varepsilon_0 \underline{\mathbf{E}}_i^* \cdot (ik_0 \mathbf{u}_z \times \underline{\mathbf{A}}_i) \right] \\ &= -\frac{1}{2k_0} \Im m \left(\varepsilon_0 \underline{\mathbf{E}}_i^* \cdot \underline{\mathbf{B}}_i \right) = -\frac{1}{2\omega} \Im m \left(\varepsilon_0 \underline{\mathbf{E}}_i^* \cdot \mathbf{u}_z \cdot \underline{\mathbf{E}}_i \right) \end{aligned} \quad (16)$$

donc

$$\boxed{\left\langle \frac{d^3 \sigma_{Oz}^i}{d^3 v} \right\rangle = -\frac{\varepsilon_0}{2\omega} S_{3,i} = -\frac{\langle w_i \rangle}{\omega} s_{3,i} = -\frac{1}{\omega c} \frac{d^2 \Phi_i}{d^2 S} s_{3,i}} \quad (17)$$

où w_i désigne la densité d'énergie électromagnétique de l'onde incidente monochromatique, $s_{3,i}$ son troisième paramètre de STOKES réduit, et $\frac{d^2 \Phi_i}{d^2 S}$ son éclairement normal (soit la norme de son vecteur de POYNTING moyen).

Pour exprimer $S_{3,i}$ il est intéressant d'utiliser les composantes $(\underline{\mathbf{E}}_{i-}, \underline{\mathbf{E}}_{i+})$ de $\underline{\mathbf{E}}_i$ dans la nouvelle base orthonormée $(\mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+) \equiv \left(\frac{\mathbf{u}_x - i \mathbf{u}_y}{\sqrt{2}}, \frac{\mathbf{u}_x + i \mathbf{u}_y}{\sqrt{2}} \right)$, et de définir les nouveaux paramètres

S'_j correspondants, qui se déduisent des anciens par des relations très simples¹ : en effet, on vérifie facilement que

$$\boxed{S'_{0i} \equiv |E_{i-}|^2 + |E_{i+}|^2 = |E_{ix}|^2 + |E_{iy}|^2 \equiv S_{0i}} \quad \boxed{S'_{0i} s'_{1i} \equiv S'_{1i} \equiv |E_{i-}|^2 - |E_{i+}|^2 = S_{3i} \equiv S_{0i} s_{3i}} \quad (18)$$

$$S'_{0i} s'_{2i} \equiv S'_{2i} = S'_{1i} \equiv S_{0i} s_{1i} \quad \text{et} \quad S'_{0i} s'_{3i} \equiv S'_{3i} = S_{2i} \equiv S_{0i} s_{2i} \quad (19)$$

où S_{0i} et S'_{0i} sont appelés, au sens vague, l'« intensité » de l'onde incidente – et dans la conclusion puis l'annexe III nous évoquerons des relations analogues pour l'onde réfléchie (écrites en remplaçant l'indice i par r). Attention : dans ces relations, les « prime » ne désignent pas les parties réelles.

On obtient exactement les mêmes résultats (17)-(18) avec la description photonique du champ, où on dit qu'un photon de l'onde incidente (se propageant dans le sens de \mathbf{u}_z) a l'énergie $\hbar\omega$, et le spin $\hbar\mathbf{u}_z$ (resp. $-\hbar\mathbf{u}_z$) pour la composante circulaire gauche – d'amplitude E_{i+} (resp. droite d'amplitude E_{i-}) – donc pour $s_{3i} = -1$ (resp. $+1$). Autrement dit, si on admet que l'énergie du photon est $\hbar\omega$, les expressions (17)-(18) montrent que la composante sur \mathbf{u}_z du spin du photon est \hbar (resp. $-\hbar$) s'il est circulaire gauche (resp. droit) ; et si les photons ont une polarisation parfaite quelconque, on peut la décrire comme un état pur qui est une superposition cohérente des polarisations circulaires gauche et droite, donc la valeur moyenne de l'observable spin sur \mathbf{u}_z est

$$\frac{|E_{i+}|^2}{|E_{i+}|^2 + |E_{i-}|^2} \hbar + \frac{|E_{i-}|^2}{|E_{i+}|^2 + |E_{i-}|^2} (-\hbar) = -s'_{1i} \hbar = -s_{3i} \hbar.$$

¹ La transformation de ces paramètres a une interprétation géométrique très élégante, car tout paramètre de STOKES réduit $\langle s_j \rangle$ peut être considéré [9-11] comme une coordonnée d'un point P sur un axe diamétral (Δ_j) correspondant à $\langle s_j \rangle$ dans la sphère de POINCARÉ (Σ). Une de ses propriétés fondamentales est que $\langle s_j \rangle \equiv \langle S_0 \rangle \langle s_j \rangle$ s'écrit comme la différence des moyennes des carrés des modules des composantes de la polarisation associée à P sur une base orthonormée associée aux intersections de (Δ_j) avec la surface de (Σ), car tout changement de base orthonormée des états de polarisation correspond (moyennant un choix judicieux de l'ordre des vecteurs de la seconde base) à une rotation d'axes de (Σ) – dont la forme sphérique rappelle l'équivalence entre toutes les bases orthonormées des états de polarisation. Dans le cas de l'axe (Δ_3) correspondant au troisième paramètre de STOKES réduit pour la base orthonormée $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)$, les intersections de cet axe avec la surface de (Σ) sont associées aux polarisations circulaires droite et gauche donc à la base orthonormée $(\mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+)$; les relations (18)-(19) entre les s_j et les s'_j correspondent bien à une rotation de 120° pour (Σ) autour de son axe diamétral de cosinus directeurs proportionnels à (1,1,1) dans $O_S s_1 s_2 s_3$.

2.2 Indépendance apparente des photons des ondes incidente et réfléchie

Grâce à la relation (17), on trouve que le résultat (6) pour la réflexion en incidence normale s'écrit

$$\boxed{\left\langle \frac{d^2 \mathcal{M}_{Oz}}{d^2 S} \right\rangle = \frac{\varepsilon_0 c}{2\omega} (S_{3r} - S_{3i}) = \frac{\varepsilon_0 S_{0i}}{2} \frac{c}{\omega} (R-1) s_{3i} = \left\langle \frac{d^3 \sigma_{Oz}^i}{d^3 v} \right\rangle (1-R) c = -\frac{1}{\omega} \frac{d^2 \Phi_i}{d^2 S} (1-R) s_{3i} \quad (20)}$$

De même que dans l'expérience de BETH, on met en évidence le moment des forces lié à la différence entre S_{3i} et $S_{3r} = R S_{3i}$ seulement², qui est due non pas à la réflexion sur un milieu absorbant anisotrope, mais à l'absorption progressive de l'onde dans {2}. Ce résultat (20) étant une combinaison linéaire de S_{3i} et S_{3r} , il se généralise aux cas de polarisation partielle en remplaçant ces paramètres instantanés par leurs moyennes (qui sont en fait les vrais paramètres de STOKES) ; d'ailleurs en termes de physique statistique quantique, une polarisation partielle est un mélange d'états purs.

D'après la conservation du moment cinétique global d'un système isolé, on sait que $\left\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \right\rangle$ est égal au flux moyen – rentrant dans (δV) – du vecteur courant de moment cinétique électromagnétique par rapport à Oz . Une interprétation remarquable (quoique simpliste) de (20) consiste à dire d'abord d'abord que le moment orbital n'intervient pas, car le flux moyen de ce courant de moment cinétique total s'écrit $\left\langle d^3 \sigma_{Oz}^i / d^3 v \right\rangle (R-1) c d^2 S$, mais surtout que les photons des ondes incidente et réfléchie se comportent comme s'ils étaient des particules classiques indépendantes !

Comparaison avec les flux d'énergie et de quantité de mouvement de l'onde

Une telle indépendance est bien connue pour certaines caractéristiques des ondes incidente et réfléchie dans {1} transparent en incidence normale (donc se propageant parallèlement à Oz). C'est déjà le cas pour la densité d'énergie $w = w_i + w_r$ et son vecteur courant $\mathbf{R} = \mathbf{R}_i + \mathbf{R}_r$ (voir [1] annexe II, et [15-16]) ; alors on vérifie facilement que c'est aussi le cas pour la densité π de quantité de mouvement électromagnétique, ainsi que pour le vecteur courant $-\mathbf{T}_z \equiv -\varepsilon_0 \left[(2E_z \mathbf{E} - \mathbf{E}^2 \mathbf{u}_z) / 2 \right] - \left[(2B_z \mathbf{B} - \mathbf{B}^2 \mathbf{u}_z) / 2\mu_0 \right]$ de π_z , mais pas pour le vecteur courant $-\mathbf{T}_x \neq \mathbf{0}$ (resp. $-\mathbf{T}_y$) de $\pi_x = 0$ (resp. π_y). On en déduit que la puissance moyenne dissipée dans (δV) est

$$\left\langle d^2 P_d \right\rangle = (1-R) d^2 \Phi_i \quad (21)$$

et que la force moyenne exercée sur (δV) est

$$\left\langle d^2 \mathbf{F} \right\rangle = \frac{\langle \mathbf{R}_i \rangle - \langle \mathbf{R}_r \rangle}{c} d^2 S = \frac{1+R}{c} \langle \mathbf{R}_i \rangle d^2 S ; \quad (22)$$

la concision des expressions (20)-(22) et la réussite de leur interprétation corpusculaire simple vient de cette indépendance miraculeuse.

² Il ne faut pas être surpris de voir que des effets du spin du photon s'expriment naturellement à l'aide des paramètres de STOKES : l'analogie entre ces paramètres et les composantes de la décomposition de l'observable spin – comme la matrice de cohérence et l'opérateur densité – sur les matrices de PAULI a été signalée assez tôt dans l'histoire de la mécanique quantique [14].

Applications numériques

Choisissons pour $\{2\}$ un métal mauvais réflecteur, comme le tungstène ou le bismuth : $R \cong 0,5$ dans le visible. Avec un laser hélium-néon ordinaire envoyant sur sa surface, à la longueur d'onde de 632,8 nm, un flux énergétique de 5 mW dans un faisceau de 1 mm^2 de section polarisé circulairement, on trouve $|\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle / d^2 S| \cong 8,4 \cdot 10^{-19} \text{ N.m/mm}^2$. Nul doute que cet effet serait difficile à détecter ! Rappelons que le premier laser date de 1961, soit 25 ans après l'expérience de BETH...

La situation est plus favorable si on augmente le flux du laser (peu importe sa section pourvu que le faisceau soit entièrement reçu par le dioptre) et si on diminue la pulsation : ainsi, en choisissant un laser de grande énergie (comme ceux utilisés pour le découpage des métaux) émettant un faisceau de 15 kW dans l'infrarouge à 10,6 μm , on obtiendrait $|\langle \mathcal{M}_{Oz} \rangle| \cong 4,2 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}$ si R gardait dans l'infrarouge la même valeur que dans le visible ! Mais comme dans l'infrarouge la conductivité γ des métaux est quasiment réelle, et que le courant de conduction l'emporte largement devant les courants de déplacement et de polarisation, le carré de n^2 est quasiment imaginaire pur et $|n| \gg 1$; alors le calcul approché du facteur de réflexion montre que $1 - R$ est quasiment proportionnel à $|\omega/\gamma|^{1/2}$ (ce qui a été vérifié par HAGEN et RUBENS dans l'infrarouge thermique), donc $\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle / d^2 S$ est quasi proportionnel à $\omega^{-1/2}$ au lieu de ω^{-1} ...

Quoi qu'il en soit, ces faibles moments sont bien sûr plus efficaces au niveau microscopique [8].

3. Cas de l'incidence oblique ; comparaison entre les effets ondulatoires pour le spin, l'impulsion et l'énergie

3.1 Étude des moments

3.1.1 Expression directe de $\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle$

Il est facile d'étendre les études faites par l'électromagnétisme au cas de l'incidence oblique d'angle θ . Dans ce but, nous exprimerons encore les vecteurs dans la base liée à $Oxyz$, et nous choisissons les axes de façon que Oxz soit parallèle au plan d'incidence ; donc les composantes de \mathbf{u}_t sont $(u_{tx}, 0, u_{tz})$ telles que $u_{tx}^2 + u_{tz}^2 = 1$, et le vecteur de composantes $(u_{tz}, 0, -u_{tx})$ est unitaire normal à \mathbf{u}_t – complexe en général puisque θ est non nul et n est complexe. Afin de calculer le moment des actions électriques, on peut reprendre les équations (1)-(13) en utilisant les notations de [2] pour les nouvelles composantes $(\underline{E}_{0t}^P u_{tz}, \underline{E}_{0t}^S, -\underline{E}_{0t}^P u_{tx})$ de $\underline{\mathbf{E}}_{0t}$: elles sont définies de façon à respecter la nullité de $\underline{\mathbf{E}}_{0t} \cdot \mathbf{u}_t$, et $(\underline{E}_{0t}^P, \underline{E}_{0t}^S)$ sont les composantes de $\underline{\mathbf{E}}_{0t}$ avec lesquelles nous définirons les paramètres de STOKES de l'onde transmise [2] sur une base orthonormée constituée de vecteurs normaux à \mathbf{u}_t . Alors dès la relation (1) on voit que \underline{E}_{0tz} n'intervient pas, et dans (2)-(13) il suffit de remplacer \underline{E}_{0ty} par \underline{E}_{0t}^S , et \underline{E}_{0tx} par $\underline{E}_{0t}^P u_{tz}$, ce qui fait apparaître $S_{2t} \equiv 2 \Re e(\underline{E}_{0t}^P \underline{E}_{0t}^{S*})$ et $S_{3t} \equiv 2 \Im m(\underline{E}_{0t}^P \underline{E}_{0t}^{S*})$; on trouve

$$\frac{\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle}{d^2 S} = \frac{1}{2n^* k_0} \Re e \frac{\varepsilon_0}{2} \left[(n^2 - 1) 2i \Im m(u_{i,z} \underline{E}_{0i}^P \underline{E}_{0i}^{S*}) \right] = -\frac{\varepsilon_0 c}{2\omega} n' (u'_{i,z} S_{3i} + u''_{i,z} S_{2i}) \quad (23)$$

avec $u''_{i,z} = 1 - \frac{\sin^2 \theta}{n^2}$. (24)

Les relations entre les paramètres de STOKES de l'onde transmise en $z = 0_+$ et de l'onde incidente (définis de façon analogue) sont données [2] par

$$\begin{aligned} S_{0i} &= |\tau_p|^2 |\underline{E}_{Pi}|^2 + |\tau_s|^2 |\underline{E}_{Si}|^2 = \frac{|\tau_p|^2 + |\tau_s|^2}{2} S_{0i} + \frac{|\tau_p|^2 - |\tau_s|^2}{2} S_{1i} \\ S_{1i} &= |\tau_p|^2 |\underline{E}_{Pi}|^2 - |\tau_s|^2 |\underline{E}_{Si}|^2 = \frac{|\tau_p|^2 - |\tau_s|^2}{2} S_{0i} + \frac{|\tau_p|^2 + |\tau_s|^2}{2} S_{1i} \\ S_{2i} &= 2 \Re e (\tau_p \tau_s^*) \Re e (\underline{E}_{Pi} \underline{E}_{Si}^*) - 2 \Im m (\tau_p \tau_s^*) \Im m (\underline{E}_{Pi} \underline{E}_{Si}^*) \\ &= \Re e (\tau_p \tau_s^*) S_{2i} - \Im m (\tau_p \tau_s^*) S_{3i} \\ S_{3i} &= 2 \Im m (\tau_p \tau_s^*) \Re e (\underline{E}_{Pi} \underline{E}_{Si}^*) + 2 \Re e (\tau_p \tau_s^*) \Im m (\underline{E}_{Pi} \underline{E}_{Si}^*) \\ &= \Im m (\tau_p \tau_s^*) S_{2i} + \Re e (\tau_p \tau_s^*) S_{3i} \end{aligned} \quad (25)$$

où τ_p et τ_s désignent les coefficients de transmission des composantes P et S par le dioptre *Oxy*, donc

$$\frac{\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle}{d^2 S} = -\frac{\varepsilon_0 c}{2\omega} n' \left[\Im m(u_{i,z} \tau_p \tau_s^*) S_{2i} + \Re e(u_{i,z} \tau_p \tau_s^*) S_{3i} \right]. \quad (26)$$

Cela implique que $\frac{\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle}{d^2 S}$ est nul pour les polarisations P et S de l'onde incidente, et toutes celles

telles que le déphasage retard de E_i^P par rapport à E_i^S soit $\arg \frac{E_{0i}^P}{E_{0i}^S} = \arg \frac{\tau_s}{u_{i,z} \tau_p}$; ce sont forcément

les cas où la *projection* sur *Oxy* de la polarisation du champ *électrique* de l'onde transmise est rectiligne, puisque les composantes de l'amplitude complexe \underline{E}_{0i} de l'onde incidente sont $(\underline{E}_{0i}^P u_{i,z}, \underline{E}_{0i}^S, -\underline{E}_{0i}^P u_{i,x})$ dans la base liée à *Oxyz*.

3.1.2 Influence des interférences entre l'onde incidente et l'onde réfléchie

Le calcul montre qu'en incidence oblique $\frac{\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle}{d^2 S}$ n'est plus égal à $-\frac{\varepsilon_0 c}{2\omega} (S_{3i} - S_{3r}) \cos^2 \theta$; l'interprétation corpusculaire simple est donc prise en défaut ici, ce qui a le mérite de nous rappeler que tout quanton a un comportement irréductiblement ondulatoire faisant que pour $\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle$ des effets d'interférences peuvent *a priori* se produire entre l'onde incidente et l'onde réfléchie.

En effet, dans le vide {1}, la densité volumique moyenne de spin sur *Oz* est la somme

$$\left\langle \frac{d^3 \sigma_{Oz}^{(1)}}{d^3 v} \right\rangle = \left\langle \frac{d^3 \sigma_{Oz}^i}{d^3 v} \right\rangle + \left\langle \frac{d^3 \sigma_{Oz}^r}{d^3 v} \right\rangle + \left\langle \frac{d^3 \sigma_{Oz}^{ir}}{d^3 v} \right\rangle \quad (27)$$

des densités de l'onde incidente, de l'onde réfléchie, et d'un terme d'interférences qui s'écrit

$$\left\langle \frac{d^3 \sigma_{Oz}^{ir}}{d^3 v} \right\rangle = \mathbf{u}_z \cdot \frac{\varepsilon_0}{2} \Re e \left(\mathbf{E}_i^* \times \mathbf{A}_r + \mathbf{E}_r^* \times \mathbf{A}_i \right) \quad (28)$$

et qui n'est pas nul *a priori* – contrairement au cas de l'incidence normale ! Ceci enlève toute validité au calcul simplement corpusculaire du flux de spin en incidence oblique.

Quant au calcul électromagnétique du flux moyen du courant de moment cinétique au travers de la surface du cylindre (δV) sur le dioptre, il se heurte à une difficulté d'un autre ordre. En effet, l'expression du vecteur courant du moment cinétique par rapport à Oz faisant intervenir un produit vectoriel par \mathbf{OM} , son flux au travers de (δS) est nul à l'ordre 2 de $d^2 S$, mais son flux sur la surface latérale de (δV) n'est pas nul *a priori*, donc pour le calculer il faut partir de l'expression des tensions de MAXWELL dans la matière. Malheureusement il existe une controverse à ce sujet, car différentes formules sont proposées pour ce tenseur (celle de MAXWELL-MINKOWSKI ou celle de DE BROGLIE-GEHENIAU, etc.) ainsi que pour la densité de quantité de mouvement associée – celle de MINKOWSKI $\mathbf{D} \times \mathbf{B}$ (où \mathbf{D} désigne le déplacement électrique) ou celle d'ABRAHAM $\mathbf{R}/c^2 \dots$ Des expériences ont été tentées pour les départager [17] ; la conclusion est que les tenseurs et les densités qui paraissent en accord avec les mesures dépendent de la situation expérimentale... Nous nous abstenons d'entrer ici dans cette controverse ; nous noterons cependant que la non nullité de $\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle$ est liée au fait que ces tenseurs de MAXWELL-MINKOWSKI, de DE BROGLIE-GEHENIAU, etc., ne sont pas symétriques.

En tout cas nous avons vu que, contrairement à ce qui se passe en incidence normale, l'influence des interférences entre les ondes incidente et réfléchie n'est pas nulle concernant la densité de spin dans {1} ainsi que $\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle$ – qui dépend du champ transmis dans {2}, lequel est lié à l'état d'interférences des ondes incidente et réfléchie sur le dioptre. Or par mégarde, on a d'autant plus tendance à oublier l'influence de ces interférences sur une façon de calculer $\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle$ que, miraculeusement, elle est nulle en incidence normale (20) ; et nous allons voir que pour $\langle d^2 P_d \rangle$ et $\langle d^2 \mathbf{F} \rangle$ il en est de même en incidence *oblique* !

3.2 Comparaison avec l'effet des interférences sur d'autres flux

Signalons que, même en incidence oblique, $\langle d^2 P_d \rangle$ (et $\langle d^2 \mathbf{F} \rangle$) sont respectivement égaux aux flux moyens entrants des courants d'énergie (et de quantité de mouvement) au travers de (δS) : en effet, la variation de l'énergie (et de la quantité de mouvement, aussi bien selon MINKOWSKI qu'ABRAHAM) dans (δV) est nulle sur une période ; ensuite, les normes des amplitudes complexes des champs ne dépendent que de z , donc les flux des courants d'énergie (et de quantité de mouvement) sont nuls au travers de la surface latérale du cylindre (pour le prouver il suffit de sommer par tranches de hauteur dz en notant que les normales à la surface latérale sont toutes coplanaires) ; et enfin, à cause de l'absorption par le milieu {2}, leurs flux sont nuls en $z = \infty$.

3.2.1 Flux d'énergie au travers du dioptre

Le terme d'interférences pour le vecteur de POYNTING moyen de l'onde globale dans le milieu {1}, d'admittance Y_1 que nous supposons momentanément complexe pour plus de généralité, est

$$\begin{aligned} \Re \left(\underline{\mathbf{E}}_i^* \times \underline{\mathbf{H}}_r + \underline{\mathbf{E}}_r^* \times \underline{\mathbf{H}}_i \right) &= \Re \left[\underline{\mathbf{E}}_i^* \times Y_1 (\mathbf{u}_r \times \underline{\mathbf{E}}_r) + \underline{\mathbf{E}}_r^* \times Y_1 (\mathbf{u}_i \times \underline{\mathbf{E}}_i) \right] \\ &= \Re \left\{ Y_1 \left[(\underline{\mathbf{E}}_i^* \cdot \underline{\mathbf{E}}_r) \mathbf{u}_r - (\underline{\mathbf{E}}_i^* \cdot \mathbf{u}_r) \underline{\mathbf{E}}_r + (\underline{\mathbf{E}}_r^* \cdot \underline{\mathbf{E}}_i) \mathbf{u}_i - (\underline{\mathbf{E}}_r^* \cdot \mathbf{u}_i) \underline{\mathbf{E}}_i \right] \right\} \\ &= \Re \left(\underline{\mathbf{E}}_i^* \cdot \underline{\mathbf{E}}_r \right) \Re Y_1 (\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_r) + \Im m \left(\underline{\mathbf{E}}_i^* \cdot \underline{\mathbf{E}}_r \right) \Im m Y_1 (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_r) - \Re \left\{ Y_1 \left[(\underline{\mathbf{E}}_i^* \cdot \mathbf{u}_r) \underline{\mathbf{E}}_r + (\underline{\mathbf{E}}_r^* \cdot \mathbf{u}_i) \underline{\mathbf{E}}_i \right] \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

où $\underline{\mathbf{H}}_i$ (resp. $\underline{\mathbf{H}}_r$) et \mathbf{u}_i (resp. \mathbf{u}_r) désignent le champ magnétique complexe et le vecteur unitaire dirigé dans le même sens que le vecteur de propagation de l'onde incidente (resp. réfléchie). Introduisons $\mathbf{N} \equiv \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_r$, colinéaire à la normale \mathbf{u}_z au dioptre qui est encore la bissectrice extérieure des axes de vecteurs directeurs \mathbf{u}_i et \mathbf{u}_r . On a $(\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_r)(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_r) = 1 - 1 = 0$, mais aussi \mathbf{u}_i et \mathbf{u}_r réels, donc

$$\left\{ \Re \left(\underline{\mathbf{E}}_i^* \times \underline{\mathbf{H}}_r + \underline{\mathbf{E}}_r^* \times \underline{\mathbf{H}}_i \right) \cdot \mathbf{N} = \Im m \left(\underline{\mathbf{E}}_i^* \cdot \underline{\mathbf{E}}_r \right) \Im m Y_1 N^2 - \Re \left\{ Y_1 \left[(\underline{\mathbf{E}}_i^* \cdot \mathbf{u}_r) (\underline{\mathbf{E}}_r \cdot \mathbf{N}) + (\underline{\mathbf{E}}_r^* \cdot \mathbf{u}_i) (\underline{\mathbf{E}}_i \cdot \mathbf{N}) \right] \right\} \right\}; \quad (30)$$

puis, comme

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_r \cdot \mathbf{N} &= \underline{\mathbf{E}}_r \cdot (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_r) = \underline{\mathbf{E}}_r \cdot \mathbf{u}_i \\ \underline{\mathbf{E}}_i \cdot \mathbf{N} &= \underline{\mathbf{E}}_i \cdot (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_r) = -\underline{\mathbf{E}}_i \cdot \mathbf{u}_r \end{aligned} \quad (31)$$

il vient

$$\begin{aligned} \Re \left\{ Y_1 \left[(\underline{\mathbf{E}}_i^* \cdot \mathbf{u}_r) (\underline{\mathbf{E}}_r \cdot \mathbf{N}) + (\underline{\mathbf{E}}_r^* \cdot \mathbf{u}_i) (\underline{\mathbf{E}}_i \cdot \mathbf{N}) \right] \right\} &= \Re \left\{ Y_1 \left[(\underline{\mathbf{E}}_i^* \cdot \mathbf{u}_r) (\underline{\mathbf{E}}_r \cdot \mathbf{u}_i) - (\underline{\mathbf{E}}_i \cdot \mathbf{u}_r) (\underline{\mathbf{E}}_r^* \cdot \mathbf{u}_i) \right] \right\} \\ &= -2 \Im m Y_1 \Im m \left[(\underline{\mathbf{E}}_i^* \cdot \mathbf{u}_r) (\underline{\mathbf{E}}_r \cdot \mathbf{u}_i) \right] \end{aligned} \quad (32)$$

d'où enfin

$$\left\{ \Re \left(\underline{\mathbf{E}}_i^* \times \underline{\mathbf{H}}_r + \underline{\mathbf{E}}_r^* \times \underline{\mathbf{H}}_i \right) \cdot \mathbf{N} = \Im m Y_1 \left\{ \Im m \left(\underline{\mathbf{E}}_i^* \cdot \underline{\mathbf{E}}_r \right) N^2 + 2 \Im m \left[(\underline{\mathbf{E}}_i^* \cdot \mathbf{u}_r) (\underline{\mathbf{E}}_r \cdot \mathbf{u}_i) \right] \right\} \right\}. \quad (33)$$

Dans le vide ou un milieu transparent {1}, Y_1 est réel donc le flux moyen du terme d'interférences du vecteur de POYNTING au travers du dioptre est nul, quelle que soit l'incidence ! On en déduit le flux rentrant de $\langle \mathbf{R} \rangle$ au travers de (δS) en $z = 0$

$$\langle \mathbf{R} \rangle(0) \cdot d^2 S \mathbf{u}_z = \left[\langle \mathbf{R}_i \rangle + \langle \mathbf{R}_r \rangle \right] \cdot d^2 S \mathbf{u}_z = c \left[\langle w_i \rangle \mathbf{u}_i + \langle w_r \rangle \mathbf{u}_r \right] \cdot d^2 S \mathbf{u}_z \quad (34)$$

d'où l'expression de la puissance moyenne dissipée par unité de surface

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\langle d^2 P_d \rangle}{d^2 S} &= \frac{\epsilon_0 c}{2} \cos \theta \left\{ (1 - R_P) \left| E_{0i}^P \right|^2 + (1 - R_S) \left| E_{0i}^S \right|^2 \right\} c \\ &= \frac{\epsilon_0 c}{2} \cos \theta S_{0i} \left[\left(1 - \frac{R_S + R_P}{2} \right) + \frac{R_S - R_P}{2} s_{1i} \right] \end{aligned}} \quad (35)$$

où R_P et R_S désignent les facteurs de réflexion des composantes P et S par le dioptre.

3.2.2 Flux de quantité de mouvement au travers du dioptre

Ce flux est l'opposé de celui des tensions de MAXWELL (\mathbf{T}), alors $\langle d^2 \mathbf{F} \rangle$ est donné par l'expression commode $\langle d^2 \mathbf{F} \rangle = -\langle (\mathbf{T})(0_-) \rangle \cdot \mathbf{u}_z d^2 S$; il est nécessaire d'écrire ici (\mathbf{T}) en $z = 0_-$ et

non pas 0, pour tenir compte des forces dues aux charges surfaciques (et aux courants surfaciques d'aimantation) susceptibles de se trouver sur le dioptre. Pour calculer facilement les composantes de $\langle d^2\mathbf{F} \rangle$, on rappelle qu'en $z = 0_-$, le milieu d'entrée étant le vide,

$$\underline{E}_x = \underline{E}_{0i}^P e^{-i\omega t} (1+r_p) \cos\theta, \quad \underline{E}_y = \underline{E}_{0i}^S e^{-i\omega t} (1+r_s) \quad \text{et} \quad \underline{E}_z = \underline{E}_{0i}^P e^{-i\omega t} (-1+r_p) \sin\theta \quad (36)$$

$$c\underline{B}_x = \underline{E}_{0i}^S e^{-i\omega t} (-1+r_s) \cos\theta, \quad c\underline{B}_y = \underline{E}_{0i}^P e^{-i\omega t} (1-r_p) \quad \text{et} \quad c\underline{B}_z = \underline{E}_{0i}^S e^{-i\omega t} (1+r_s) \sin\theta \quad (37)$$

où r_p et r_s désignent les coefficients de réflexion des composantes P et S par le dioptre, donc

$$\begin{aligned} \frac{\langle d^2 F_x \rangle}{d^2 S} &= -\mathbf{u}_x \cdot \langle (\mathbf{T})(0_-) \rangle \mathbf{u}_z = -\frac{1}{2} \Re e \left\{ \varepsilon_0 \underline{E}_x^* \underline{E}_z + \frac{1}{\mu_0} \underline{B}_x^* \underline{B}_z \right\} \\ &= -\frac{\varepsilon_0}{2} \sin\theta \cos\theta \Re e \left\{ (1+r_p^*) (-1+r_p) |\underline{E}_{0i}^P|^2 + (-1+r_s^*) (1+r_s) |\underline{E}_{0i}^S|^2 \right\} \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \sin\theta \cos\theta \left\{ (1-R_p) |\underline{E}_{0i}^P|^2 + (1-R_S) |\underline{E}_{0i}^S|^2 \right\} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\langle d^2 F_y \rangle}{d^2 S} &= -\mathbf{u}_y \cdot \langle (\mathbf{T})(0_-) \rangle \mathbf{u}_z = -\frac{1}{2} \Re e \left\{ \varepsilon_0 \underline{E}_y^* \underline{E}_z + \frac{1}{\mu_0} \underline{B}_y^* \underline{B}_z \right\} \\ &= -\frac{\varepsilon_0}{2} \sin\theta \Re e \left\{ (1+r_s^*) \underline{E}_{0i}^{S*} (-1+r_p) \underline{E}_{0i}^P - (-1+r_p^*) \underline{E}_{0i}^{P*} (1+r_s) \underline{E}_{0i}^S \right\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

(les deux nombres complexes soustraits sous la partie réelle étant conjugués l'un de l'autre) et

$$\begin{aligned} \frac{\langle d^2 F_z \rangle}{d^2 S} &= -\mathbf{u}_z \cdot \langle (\mathbf{T})(0_-) \rangle \mathbf{u}_z = -\frac{1}{2} \Re e \left\{ \varepsilon_0 \left[\underline{E}_z^* \underline{E}_z - \frac{\|\underline{E}\|^2}{2} \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[\underline{B}_z^* \underline{B}_z - \frac{\|\underline{B}\|^2}{2} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_0 \frac{|\underline{E}_x|^2 + |\underline{E}_y|^2 - |\underline{E}_z|^2}{2} + \frac{|\underline{B}_x|^2 + |\underline{B}_y|^2 - |\underline{B}_z|^2}{2\mu_0} \right\} \\ &= \frac{\varepsilon_0}{4} \left\{ (1+|r_p|^2 + 2r_p') |\underline{E}_{0i}^P|^2 \cos^2\theta + (1+|r_s|^2 + 2r_s') |\underline{E}_{0i}^S|^2 - (1+|r_p|^2 - 2r_p') |\underline{E}_{0i}^P|^2 \sin^2\theta \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4\mu_0 c^2} \left\{ (1+|r_s|^2 - 2r_s') |\underline{E}_{0i}^S|^2 \cos^2\theta + (1+|r_p|^2 - 2r_p') |\underline{E}_{0i}^P|^2 - (1+|r_s|^2 + 2r_s') |\underline{E}_{0i}^S|^2 \sin^2\theta \right\} \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \cos^2\theta \left\{ (1+R_p) |\underline{E}_{0i}^P|^2 + (1+R_S) |\underline{E}_{0i}^S|^2 \right\} \end{aligned} \quad (40)$$

En fonction des paramètres de STOKES de l'onde incidente (notamment son premier paramètre réduit s_{1i}) on trouve

$$\frac{\langle d^2 F_x \rangle}{d^2 S} = \frac{\varepsilon_0}{2} \sin\theta \cos\theta S_{0i} \left[\left(1 - \frac{R_S + R_P}{2} \right) + \frac{R_S - R_P}{2} s_{1i} \right], \quad \frac{\langle d^2 F_y \rangle}{d^2 S} = 0 \quad \text{et} \quad (41)$$

$$\frac{\langle d^2 F_z \rangle}{d^2 S} = \frac{\varepsilon_0}{2} \cos^2\theta S_{0i} \left[\left(1 + \frac{R_S + R_P}{2} \right) - \frac{R_S - R_P}{2} s_{1i} \right]. \quad (42)$$

Ces résultats montrent qu'il n'y a pas d'interférences entre les ondes incidente et réfléchie en ce qui concerne le produit $\langle (\mathbf{T}) \mathbf{u}_z \rangle$ de $\langle (\mathbf{T}) \rangle$ par un vecteur colinéaire à la bissectrice extérieure des directions de propagation de ces ondes ; cela permet donc d'interpréter de façon purement corpusculaire ces phénomènes de « pression » de radiation – quoique les photons aient, comme tous les quanta, des caractères irréductiblement ondulatoires...

Remarque

Il n'y a pas non plus d'interférences entre les composantes S et P de l'onde incidente (et c'est pourquoi $\langle d^2 \mathbf{F} \rangle$ est parallèle au plan d'incidence) ; d'où le fait qu'il suffit d'un seul et judicieux paramètre de STOKES réduit pour exprimer la dépendance du résultat en fonction de la polarisation de l'onde incidente.

Conclusion

L'un des premiers intérêts de cette étude est de tester l'unification de l'électromagnétisme avec les propriétés quantiques des photons. En outre, il est appréciable de savoir que l'on peut remplacer par de simples bilans les longs calculs directs de $\langle d^2 P_d \rangle$, $\langle d^2 \mathbf{F} \rangle$ et surtout $\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle$ en incidence normale (comme ceux des annexes, exprimant le moment moyen $\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle$ dû à l'absorption par pertes magnétiques et diélectriques et ohmiques conjointes) ; ces bilans montrent que $\langle d^2 P_d \rangle$, $\langle d^2 \mathbf{F} \rangle$ et $\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle$ sont indépendants des mécanismes d'absorption du milieu – que ce soit par pertes diélectriques ou magnétiques ou par effet JOULE.

Une telle approche facilite le traitement de situations plus raffinées. Par exemple, on pourrait chercher comment $\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle$ se trouve affecté par la présence d'un champ d'induction magnétique statique supplémentaire \mathbf{B}_s uniforme et normal au dioptre. La légère modification de la polarisation par réflexion dans ce cas est un effet connu depuis longtemps [18], appelé **phénomène magnéto-optique de KERR**. Alors une bonne partie de l'étude de $\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle$ qui en découle, pour une onde incidente normale au dioptre mais de polarisation quelconque (voir annexe III), ne nécessite que l'utilisation de principes de symétrie ou d'invariances.

Cependant, ne croyons pas que l'exploitation des outils développés ci-dessus se limite à l'étude de $\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle$ pour des phénomènes optiques vieillots ! Car nous terminerons cet article en soulevant le problème suivant : quand la réflexion se fait sur un milieu à indice négatif (*i.e.* gaucher) [1] au lieu d'un milieu droitier, le signe de $\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle$ est-il changé ? La réponse est cachée dans l'annexe I...

REMERCIEMENTS

Je suis heureux de remercier Yves DUPONT, professeur en CPGE au lycée Stanislas (Paris), pour le temps consacré à d'intéressantes discussions sur ce sujet.

REFERENCES

- [1] L. DETTWILLER et D. FELBACQ, « Les milieux à indice de réfraction négatif : des composants optiques prometteurs ? », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.* **97** n° 859, 1577-1594, 2003
- [2] L. DETTWILLER, « Un effet d'optique géométrique moderne – L'influence de la polarisation sur la direction des rayons réfractés », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.* **99** n° 871, 177-192, 2005
- [3] L. DETTWILLER, « Propriétés inédites de la biréfringence des cristaux à système cubique du type de la fluorine », présenté au congrès *Horizons de l'optique 2005*, Chambéry, 8-10 novembre 2005
- [4] L. DETTWILLER, « Absence of internal conical refraction with the spatially dispersive index surface of fluorine ; discussion of the orthogonality of the Poynting vector to the index surface », *Opt. Express* **14**, 3339-3344, 2006
- [5] R. A. BETH, « Mechanical Detection and Measurement of the Angular Momentum of Light », *Phys. Rev.* **50**, 115-125, 1936
- [6] voir l'épreuve A (Question de cours) de l'agrégation de physique 1994, partie VI.
- [7] G. DELANNOY, J.-C. JOUAN, O. ÉMILE et A. LE FLOCH, « Observation directe de la rotation d'un objet macroscopique induite par le spin du photon », *J. Phys. IV France* **119**, 169-170, 2004
- [8] E. BRASSELET et T. V. GALSTIAN, « Optical control of molecular orientational dynamics in liquid crystals », *Opt. Commun.* **186**, 291-302, 2000
- [9] M. BORN et E. WOLF, *Principles of optics – Electromagnetic theory of propagation interference and diffraction of light*, 6^e édition, Pergamon, Oxford, 1980 : pp. 30-32.
- [10] C. BROSSEAU, *Fundamentals of Polarized Light – A Statistical Optics Approach*, Wiley Interscience, New York, 1998 : pp. 102-106 et 123-137.
- [11] S. HUARD, *Polarisation de la lumière*, Masson, Paris, 1994 : pp. 23-32.
- [12] R. COUTY et J. EZRA, *Analyse – tome 2 – 1er cycle scientifique, 2e année, préparation aux grandes écoles*, 4^e édition, Armand Colin – collection U, Paris, 1976 : pp. 353-359.
- [13] J.D. JACKSON, *Classical Electrodynamics*, 2^e édition, Wiley, New York, 1975 : p. 333 exercice 7.19 (a).
- [14] U. FANO, « Remarks on the Classical and Quantum-Mechanical Treatment of Partial Polarization », *J. Opt. Soc. Am.* **39**, 859-863, 1949
- [15] L. DETTWILLER, « Sur la prétendue équation de conservation de l'énergie électromagnétique $R + T = 1$ », *Bull. Un. Phys.* **86** n° 742, 473-481, 1992
- [16] L. DETTWILLER, *Optique – 41 exercices & problèmes corrigés accompagnés de rappels de cours*, Dunod, Paris, 1992 : p. 255
- [17] G. ROOSEN et C. IMBERT, « Calcul et mesure des forces et couples appliqués à un cristal uniaxe traversé par l'onde extraordinaire », *Can. J. Phys.* **52**, 1903-1913, 1974
- [18] G. BRUHAT, *Cours de physique générale – Optique*, 6^e édition, Masson, Paris, 1992 : pp. 619-620.

Annexe I

Au moment des forces électriques exprimé par (3) s'ajoute celui des forces magnétiques donné par

$$\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz}^m \rangle = \mathbf{u}_z \cdot \int_0^\infty \frac{1}{2} \Re e(\mathbf{I} \times \mathbf{B}_t^*) dz d^2 S \quad (I.1)$$

Or $\mathbf{I} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_0 \mu_r} \mathbf{B}_t$; en notant $\underline{\mathbf{B}}_{0t}$ l'amplitude complexe du champ d'induction magnétique de l'onde transmise en O , il vient

$$\begin{aligned} \langle d^2 \mathcal{M}_{Oz}^m \rangle &= \int_0^\infty e^{-2n''k_0 z} dz \mathbf{u}_z \cdot \Re e \left[\frac{\mu_r - 1}{\mu_0 \mu_r} \underline{\mathbf{B}}_{0t} \times \underline{\mathbf{B}}_{0t}^* \right] d^2 S \\ &= \frac{1}{2n''k_0} \Re e \left[\frac{\mu_r - 1}{\mu_0 \mu_r} (\underline{B}_{0tx} \underline{B}_{0ty}^* - \underline{B}_{0ty} \underline{B}_{0tx}^*) \right] d^2 S \end{aligned} \quad (I.2)$$

donc
$$\frac{\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz}^m \rangle}{d^2 S} = \frac{1}{2n''k_0} \Re e \left[\left(1 - \frac{1}{\mu_r} \right) 2i \Im m \left(\frac{\underline{B}_{0tx} \underline{B}_{0ty}^*}{\mu_0} \right) \right] \quad (I.3)$$

mais $\underline{\mathbf{B}}_t / \sqrt{\mu_0} = n\sqrt{\varepsilon_0} \mathbf{u}_z \times \underline{\mathbf{E}}_t$ d'où $\underline{B}_{0tx} \underline{B}_{0ty}^* / \mu_0 = (-n\sqrt{\varepsilon_0} \underline{E}_{0ty})(n\sqrt{\varepsilon_0} \underline{E}_{0tx})^*$ (I.4)
et

$$\begin{aligned} \frac{\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz}^m \rangle}{d^2 S} &= \frac{-\varepsilon_0 |n|^2}{2n''k_0} \Re e \left[\left(1 - \frac{1}{\mu_r} \right) i \Im m(\underline{E}_{0ty} \underline{E}_{0tx}^*) \right] \\ &= \frac{-\varepsilon_0 |n|^2}{4n''k_0} \Re e \left[\left(-\frac{1}{\mu_r} \right) (-i S_{3i}) \right] = \frac{\varepsilon_0 c |n|^2}{4n'' \omega} \Im m \left(\frac{1}{\mu_r} \right) S_{3i} \\ &= -\frac{\varepsilon_0 c |n|^2}{4n'' \omega} \frac{\mu_r''}{|\mu_r|^2} S_{3i} = -\frac{\varepsilon_0 c |n|^2}{4n'' \omega} \frac{\mu_r''}{|\mu_r|^2} |\tau|^2 S_{3i} \end{aligned} \quad (I.5)$$

Le moment surfacique total s'écrit donc

$$\frac{\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle}{d^2 S} = -\frac{\varepsilon_0 c}{4\omega} A |\tau|^2 S_{3i} \text{ avec } A \equiv \frac{1}{n''} \left(\varepsilon_r'' + |n|^2 \frac{\mu_r''}{|\mu_r|^2} \right) \quad (I.6)$$

Notons que si en plus le milieu est ohmique, pour tenir compte du moment supplémentaire des forces électriques exercées sur les charges libres il suffit de changer ε_r en $\varepsilon_{r,eff}$ et donc A en A_{eff} - ce que nous ferons dorénavant. Rappelons alors que dans tous les métaux un processus de paramagnétisme fonctionne : celui de PAULI, dû au spin des électrons de conduction.

En séparant les parties réelle et imaginaire de la relation $\varepsilon_{r,eff} \mu_r = n^2$ donnant l'indice d'un milieu diélectrique conducteur et magnétique, on obtient un système de deux équations

$$\varepsilon_{r,eff}' \mu_r' - \varepsilon_{r,eff}'' \mu_r'' = n'^2 - n''^2 \quad (I.7)$$

$$\varepsilon_{r,eff}'' \mu_r' + \varepsilon_{r,eff}' \mu_r'' = 2n'n'' \quad (I.8)$$

dont on tire

$$\varepsilon_{r,eff}'' (\mu_r'^2 + \mu_r''^2) = 2n'n'' \mu_r' - (n'^2 - n''^2) \mu_r'' \quad (I.9)$$

et d'où

$$\begin{aligned}
 A_{\text{eff}} &= \frac{1}{n''} \frac{2n'n''\mu_r' - (n'^2 - n''^2)\mu_r'' + |n|^2 \mu_r''}{|\mu_r|^2} = \frac{1}{n''} \frac{2n'n''\mu_r' + 2n''^2 \mu_r''}{|\mu_r|^2} \\
 &= 2 \frac{n'\mu_r' + n''\mu_r''}{|\mu_r|^2} = 2 \Re e \frac{n\mu_r^*}{|\mu_r|^2} = 2 \Re e \frac{n}{\mu_r}
 \end{aligned}
 \tag{I.10}$$

qui est toujours positif à cause de la condition d'onde sortante. Finalement, il vient

$$\frac{\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle}{d^2 S} = -\frac{\varepsilon_0 c}{2\omega} \Re e \left(\frac{n}{\mu_r} \right) |\tau|^2 S_{3i} = -\frac{\varepsilon_0 c}{2\omega} T S_{3i}
 \tag{I.11}$$

et on retrouve l'expression (6) conformément à l'interprétation donnée au § 2.2.

Annexe II

La contribution à $\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle$ des forces de LAPLACE sur les courants surfaciques d'aimantation s'écrit

$$\begin{aligned} \langle d^2 \mathcal{M}_{Oz}^m \rangle &= \int_0^\infty e^{-2n^* k_0 z} dz \mathbf{u}_z \cdot \oint_{(\delta C)} \mathbf{OM} \times \frac{1}{2} \Re e \left[\left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \frac{\mathbf{B}_{0t}}{\mu_0} \times \mathbf{n} \right) \times \mathbf{B}_{0t}^* \right] dl \\ &= \frac{1}{2n^* k_0} \Re e \frac{1}{2\mu_0} \left\{ \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \mathbf{u}_z \cdot \oint_{(\delta C)} \mathbf{OM} \times \left[\|\mathbf{B}_{0t}\|^2 \mathbf{n} - (\mathbf{B}_{0t}^* \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}_{0t} \right] dl \right\} \quad (\text{II.1}) \\ &= \frac{1}{4n^* k_0} \Re e \left[\left(1 - \frac{1}{\mu_r} \right) \frac{\|\mathbf{B}_{0t}\|^2 d^2 I_1 - d^2 I_2}{\mu_0} \right] \end{aligned}$$

où

$$d^2 I_1 \equiv \oint_{(\delta C)} (\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{OM}, \mathbf{n}) dl = - \oint_{(\delta C)} (x dx + y dy) = - \oint_{(\delta C)} d \mathbf{OM}^2 / 2 = 0 \quad (\text{II.2})$$

et

$$d^2 I_2 \equiv \oint_{(\delta C)} (\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{OM}, \mathbf{B}_{0t}) (\mathbf{B}_{0t}^* \cdot \mathbf{n}) dl = \oint_{(\delta C)} (x \underline{B}_{0t y} - y \underline{B}_{0t x}) (\underline{B}_{0t x}^* dy - \underline{B}_{0t y}^* dx). \quad (\text{II.3})$$

La formule de GREEN-RIEMANN permet d'écrire

$$\begin{aligned} d^2 I_2 &= \iint_{(\delta S)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (x \underline{B}_{0t y} - y \underline{B}_{0t x}) \underline{B}_{0t x}^* + \frac{\partial}{\partial y} (x \underline{B}_{0t y} - y \underline{B}_{0t x}) \underline{B}_{0t y}^* \right] dx dy \\ &= \left[\underline{B}_{0t y} \underline{B}_{0t x}^* - \underline{B}_{0t x} \underline{B}_{0t y}^* \right] d^2 S \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz}^m \rangle}{d^2 S} &= \frac{1}{4n^* k_0} \Re e \left[- \left(1 - \frac{1}{\mu_r} \right) \frac{\underline{B}_{0t y} \underline{B}_{0t x}^* - \underline{B}_{0t x} \underline{B}_{0t y}^*}{\mu_0} \right] \\ &= \frac{1}{2n^* k_0} \Re e \left[\left(1 - \frac{1}{\mu_r} \right) i \Im m \left(\frac{\underline{B}_{0t x} \underline{B}_{0t y}^*}{\mu_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

et on retrouve bien l'expression (I.3).

Annexe III

On considère maintenant qu'il règne un champ d'induction magnétique statique supplémentaire $B_S \mathbf{u}_z$ uniforme et normal au dioptré.

Dans ce cas, pour toute onde proportionnelle à $\exp -i(\omega t - nk_0 z)$ dans {2} il n'y a que deux polarisations possibles. Pour les déterminer il suffit d'appliquer le principe de CURIE : la symétrie de révolution des données du problème, par rapport à Oz , montre immédiatement que la seule paire de polarisations compatible est celle des circulaires gauche et droite. À chacune d'elle est associée un indice complexe, qui dépend de B_S a priori³ : $n_+(B_S)$ et $n_-(B_S)$ respectivement. De plus, la symétrie par rapport à tout plan contenant Oz , appliquée à une onde proportionnelle à $\exp -i(\omega t - nk_0 z)$ dans {2}, donne une autre onde proportionnelle à $\exp -i(\omega t - nk_0 z)$ possible dans {2} mais en présence du champ statique $-B_S \mathbf{u}_z$; comme cette symétrie intervertit les polarisations circulaires droite et gauche, on en déduit que $n_+(B_S) = n_-(-B_S) \neq n_-(B_S)$ a priori. Donc $n_+^*(B_S) \neq n_-^*(B_S)$ en général : le milieu {2} présente un **dichroïsme circulaire dû à B_S** .

Alors, même dans le cas de l'incidence normale, il faut distinguer deux coefficients de réflexion : $r_+(B_S)$ et $r_-(B_S)$ pour chacune des polarisations circulaires gauche et droite. Les relations entre les paramètres de STOKES des ondes incidente et réfléchie sont évidentes dans la base $(\mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+)$ introduite au paragraphe 2.1 ; elles se retrouvent en remplaçant dans (25) l'indice t par r , les S_j par les S'_j , τ_p par r_- et τ_s par r_+ :

$$S'_{0r} = \frac{|r_-|^2 + |r_+|^2}{2} S'_{0i} + \frac{|r_-|^2 - |r_+|^2}{2} S'_{1i} \quad (\text{III.1})$$

$$S'_{1r} = \frac{|r_-|^2 - |r_+|^2}{2} S'_{0i} + \frac{|r_-|^2 + |r_+|^2}{2} S'_{1i} \quad (\text{III.2})$$

$$S'_{2r} = \Re e(r_- r_+^*) S'_{2i} - \Im m(r_- r_+^*) S'_{3i} \quad (\text{III.3})$$

$$S'_{3r} = \Im m(r_- r_+^*) S'_{2i} + \Re e(r_- r_+^*) S'_{3i} \quad (\text{III.4})$$

Les relations très simples entre les S'_j et les S_j – voir par exemple (18)-(19) – donnent donc

$$S_{0r} = \frac{|r_-|^2 + |r_+|^2}{2} S_{0i} + \frac{|r_-|^2 - |r_+|^2}{2} S_{3i} \quad (\text{III.5})$$

$$S_{1r} = \Re e(r_- r_+^*) S_{1i} - \Im m(r_- r_+^*) S_{2i} \quad (\text{III.6})$$

$$S_{2r} = \Im m(r_- r_+^*) S_{1i} + \Re e(r_- r_+^*) S_{2i} \quad (\text{III.7})$$

$$S_{3r} = \frac{|r_-|^2 - |r_+|^2}{2} S_{0i} + \frac{|r_-|^2 + |r_+|^2}{2} S_{3i} \quad (\text{III.8})$$

Supposons que $|r_+(B_S)| = |r_-(B_S)|$; cela donne $S_{0r} = |r_\pm|^2 S_{0i}$ et $S_{3r} = |r_\pm|^2 S_{3i}$ donc $s_{3r} = s_{3i}$: la polarisation (de l'onde) réfléchie a même ellipticité que l'incidente, mais elle est tournée de $\alpha = [\arg r_-(B_S) - \arg r_+(B_S)]/2$ dans le sens direct (associé à Oz) ; et $\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle$ est

³ ou plutôt de l'aimantation statique dans le cas d'un matériau magnétique ordonné (ferromagnétique, ferrimagnétique, etc.).

proportionnel à $S_{3r} - S_{3i} = (|r_{\pm}|^2 - 1)S_{3i}$, donc il est toujours nul pour les polarisations incidentes rectilignes.

Mais en fait $|r_+(B_S)| \neq |r_-(B_S)|$; alors une polarisation parfaite incidente *rectiligne* donne une polarisation réfléchie parfaite d'angle d'ellipticité β tel que

$$S_{3r} = S_{0r} \sin 2\beta \tag{III.9}$$

Ces effets ont été observés avec un électroaimant, en regardant au travers d'une de ses pièces polaires percée la lumière réfléchie sur la face terminale de l'autre pièce polaire, qui est en fer aimanté à saturation [18] ; alors α atteint 20', et β , 5'. Comme pour le fer $|r_-| \cong |r_+| \cong 0,3$ (il est encore moins réfléchissant que le tungstène) cela donne $S_{3r} - S_{3i} \cong 3.10^{-4} S_{0i} - 0$, la polarisation (de l'onde) incidente étant rectiligne ; dans ce cas

$$\frac{\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle}{d^2 S} = \frac{\varepsilon_0 c}{2\omega} (S_{3r} - S_{3i}) = \frac{\varepsilon_0 S_{0i}}{2} \frac{c}{\omega} (\sin 2\beta) \frac{|r_-|^2 + |r_+|^2}{2} = \frac{1}{\omega} \frac{d^2 \Phi_i}{d^2 S} (\sin 2\beta) \frac{|r_-|^2 + |r_+|^2}{2} \tag{III.10}$$

Il y a donc une contrepartie mécanique à l'effet magnéto-optique ; et avec une polarisation incidente rectiligne, $\langle d^2 \mathcal{M}_{Oz} \rangle$ est *a priori* non nul, contrairement au cas où $\mathbf{B}_S = \mathbf{0}$.