

**LES MILIEUX À INDICE DE RÉFRACTION
NÉGATIF : DES COMPOSANTS OPTIQUES
PROMETTEURS ?**

Luc Dettwiller

► **To cite this version:**

Luc Dettwiller. LES MILIEUX À INDICE DE RÉFRACTION NÉGATIF : DES COMPOSANTS OPTIQUES PROMETTEURS ?. Master. 2004. <sfo-00361404>

HAL Id: sfo-00361404

<https://hal-sfo.ccsd.cnrs.fr/sfo-00361404>

Submitted on 14 Feb 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Les milieux à indice de réfraction négatif : des composants optiques prometteurs ?

par **Luc DETTWILLER**

Lycée Blaise Pascal - 63037 Clermont-Ferrand Cedex

dettwillerluc@voila.fr

et **Didier FELBACQ**

Université de Montpellier II - 34095 Montpellier Cedex

RÉSUMÉ

Il est confirmé expérimentalement depuis 2001 que des ondes électromagnétiques peuvent se réfracter à l'entrée de certains milieux cellulaires sans traverser la normale au dioptre ! Ce phénomène, quoique surprenant, n'est sans doute pas la plus intéressante des propriétés de ces méta-matériaux qui pourraient révolutionner les applications de l'optique moderne. Le but de cet article est de décrire synthétiquement la propagation des ondes dans ces milieux, quand on les caractérise par une permittivité électrique ϵ et une perméabilité magnétique μ effectives : on précise les conditions sur ϵ et μ requises pour obtenir de tels milieux (la plus simple d'entre elles étant $\epsilon < 0$ et $\mu < 0$), et on montre bien en quoi leurs propriétés non intuitives se distinguent de celles d'autres milieux inhabituels qui sont les milieux lasers (i.e. amplificateurs).

INTRODUCTION

Quel enseignant de physique n'a pas déjà, sur une copie, barré d'un grand trait rouge le schéma d'un élève ayant dessiné un rayon réfracté du même côté de la normale au dioptre que le rayon incident ? Dorénavant, les professeurs devront prendre au moins quelques précautions oratoires : depuis 2001 en effet, on sait produire expérimentalement en ondes centimétriques de telles réfractions surprenantes [1], appelées « réfractions négatives » ! Dans ce cas, la forme des rayons lumineux est la même que si l'indice de réfraction du second milieu était négatif...

Comment est-ce possible ? Les équations de propagation du champ électromagnétique dans un milieu matériel font apparaître le carré n^2 de son indice complexe ; pourquoi ne retient-on d'habitude que sa racine n à partie réelle positive (l'indice de réfraction n) ? Qu'est-ce qui obligerait parfois à retenir la racine n telle que $n' < 0$? Cela est-il lié à aux propriétés amplificatrices de lumière de certains matériaux (les milieux « lasers »), pour lesquels la partie imaginaire de n (l'indice d'absorption n'') a le signe inverse du cas des milieux usuels, absorbants ?

Pour apporter une réponse nette à toutes ces questions, une incursion dans l'élec-

tromagnétisme des milieux matériels - autrement dit un retour aux sources de l'optique - sera nécessaire... Cela nous permettra, dans une première partie, de donner une première présentation de ces milieux dits « à indice négatif ». Ensuite, nous discuterons les principales lois de la propagation des ondes électromagnétiques monochromatiques dans de tels milieux, dans le cas où ils sont homogènes ; alors nous verrons précisément en quoi elles se distinguent des propriétés des ondes dans les milieux ordinaires, et nous comparerons avec celles d'autres matériaux inhabituels : les milieux amplificateurs de lumière.

Enfin, nous étudierons la réflexion et de la transmission d'une onde incidente sur un dioptre entre un milieu ordinaire et un milieu à indice négatif : nous verrons alors pourquoi se produit ce phénomène de réfraction négative, qui explique la dénomination donnée à ces milieux. Dans les travaux de recherche parus tout récemment sur ce sujet (en particulier depuis 2000), des appellations diverses sont encore données à ces matériaux : milieux « gauchers », etc. Sans présager de la normalisation du vocabulaire scientifique qui interviendra ultérieurement sur ce sujet en plein essor, nous utiliserons plutôt dans cet article l'appellation de « milieu gaucher », car c'est celle dont la justification détaillée apparaîtra en premier.

1. RAPPELS : INDICE COMPLEXE D'UN MILIEU LINÉAIRE LOCAL HOMOGENE ISOTROPE

1.1. Équation d'Helmholtz

On sait bien qu'en régime harmonique de pulsation ω , les représentations complexes (désignées par soulignement, et proportionnelles à $e^{-i\omega t}$) des champs $\underline{\mathbf{E}}$, $\underline{\mathbf{D}}$, $\underline{\mathbf{B}}$ et $\underline{\mathbf{H}}$ dans un milieu immobile isolant linéaire local homogène isotrope se prêtent à un grand nombre de résultats intéressants (cf. annexe 1) ; entre autres, chacune d'elles obéit à la même équation d'HELMHOLTZ, comme :

$$\Delta \underline{\mathbf{E}} + K^2 \underline{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{avec} \quad K^2 = \varepsilon(\omega)\mu(\omega)\omega^2 \quad (1)$$

où $\varepsilon(\omega)$ et $\mu(\omega)$ désignent la permittivité électrique et la perméabilité magnétique complexes du milieu (voir la démonstration dans l'annexe 1, où nous montrons aussi que cette expression se généralise facilement au cas d'un milieu conducteur).

Pour les représentations complexes des champs dans le vide on aurait obtenu des équations similaires à (1), avec $K_0^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ au lieu de K^2 , où ε_0 et μ_0 désignent la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du vide, et $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ la célérité de la lumière dans le vide.

1.2. Définition de l'indice complexe

C'est pour comparer les ondes électromagnétiques dans un tel milieu à celles dans

le vide qu'on définit l'**indice (absolu) complexe** n du milieu, grâce à :

$$K^2 = n^2 K_0^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} ; \tag{2}$$

habituellement on pose que la partie réelle de n , $\Re n \equiv n'$, est positive, ce qui est comode pour les tables de constantes : c 'est justement cette convention qu'il faut se préparer à remettre en cause, car elle nuit à la compréhension des propriétés des matériaux inhabituels que nous allons étudier.

Dans notre milieu on a donc :

$$\boxed{n^2(\omega) = \varepsilon_r(\omega)\mu_r(\omega)} \tag{3}$$

où $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ et $\mu_r = \mu/\mu_0$ désignent la permittivité électrique et la perméabilité magnétique relatives du milieu.

Bien sûr, il est intéressant de décomposer l'indice complexe n en ses parties réelle $\Re n$ et imaginaire $\Im n$, appelées respectivement **indice de réfraction** n' et **indice d'absorption** n'' :

$$n(\omega) = n'(\omega) + i n''(\omega) \tag{4}$$

(idem pour ε et μ). La signification de ces notions apparaîtra au sous-paragraphe suivant.

Aux fréquences optiques, la plupart des matériaux ont quasiment perdu leur éventuelle aimantation (car elle ne peut exister à ces fréquences), donc $\mu_r \cong 1$; il s'ensuit l'expression simplifiée :

$$n^2(\omega) \cong \varepsilon_r(\omega) \tag{5}$$

Très souvent, ε'' , est négligeable (approximation des **milieux transparents**). Alors, dans le domaine spectral où $\varepsilon_r \cong \varepsilon'_r > 0$, l'indice du milieu est réel et les ondes s'y propagent selon les lois ordinaires. Mais il arrive que $\varepsilon_r \cong \varepsilon'_r < 0$ (par exemple dans le cuivre du côté rouge du spectre visible) ; dans ce cas l'indice est imaginaire pur, et les ondes planes monochromatiques dans un tel milieu sont évanescentes, donc difficilement détectables. Cependant, on va voir que la relation (5) est trop simpliste pour la suite de notre propos.

Dans le domaine radio ou centimétrique, μ_r peut différer notablement de 1, et conduire à une discussion analogue à celle qui précède : si $\mu_r \cong \mu'_r > 0$ (alors que $\varepsilon_r \cong \varepsilon'_r > 0$), l'indice du milieu est réel et les ondes s'y propagent selon les lois ordinaires ; si $\mu_r \cong \mu'_r < 0$ (alors que $\varepsilon_r \cong \varepsilon'_r > 0$), l'indice est imaginaire pur, et les ondes planes monochromatiques sont évanescentes. Des valeurs négatives de ε_r ou μ_r sont relativement courantes, auprès des résonances diélectriques ou magnétiques.

En 1968 le physicien soviétique VESELAGO remarquait que si on a $\varepsilon_r \cong \varepsilon'_r < 0$ et $\mu_r \cong \mu'_r < 0$ pour une même pulsation, alors l'indice du milieu redevient réel ; mais de nombreuses propriétés ordinaires de la propagation sont inversées dans un tel milieu, donnant naissance à des situations très inhabituelles [2] - par exemple, la propagation de l'énergie des ondes planes progressives est dirigée en sens contraire de la vitesse de phase, ainsi que la force de pression de radiation... Le travail de VESELAGO est resté complète-

ment académique, jusqu'à ce qu'on réalise qu'il est possible de simuler artificiellement de tels milieux, en construisant des matériaux cellulaires - appelés méta-matériaux - avec des aiguilles de cuivre (pour que la permittivité électrique *effective* soit négative comme dans un métal juste en dessous de sa pulsation de plasma) et des boucles métalliques (de dimensions telles qu'il y ait une résonance magnétique donnant une perméabilité magnétique effective négative pour un intervalle de longueur d'onde λ commun) [3].

En fait, auprès des résonances magnétiques μ'' , n' n'est pas vraiment négligeable. Il nous faudra donc reprendre minutieusement l'étude de la propagation dans un milieu d'indice complexe, et traiter de façon systématique toutes les questions de signes. Nous nous limiterons au cas des ondes planes monochromatiques progressives, puisqu'elles forment une base de l'ensemble des ondes réelles en vertu de la décomposition de FOURIER.

2. CAS D'UNE ONDE PLANE MONOCHROMATIQUE HOMOGENE PROGRESSIVE

Une onde plane monochromatique homogène progressive, se propageant parallèlement à l'axe Oz (dirigé par le vecteur unitaire $\mathbf{u} = \mathbf{u}_z$) a son champ électrique qui s'écrit en notation complexe :

$$\underline{\mathbf{E}}(z, t) = \underline{\mathbf{E}}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{E}}_0 \exp - i\omega \left(t - \frac{n}{c} z \right) = \underline{\mathbf{E}}_0 e^{-n' \frac{\omega}{c} z} \exp - i\omega \left(t - \frac{n''}{c} z \right) \quad (6)$$

car la relation de dispersion tirée de (2) donne :

$$\mathbf{K} = nK_0 \mathbf{u} = (n' + in'') \frac{\omega}{c} \mathbf{u} \quad \text{où} \quad \mathbf{u}^2 = 1. \quad (7)$$

Le cas des ondes inhomogènes (*i.e.* où \mathbf{u} est un vecteur de \mathbb{C}^3 avec ses parties réelle et imaginaire non colinéaires) est plus compliqué ; nous l'évoquerons rapidement au paragraphe 3.3.

Notons encore que pour étudier ces ondes, il n'est pas indispensable d'imposer une détermination de n : car si on change n en $-n$, il suffit de changer \mathbf{u} en $-\mathbf{u}$ pour décrire la même onde ; à une pulsation donnée, le vecteur $\mathbf{v} \equiv n \mathbf{u}$ suffit à déterminer complètement le vecteur de propagation de l'onde considérée.

2.1. Vitesse de phase et évolution de l'amplitude

La phase de l'onde homogène se propage à la vitesse de phase, parallèle à Oz ,

$$\mathbf{v}_\phi(\omega) = v_\phi \mathbf{u} \quad \text{où} \quad v_\phi = \frac{c}{n(\omega)}, \quad (8)$$

donc dans le sens de Oz si n' est positif et dans le sens contraire si n' est négatif ; son amplitude s'amortit (si n'' est positif), dans le sens de la propagation de la phase, avec pour longueur caractéristique :

$$l(\omega) = \frac{c}{\omega n''(\omega)} = \frac{1}{K_0 n''(\omega)} = \frac{\lambda_0}{2\pi n''(\omega)}, \quad (9)$$

$|l|$ étant appelée « profondeur de pénétration » (λ_0 désigne la longueur d'onde dans le vide pour la pulsation ω). Il en est de même pour tous les autres champs **B**, **D** et **H**.

En posant $\omega > 0$ dorénavant, on peut dire aussi que \mathbf{v}_φ et $\mathbf{K}' \equiv \Re e \mathbf{K}$ sont dans le même sens.

2.2. Relations entre les champs

Pour une onde plane monochromatique progressive les champs sont reliés entre eux par les relations suivantes

$$\mathbf{u} \cdot \underline{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{K}}{\omega} \times \underline{\mathbf{E}} = n \frac{\mathbf{u}}{c} \times \underline{\mathbf{E}} \quad (10)$$

à cause de (7) et des équations de MAXWELL-GAUSS (en l'absence de charges libres) et de MAXWELL-FARADAY appliquées à :

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}}, \quad \underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{B}}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}}; \quad (11)$$

en introduisant l'admittance complexe du milieu,

$$Y \equiv \frac{n}{\mu c} = \frac{n}{\mu_r} Y_0 \quad \text{où} \quad Y_0 \equiv \frac{1}{\mu_0 c} = \epsilon_0 c = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cong \frac{1}{377 \Omega} \quad (12)$$

est l'admittance du vide, on exprime facilement le champ magnétique :

$$\underline{\mathbf{H}} = Y \mathbf{u} \times \underline{\mathbf{E}} \quad (13)$$

$$\mathbf{H}(z, t) = \Re e \left[Y \mathbf{u}_z \times \underline{\mathbf{E}}_0 e^{-z/l} \exp - i\omega \left(t - \frac{z}{v_\varphi} \right) \right] = |Y| \mathbf{u}_z \times \mathbf{E} \left(z, t - \frac{\arg Y}{\omega} \right) \quad (14)$$

donc les champs réels **E** et **H** sont orthogonaux à la direction de propagation.

Notons bien que pour Y il y a deux déterminations opposées, comme pour n ; mais la relation (12) fait que, si on fixe la détermination de n , celle de Y est fixée aussi.

2.3. Vecteur de Poynting

On peut maintenant en déduire le vecteur courant de l'énergie électromagnétique, *i.e.* le vecteur de POYNTING

$$\mathbf{R}(z, t) = \mathbf{E}(z, t) \times \mathbf{H}(z, t) = \left[\mathbf{E}(z, t) \cdot \mathbf{E} \left(z, t - \frac{\arg Y}{\omega} \right) \right] |Y| \mathbf{u}_z \quad (15).$$

Concrètement on accède plutôt à sa moyenne $\langle \mathbf{R} \rangle(z)$ sur une période $T = 2\pi/\omega$; cette moyenne est constante et on l'exprimera par la relation (19).

2.4. Discussion

1°) Lorsque $\epsilon_r \cong \epsilon'_r > 0$ et $\mu_r \cong \mu'_r > 0$ (et donc $l/l \cong 0$), **E**(z, t) et **H**(z, t) sont orthogonaux entre eux et (**E**(z, t), **H**(z, t), \mathbf{v}_φ) forme toujours un trièdre orthogonal direct : alors **R**

a toujours le même sens que \mathbf{v}_φ (ou \mathbf{K}), même si on choisit la détermination $n' < 0$.

2°) Par contre, lorsque $\epsilon_r \cong \epsilon'_r < 0$ et $\mu_r \cong \mu'_r < 0$, n et Y sont encore réels mais $(\mathbf{E}(z, t), \mathbf{H}(z, t), \mathbf{v}_\varphi)$ forme toujours un trièdre orthogonal indirect, aussi \mathbf{R} et \mathbf{v}_φ (ou \mathbf{K}) sont-ils toujours de sens contraires, quel que soit le signe choisi pour n' ! De plus, on a encore $1/l \cong 0$, comme dans le cas 1°).

3°) Avec une valeur de $\arg Y$ différente de 0 modulo π , $\mathbf{E}(z, t)$ et $\mathbf{H}(z, t)$ sont déphasés, et ne sont plus orthogonaux entre eux (en dehors du cas de polarisation rectiligne). Dans le cas général d'une polarisation elliptique, moyennant un choix judicieux de l'origine des temps, $\mathbf{E}(z, t)$ peut toujours s'écrire :

$$\mathbf{E}(z, t) = e^{-\beta l} \left[\mathbf{A} \cos \omega \left(t - \frac{z}{v_\varphi} \right) + \mathbf{C} \sin \omega \left(t - \frac{z}{v_\varphi} \right) \right] \quad (16)$$

avec $(\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{u}_z)$ formant un trièdre orthogonal, \mathbf{A} et \mathbf{C} correspondant respectivement au demi-grand et petit axe de l'ellipse décrite par $\mathbf{E}(0, t)$; alors, en vertu de (15), $\mathbf{R}(z, t)$ est proportionnel à :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) \cdot \mathbf{E} \left(z, t - \frac{\arg Y}{\omega} \right) &= e^{-2\beta l} \left[\mathbf{A}^2 \cos(\omega t - n'K_0 z) \cos(\omega t - n'K_0 z - \arg Y) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{C}^2 \sin(\omega t - n'K_0 z) \sin(\omega t - n'K_0 z - \arg Y) \right] \\ &= e^{-2\beta l} \left[\frac{\mathbf{A}^2 + \mathbf{C}^2}{2} \cos(\arg Y) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\mathbf{A}^2 - \mathbf{C}^2}{2} \cos(2\omega t - 2n'K_0 z - \arg Y) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Il y a donc des domaines spatio-temporels de l'onde où \mathbf{R} et \mathbf{v}_φ (ou \mathbf{K}') sont de sens contraires, si et seulement si l'ellipticité $\eta \equiv \|\mathbf{C}\| / \|\mathbf{A}\|$ de la polarisation satisfait la condition suivante, indépendante de la détermination choisie pour Y :

$$|\cos(\arg Y)| < \frac{\mathbf{A}^2 - \mathbf{C}^2}{\mathbf{A}^2 + \mathbf{C}^2} = \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2} ; \quad (18)$$

cela se produit toujours dans le cas d'une polarisation rectiligne, jamais dans le cas d'une polarisation circulaire (où \mathbf{R} est uniforme et constant). Si ces domaines sont temporellement assez courts par rapport à T , $\langle \mathbf{R} \rangle$ et \mathbf{K}' sont encore de même sens.

4°) On calcule facilement $\langle \mathbf{R} \rangle$ à partir de la relation (15) de la façon suivante :

$$\langle \mathbf{R} \rangle(z) = \frac{1}{2} \Re e \left(\underline{\mathbf{E}}^* \cdot \underline{\mathbf{E}} e^{i \arg Y} \right) |Y| \mathbf{u}_z = |Y| \cos(\arg Y) \frac{\|\underline{\mathbf{E}}\|^2}{2} \mathbf{u}_z = \Re e Y \frac{\|\underline{\mathbf{E}}_0\|^2}{2} e^{-2\beta l} \mathbf{u}_z \quad (19)$$

où $\|\underline{\mathbf{E}}\| = \sqrt{\underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{E}}^*} = e^{-\beta l} \sqrt{\mathbf{A}^2 + \mathbf{C}^2}$ est réel positif, appelé « norme de $\underline{\mathbf{E}}$ ». On voit donc que dans les matériaux tels que $\cos(\arg Y)$ et n' soient de signes opposés, i.e. $n' / \Re e Y$ négatif (ce qui est indépendant de la détermination choisie), $\langle \mathbf{R} \rangle$ et \mathbf{v}_φ (ou \mathbf{K}') ont des

sens inverses comme au 2°) - voir la relation (8) ! On appelle « milieux gauchers » ces matériaux tels que $n' / \Re e Y < 0$ - car les domaines temporels où $(\mathbf{E}(z, t), \mathbf{H}(z, t), \mathbf{v}_\phi)$ forme un trièdre orthogonal indirect l'emportent sur les autres en ce qui concerne le sens de $\langle \mathbf{R} \rangle(z)$; on les appelle encore « milieux à indice de réfraction négatif » - voir l'explication sur la figure 1 et dans la conclusion. Les matériaux tels que $n' / \Re e Y > 0$ seront appelés milieux « droitiers » ou « à indice de réfraction positif ».

5°) Il ne faut pas confondre de tels matériaux avec les milieux amplificateurs de lumière (*i.e.* ayant une inversion de population permettant l'effet laser). Résumons les différents cas dans le tableau suivant, indépendamment de la détermination choisie :

	Milieu droitier	Milieu gaucher
Milieu absorbant	$n' / \Re e Y > 0$ et $n'' / \Re e Y > 0$ donc $\Im m \epsilon \mu > 0$	$n' / \Re e Y > 0$ et $n'' / \Re e Y < 0$ donc $\Im m \epsilon \mu < 0$
Milieu amplificateur (« laser »)	$n' / \Re e Y < 0$ et $n'' / \Re e Y > 0$ donc $\Im m \epsilon \mu < 0$	$n' / \Re e Y < 0$ et $n'' / \Re e Y < 0$ donc $\Im m \epsilon \mu > 0$

Dans un « milieu laser », il y a création en moyenne d'énergie électromagnétique, à partir de l'énergie interne fournie par le processus de pompage ; ainsi, grâce à (19),

$$\operatorname{div} \langle \mathbf{R} \rangle = - \frac{\Re e Y}{l} \|\underline{\mathbf{E}}\|^2 > 0 \tag{20}$$

et c'est pourquoi $l / \Re e Y$ et $n'' / \Re e Y$ sont négatifs : l'onde est amplifiée dans le sens de $\langle \mathbf{R} \rangle$ avec une longueur caractéristique $|l(\omega)|$ jusqu'à ce que les effets non linéaires en limitent l'amplitude (phénomène de saturation). Notons bien que le signe de $n'' / \Re e Y$ est sans influence sur le calcul mené au 4°).

On peut préciser les signes de $n' / \Re e Y$ et $n'' / \Re e Y$ en remarquant que :

$$\Re e Y = Y_0 \Re e \frac{n}{\mu_r} = Y_0 \Re e \frac{|n|^2}{(\mu_r' + i\mu_r'')(n' - in'')} \tag{21}$$

donc : $n' / \Re e Y < 0 \Leftrightarrow n'^2 \mu_r' + n' n'' \mu_r'' < 0$ (22)

$$n'' / \Re e Y < 0 \Leftrightarrow n' n'' \mu_r' + n''^2 \mu_r'' < 0 \tag{23}$$

où : $2n' n'' = \Im m \epsilon_r \mu_r$ et $2n''^2 = \Re e \epsilon_r \mu_r + |\epsilon_r \mu_r|$ (24)

ce qui donne : $n' / \Re e Y < 0 \Leftrightarrow \epsilon_r' (\mu_r'^2 + \mu_r''^2) + \mu_r' \sqrt{(\epsilon_r'^2 + \epsilon_r''^2) (\mu_r'^2 + \mu_r''^2)} < 0$ (25)

$$n'' / \Re e Y < 0 \Leftrightarrow \epsilon_r'' (\mu_r'^2 + \mu_r''^2) + \mu_r'' \sqrt{(\epsilon_r'^2 + \epsilon_r''^2) (\mu_r'^2 + \mu_r''^2)} < 0 \tag{26}$$

Les inégalités de (26) sont réalisées lorsque $\epsilon'' < 0$ et $\mu'' = 0$, par exemple. En outre, si un milieu caractérisé par ϵ et μ est droitier (et absorbant), alors celui caractérisé par $-\epsilon$ et $-\mu$ (autorisé par les relations de KRAMERS-KRONIG) est gaucher (et amplificateur).

2.5. Résumé : condition caractéristique d’un milieu gaucher

L’équivalence (25) peut être formulée de façon plus concise : un milieu est gaucher si et seulement si

$$\boxed{\cos(\arg \epsilon) + \cos(\arg \mu) < 0} \tag{27}$$

donc **ni ϵ ni μ ne doivent être réels positifs** ; mais

$$\forall \epsilon \notin \mathbb{R}_+ \quad \exists \mu \notin \mathbb{R}_+ / \cos(\arg \epsilon) + \cos(\arg \mu) < 0$$

et

$$\forall \mu \notin \mathbb{R}_+ \quad \exists \epsilon \notin \mathbb{R}_+ / \cos(\arg \epsilon) + \cos(\arg \mu) < 0.$$

Pour réaliser la condition (27), il suffit que ϵ' et μ' soient négatifs (c’est le cas des matériaux « *double negative* » étudiés par ZIOLKOWSKI et HEYMAN [4]) mais ce n’est pas nécessaire... En règle générale, la condition (27) n’est satisfaite que dans des domaines de fréquence très proches à la fois d’une résonance diélectrique et d’une résonance magnétique.

3. RÉFRACTION, SUR UN MILIEU GAUCHER, D’UNE ONDE PLANE MONOCHROMATIQUE PROGRESSIVE INCIDENTE

On considère un dioptre plan illimité, immobile, séparant un milieu (1) ordinaire caractérisé par ϵ_1 et μ_1 (dont se déduisent n_1 et Y_1), d’un milieu (2) gaucher caractérisé par ϵ_2 et μ_2 (dont se déduisent n_2 et Y_2). On appelle \mathbf{N}_{12} le vecteur unitaire normal au dioptre, orienté de (1) vers (2).

Une onde incidente plane monochromatique progressive dans le milieu (1) est caractérisée par la représentation complexe de son champ électrique :

$$\underline{\mathbf{E}}_i = \underline{\mathbf{E}}_{0i} \exp - i(\omega t - \mathbf{K}_i \cdot \mathbf{r}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_i = n_1 K_0 \mathbf{u}_i \quad \text{où} \quad \mathbf{u}_i^2 = 1 \quad \text{et} \quad K_0 = \frac{\omega}{c} \tag{28}$$

On trouve alors les ondes réfléchi et transmise décrites respectivement par :

$$\underline{\mathbf{E}}_r = \underline{\mathbf{E}}_{0r} \exp - i(\omega t - \mathbf{K}_r \cdot \mathbf{r}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_r = n_1 K_0 \mathbf{u}_r \quad \text{où} \quad \mathbf{u}_r^2 = 1 \tag{29}$$

$$\underline{\mathbf{E}}_t = \underline{\mathbf{E}}_{0t} \exp - i(\omega t - \mathbf{K}_t \cdot \mathbf{r}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_t = n_2 K_0 \mathbf{u}_t \quad \text{où} \quad \mathbf{u}_t^2 = 1 \tag{30}$$

On veut déterminer leurs vecteurs de propagation \mathbf{K}_r et \mathbf{K}_t ; il apparaîtra clairement que le résultat est encore indépendant du choix (arbitraire) des déterminations de n_1 et n_2 .

3.1. Expression générale des lois de Descartes

Les relations de passage du champ électromagnétique font que les vecteurs de propagation ont leurs composantes parallèles au dioptre (désignées par l’indice //) qui sont égales, donc :

$$\mathbf{K}_{i//} = \mathbf{K}_{r//} = \mathbf{K}_{t//}, \quad \text{i.e.} \quad \boxed{n_1 \mathbf{u}_{i//} = n_1 \mathbf{u}_{r//} = n_2 \mathbf{u}_{t//}}; \tag{31}$$

c’est la forme vectorielle des lois de DESCARTES. Pour toute la suite, nous supposons que l’onde incidente est homogène, i.e. que \mathbf{u}_i est un vecteur réel (pour plus de détails sur la définition des ondes homogènes et inhomogènes, voir par exemple [5]). Il sera facile de vérifier que, dans ce cas, \mathbf{u}_r est toujours un vecteur réel ; mais ce n’est pas for-

cément vrai pour \mathbf{u}_i , par exemple lorsque n_2/n_1 n'est pas réel (ce qui peut se produire assez nettement au voisinage immédiat des résonances diélectriques et magnétiques).

Notons bien que les relations (31) ne suffisent pas, en toute rigueur, pour donner une solution unique $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_t)$ lorsque \mathbf{u}_i est fixé ! L'unicité est assurée si on impose en plus des « conditions d'ondes sortantes » disant que $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{N}_{12} \geq 0$ et $\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{N}_{12} \leq 0$ dans les cas ordinaires, ce qui paraît alors très naturel. Mais compte tenu du fait que dans le second milieu $\langle \mathbf{R} \rangle$ et \mathbf{v}_φ (ou \mathbf{K}) ont des sens inverses, et que l'on n'impose plus n'_1 et n'_2 positifs, ces conditions supplémentaires doivent être réexaminées en détail.

Conditions d'ondes entrantes et sortantes

Fondamentalement on impose aux ondes incidente, réfléchie et transmise, d'être telles que leurs vecteurs de POYNTING moyens $\langle \mathbf{R}_i \rangle$, $\langle \mathbf{R}_r \rangle$ et $\langle \mathbf{R}_t \rangle$ satisfassent :

$$\boxed{\langle \mathbf{R}_i \rangle \cdot \mathbf{N}_{12} \geq 0}, \quad \boxed{\langle \mathbf{R}_r \rangle \cdot \mathbf{N}_{12} \leq 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\langle \mathbf{R}_t \rangle \cdot \mathbf{N}_{12} \geq 0} \tag{32}$$

de façon que les flux d'énergie réfléchie et transmise fuient le dioptre en moyenne, tandis que le flux incident est dirigé vers le dioptre ; ces conditions rejoignent les exigences du principe de causalité appliquées à la réflexion et la transmission. Comme le premier milieu est droitier, avec (8) et (19) on voit que les deux conditions concernant les ondes dans ce milieu donnent :

$$\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{N}_{12} \geq 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{v}'_i \equiv n'_1 \mathbf{u}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{v}'_r \cdot \mathbf{N}_{12} \leq 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{v}'_r \equiv n'_1 \mathbf{u}_r ; \tag{33}$$

ces inégalités sont indépendantes de la détermination choisie pour n_i .

3.2. Cas où l'onde transmise est homogène

Avec des indices quelconques et une onde incidente homogène en *incidence normale*, l'onde transmise est toujours homogène, les sens de $\langle \mathbf{R}_i \rangle$ et $\langle \mathbf{R}_t \rangle$ sont identiques, et ceux de $n'_1 \mathbf{u}_i$ et $n'_2 \mathbf{u}_t$ opposés normaux au dioptre.

Sinon, en *incidence oblique*, l'onde transmise est homogène lorsque n_2/n_1 est réel et que l'incidence ne dépasse pas l'angle limite $\theta_l = \arcsin \left| \frac{n'_2}{n'_1} \right|$, car dans ce cas on a $\frac{n_2}{n_1} = \frac{n'_2}{n'_1}$ (en supposant dorénavant que les indices ne sont pas imaginaires purs). La relation (31) devient donc :

$$\mathbf{v}'_{i//} = \mathbf{v}'_{r//} = \mathbf{v}'_{t//} \quad \text{avec} \quad \mathbf{v}'_t \equiv n'_2 \mathbf{u}_t ; \tag{34}$$

et la condition d'onde transmise sortante s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{v}'_t \cdot \mathbf{N}_{12} \leq 0} \tag{35}$$

cette inégalité venant du fait que le second milieu est gaucher, indépendamment de la détermination choisie pour n_2 .

Cette dernière relation a plusieurs conséquences inhabituelles :

- ◆ En traduisant les relations (34), (33) et (35), la construction de DESCARTES donne la

direction de \mathbf{u}_p , dont se déduit celle des rayons réfractés (parallèles à $\langle \mathbf{R}_t \rangle$ par définition) - cf. figure 1 : le rayon réfracté reste du même côté de la normale que le rayon incident ; on appelle cela le phénomène de « réfraction négative » ! Cet effet a été vérifié expérimentalement avec des milieux artificiels composites, dans le domaine des micro-ondes à 10,5 GHz récemment [1] ; on pense pouvoir l'étendre au domaine optique, avec des cristaux photoniques auprès des bandes de fréquence où la vitesse de groupe est négative.

- ◆ La vitesse de phase \mathbf{v}_{ot} de l'onde transmise est telle que $\mathbf{v}_{ot} \cdot \mathbf{N}_{12} \leq 0$, i.e. ses plans d'onde se dirigent vers le dioptre au lieu de s'en éloigner ! Mais la dispersion forte, nécessaire pour satisfaire (25), fait heureusement que \mathbf{v}_{ot} n'est pas la vitesse du front d'onde transmis, et que celui-ci s'éloigne bien du dioptre...
- ◆ Lorsque $n_1 = n'_1 > 0$ et $n_2 = n'_2 < 0$, le principe de FERMAT conduit formellement à une réfraction négative. Pour le rayon lumineux AIB traversant le dioptre en I , le chemin optique $L = n_1 AI + n_2 IB$ divisé par la célérité de la lumière dans le vide n'est évidemment pas le temps de parcours (du maximum M) d'une *impulsion* lumineuse de

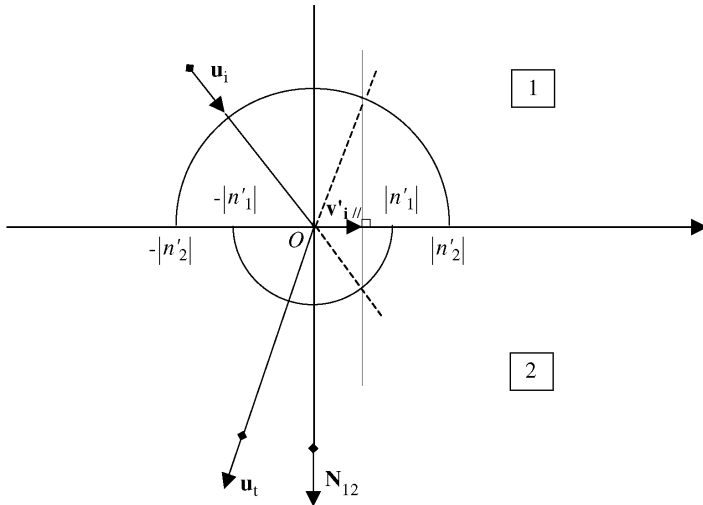


Figure 1 : Construction de DESCARTES dans le cas d'une réfraction négative : si on représente les vecteurs réels \mathbf{v}_i et \mathbf{v}_t avec comme origine O sur le dioptre, l'extrémité de \mathbf{v}_i est sur une demi-sphère de rayon $|n'_1|$ située dans le milieu (2) à cause de (33), celle de \mathbf{v}_t est sur une demi-sphère de rayon $|n'_2|$ située dans le milieu (1) à cause de (35) - et non plus dans le milieu (2) comme dans le cas usuel - et les composantes parallèles au dioptre sont égales pour \mathbf{v}_i et \mathbf{v}_t à cause de (34) ; on vérifie sur le schéma que si on choisit les vecteurs \mathbf{u}_i et \mathbf{u}_t orientés vers le bas comme d'habitude pour fixer les idées, ils obéissent bien aux conditions (33-35) avec $n'_1 > 0$ et $n'_2 < 0$ - ce qui justifie pour le milieu (2) l'appellation de « milieu à indice négatif » - mais ce n'est pas indispensable, car l'onde incidente fixe \mathbf{v}_i , ce qui avec (33-35) ne laisse qu'une solution \mathbf{v}_t et détermine donc complètement le vecteur de propagation de l'onde transmise indépendamment des déterminations choisies pour n_1 et n_2 .

A à B, mais le décalage temporel entre les passages respectifs en A et B de deux *surfaces d'onde* qui se retrouvent simultanément en I. Mais déjà dans le cas d'une réfraction usuelle, la dispersion dans les milieux empêche d'assimiler à L/c le temps de vol de M sur AIB - la vitesse de M n'étant pas la vitesse de phase...

- ◆ Si pour le milieu (2) on change ϵ_2 et μ_2 en leurs opposés, toutes choses égales par ailleurs, cela change \mathbf{K}_t en son symétrique par rapport au dioptre, et bien sûr cela change aussi $\underline{\mathbf{E}}_{0t}$.

3.3. Cas où l'onde transmise est inhomogène

Pour simplifier la discussion de cette situation subtile, nous nous restreindrons au cas où n_1 est réel, et nous choisirons sa détermination positive. Lorsque n_2 est réel (éventuellement négatif) et que l'incidence dépasse l'angle limite $\arcsin\left|\frac{n_2}{n_1}\right|$, il n'existe pas de solution de (31) avec \mathbf{u}_t réel : alors on a $\mathbf{u}_t = \mathbf{u}'_t + i\mathbf{u}''_t$, avec \mathbf{u}'_t et \mathbf{u}''_t réels respectivement parallèle et perpendiculaire au dioptre. De même, \mathbf{u}_t et $\mathbf{K}_t = n_2 K_0 \mathbf{u}_t$ sont complexes dans le cas réaliste où n_2 n'est pas réel, \mathbf{u}_t étant réel mais en incidence non normale ; l'onde transmise est forcément inhomogène.

Dans chacune de ces deux situations, on vérifie que \mathbf{K}'_t et \mathbf{K}''_t ne sont pas parallèles ; cela donne à l'onde des propriétés complexes (même si le milieu est transparent) et tout à fait inhabituelles, mais qualitativement indépendantes du caractère droitier ou gaucher du second milieu :

- ◆ à cause de (31) d'abord, \mathbf{K}'_t , réel par définition, est parallèle au plan d'incidence ($\mathbf{u}_i, \mathbf{N}_{12}$), et \mathbf{K}''_t , réel par définition, est perpendiculaire au dioptre (cf. figure 2) - la composante $\mathbf{K}_{t//}$ de \mathbf{K}_t parallèle au dioptre étant réelle et fixée ;
- ◆ grâce à (30) ensuite, il n'y a que deux solutions opposées pour l'autre composante de \mathbf{K}_t , celle qui est perpendiculaire au dioptre : $\mathbf{K}_{t\perp} = \mathbf{K}'_{t\perp} + i\mathbf{K}''_{t\perp}$;
- ◆ mais maintenant la direction de $\langle \mathbf{R}_t \rangle$ dépend en plus de la polarisation, et les rayons de l'onde transmise ne sont plus parallèles au plan d'incidence en général ! [6].

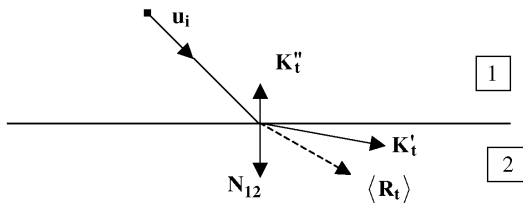


Figure 2 : Onde inhomogène transmise dans un milieu amplificateur
 $\langle \mathbf{R}_t \rangle$ est dessiné en pointillés car il sort du plan de la figure).

Si le second milieu est absorbant, avec l'onde plane monochromatique transmise :

$$\operatorname{div} \langle \mathbf{R}_t \rangle = -2 \mathbf{K}''_t \cdot \langle \mathbf{R}_t \rangle < 0 ; \tag{36}$$

comme on sait que \mathbf{K}''_t est colinéaire à \mathbf{N}_{12} , en utilisant maintenant la dernière condition d'onde sortante $\langle \mathbf{R}_t \rangle \cdot \mathbf{N}_{12} \geq 0$, on voit que les sens de \mathbf{K}''_t et \mathbf{N}_{12} sont identiques : cela permet de ne garder qu'une des deux solutions pour $\mathbf{K}_{t\perp}$. Au contraire, si le second milieu est amplificateur \mathbf{K}''_t et \mathbf{N}_{12} sont de sens opposés (cf. figure 2) ; mais alors l'amplitude de l'onde transmise dans le second milieu croît exponentiellement en fonction de la distance au dioptre, jusqu'à la saturation. Si on change la permittivité et la perméabilité du second milieu en leurs opposés, alors on change son caractère absorbant ou amplificateur, et on doit changer $\mathbf{K}_{t\perp}$ en son opposé (i.e. prendre l'autre solution pour $\mathbf{K}_{t\perp}$) ; cela fait changer \mathbf{K}'_t et \mathbf{K}''_t en leur symétrique par rapport au dioptre, et bien sûr cela change aussi $\underline{\mathbf{E}}_{0t}$.

Remarques

- ◆ Ce n'est pas le fait que le second milieu soit droitier ou gaucher qui indique la solution à retenir pour $\mathbf{K}_{t\perp}$.
- ◆ Ici la condition d'onde sortante donne $\mathbf{K}''_t \cdot \mathbf{N}_{12} > 0$ si le milieu est absorbant, $\mathbf{K}''_t \cdot \mathbf{N}_{12} < 0$ s'il est amplificateur ; au paragraphe 3.2. elle donnait $\mathbf{K}_t \cdot \mathbf{N}_{12} \geq 0$ s'il est droitier, $\mathbf{K}_t \cdot \mathbf{N}_{12} \leq 0$ s'il est gaucher.
- ◆ Dans le cas où le second milieu est transparent, la relation (36) montre que $\mathbf{K}''_t \cdot \langle \mathbf{R}_t \rangle$ est nul pour une onde inhomogène (on l'appelle alors « onde évanescente »), donc cette équation et la condition d'onde sortante ne peuvent imposer ni l'orientation de $\langle \mathbf{R}_t \rangle$ ni le sens de \mathbf{K}''_t ; celui-ci est fixé par le fait qu'une croissance du champ en fonction de la distance au dioptre n'est pas plausible étant donné que ce second milieu est transparent, donc \mathbf{K}''_t est dans le sens de \mathbf{N}_{12} . De toute façon \mathbf{K}''_t est normal au dioptre ; or dans un tel milieu \mathbf{K}''_t est perpendiculaire à $\langle \mathbf{R}_t \rangle$, donc ce dernier est tangent au dioptre, donc le flux moyen de l'onde transmise est nul au travers du dioptre : il y a réflexion totale.

3.4. Facteur de réflexion en incidence normale

Avec les mêmes milieux (1) et (2) que précédemment, sans perte de généralité, choisissons $n'_1 > 0$ pour le premier milieu (qui est droitier donc $\Re e Y_1 > 0$), et $n'_2 < 0$ pour le second milieu (qui est gaucher donc $\Re e Y_2 > 0$). On trouve alors facilement, à cause de la continuité des composantes de \mathbf{E} et de \mathbf{H} (mais pas \mathbf{B}) tangentes au dioptre, que le facteur de réflexion (pour les flux) s'écrit :

$$R = \left| \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} \right|^2 \tag{37}$$

compte tenu des conventions faites ci-dessus ; ce résultat correspond à une réalité physique si et seulement si n_1 est réel - voir annexe 2. On montre aussi dans cette annexe que la relation dite de « conservation de l'énergie » sur le dioptre est satisfaite si et seulement

si Y_1 ou bien Y_2/Y_1 est réel ; avec en plus la condition d'onde sortante on a :

$$R < 1 \tag{38}$$

et on en déduit facilement que :

$$\arg Y_2 - \arg Y_1 \in]-\pi/2, \pi/2[\pmod{2\pi} \tag{39}$$

Dans le cas usuel où on a en plus n_1 et Y_1 réels, l'ensemble des hypothèses que l'on vient de faire pour chacun de ces milieux conduit à :

$$\arg Y_1 = \arg n_1 = \arg \mu_1 = 0 \pmod{2\pi} \tag{40}$$

$$\arg Y_2 \in]-\pi/2, \pi/2[\text{ et } \arg n_2 \in]\pi/2, 3\pi/2[\pmod{2\pi} \text{ avec } \mu_2 \notin \mathbf{R}_+ ; \tag{41}$$

donc $\mu_2 \neq \mu_1$, et ainsi on se trouve dans une des rares situations de l'optique où le facteur de réflexion en incidence normale diffère de la quantité $\left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right|^2$, heureusement : car celle-ci pourrait être supérieure à 1, puisque $\arg n_2 - \arg n_1$ appartient à l'intervalle $]\pi/2, 3\pi/2[\pmod{2\pi}$ - au lieu de $]-\pi/2, \pi/2[$ qui apparaît dans la condition (39).

CONCLUSION

Au terme de cette étude, on voit qu'il faut se méfier des idées fausses induites par l'appellation de « milieux à indice négatif » pour ces corps : d'une part, n^2 est complexe *a priori*, d'autre part, pour décrire la propagation des ondes dans ces milieux, il n'est pas obligatoire d'éliminer l'une des racines de n^2 ... L'appellation de « milieu gaucher » est donc nettement préférable ; et dans la bande de fréquences où le milieu devient gaucher, comme elle doit se situer auprès d'une résonance diélectrique et magnétique simultanément, la partie imaginaire de n^2 n'est pas toujours négligeable vis-à-vis de sa partie réelle. On est cependant tenté de faire cette approximation pour simplifier l'étude de la réfraction d'une onde plane homogène incidente qui provient d'un milieu transparent, en dehors des conditions de réflexion totale, comme au paragraphe 3.2. On a vu qu'alors, contrairement au cas usuel, $n'_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{N}_{12}$ et $n'_2 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{N}_{12}$ sont de signes contraires. Les signes de n'_1 et n'_2 , ainsi que les sens de \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 , ne sont pas importants en eux-mêmes : ce sont les vecteurs $n'_1 \mathbf{u}_1$ et $n'_2 \mathbf{u}_2$ qui possèdent une signification physique - voir les relations (6-7). Ainsi peut-on toujours, sans perte de généralité, choisir de décrire l'onde incidente dans le premier milieu (qui est droitier) avec $n'_1 > 0$ et $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{N}_{12} > 0$, et l'onde transmise dans le second milieu (qui est gaucher) par $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{N}_{12} > 0$ comme d'habitude, mais avec $n'_2 < 0$; c'est bien pour cela que de tels milieux sont dits « à indice de réfraction négatif »...

Avec les premiers milieux gauchers réalisés, qui sont les matériaux cellulaires décrits au paragraphe 1.2., l'étude macroscopique est à la limite de son domaine de validité, car les longueurs d'onde telles que $\epsilon_r \cong \epsilon'_r < 0$ et $\mu_r \cong \mu'_r < 0$ ne sont pas tellement plus grandes que les dimensions des cellules ; c'est pourquoi la première observation de la réfraction négative fut faite à une fréquence de 10,5 GHz, donc une longueur d'onde de 3 cm. Ce domaine de longueurs d'onde présente l'avantage évident de permettre la réalisation de ces

matériaux à l'échelle macroscopique - on peut trouver sur internet des photographies de ces structures, notamment sur : http://physics.ucsd.edu/~drs/left_home.htm Ceux-ci constituent un excellent « laboratoire » pour vérifier expérimentalement des prédictions théoriques et tester de nouvelles idées. En eux-mêmes, ces matériaux macroscopiques sont également intéressants dans le domaine des micro-ondes, notamment pour la réalisation d'antennes directionnelles. Toutefois, les phénomènes de propagation propres à ces matériaux permettraient de révolutionner les dispositifs optiques usuels : citons la possibilité, suggérée par J. PENDRY de l'Imperial College, de fabriquer des super-lentilles à partir de tels matériaux, c'est-à-dire capables de s'affranchir des limites usuelles de résolution des appareils optiques. Aussi cherche-t-on à les étendre au domaine optique, *i.e.* pour des longueurs d'onde de l'ordre du micromètre. Ce changement d'échelle constitue un verrou technologique majeur, aussi bien du point de vue de la technique que du choix des matériaux. En effet, les métaux utilisés dans le domaine micro-onde deviennent très absorbants dans le domaine optique. Pour l'instant, aucune solution n'a été proposée, mais les recherches se poursuivent sur un rythme effréné. D'où la solution viendra-t-elle ? Si nous avons une idée, il serait urgent de ne rien publier et de déposer rapidement un brevet...

BIBLIOGRAPHIE

- [1] SHELBY R. A., SMITH D. R. et SCHULTZ S. « Experimental Verification of a Negative Index of Refraction ». *Science*, 2001, n° 292, p. 77-79.
- [2] VESELAGO V. G. « Electrodynamics of substances with simultaneously negative electrical and magnetic permeabilities ». *Sov. Phys. Usp.*, 1968, n° 10, p. 509-514.
- [3] PENDRY J. B., HOLDEN A. J., STEWART W. J. et YOUNGS I. *Phys. Rev. Lett.*, 1996 n° 76, p. 4773.
- [4] ZIOLKOWSKI R. W. et HEYMAN E. « Wave propagation in media having negative permittivity and permeability ». *Phys. Rev. E*, 2001, n° 64, 056625.
- [5] DETTWILLER L. *Qu'est-ce que l'optique géométrique ? fondements et applications*. Paris : Dunod Université, 1990, p. 67-74.
- [6] IMBERT C. « Effet inertial de spin du photon : théorie et preuve expérimentale », Thèse d'état, Université d'Orsay, 1970, p. 28-31.
- [7] DETTWILLER L. « Sur la prétendue équation de conservation de l'énergie électromagnétique $R + T = 1$ ». *Bull. Un. Phys.*, mars 1992, vol. 86, n° 742, p. 473-481.
- [8] DETTWILLER L. *Optique - 41 exercices & problèmes corrigés accompagnés de rappels de cours*. Paris : Dunod, 1992, p. 255.



Luc DETTWILLER
*Professeur en PC**
 Lycée Blaise Pascal
 Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme)



Didier FELBACQ
Professeur
 Université de Montpellier II
 Montpellier (Hérault)

Annexe 1

Dans le cas monochromatique de pulsation ω , la représentation complexe des champs $\underline{\mathbf{E}}$, $\underline{\mathbf{D}}$, $\underline{\mathbf{B}}$ et $\underline{\mathbf{H}}$ obéit aux équations de MAXWELL dans la matière :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{\mathbf{D}} &= \underline{\rho}_l & \operatorname{div} \underline{\mathbf{B}} &= 0 \\ \operatorname{rot} \underline{\mathbf{E}} &= i \omega \underline{\mathbf{B}} & \operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}} &= \underline{\mathbf{j}}_l - i \omega \underline{\mathbf{D}} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Considérons un milieu linéaire local et isotrope. Pour définir son indice en un point, on fait comme si le milieu avait les mêmes propriétés en tous ses autres points, *i.e.* comme s'il était homogène ; on a donc, pour tout point (de vecteur position \mathbf{r}) et à tout instant (de date t), les trois relations constitutives :

$$\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\omega) \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t), \quad \underline{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \mu(\omega) \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{j}}_l(\mathbf{r}, t) = \gamma(\omega) \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \quad (1.2)$$

(on a supposé que le milieu est immobile, donc il n'y a pas de courant de convection, et le courant libre total se réduit au courant de conduction - la conductivité $\gamma(\omega)$ étant aussi complexe *a priori*).

En prenant la divergence de chaque membre de la quatrième équation de (1.1) on retrouve la relation de conservation des charges libres :

$$\operatorname{div} \underline{\mathbf{j}}_l - i \omega \underline{\rho}_l = 0 \quad (1.3)$$

Avec la première et la troisième relation constitutive (1.2), et la première équation de (1.1), l'équation (1.3) donne :

$$\frac{\varepsilon_{\text{eff}}(\omega)}{\varepsilon(\omega)} i \omega \underline{\rho}_l = 0 \quad \text{où} \quad \varepsilon_{\text{eff}}(\omega) \equiv \varepsilon(\omega) + i \frac{\gamma(\omega)}{\omega}; \quad (1.4)$$

$\underline{\rho}_l / \varepsilon$ et $\operatorname{div} \underline{\mathbf{E}}$ sont donc nuls, sauf pour les zéros de $\omega \varepsilon_{\text{eff}}$ (dont ω nul fait partie dans le cas d'un isolant).

Alors on a :
$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \underline{\mathbf{E}}) = i \omega \operatorname{rot} \underline{\mathbf{B}} \quad (1.5)$$

d'où :
$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \underline{\mathbf{E}}) - \Delta \underline{\mathbf{E}} = i \omega \mu (\gamma - i \omega \varepsilon) \underline{\mathbf{E}} \quad (1.6)$$

et on obtient finalement une équation d'HELMHOLTZ :

$$\Delta \underline{\mathbf{E}} + K^2 \underline{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \quad \text{où} \quad K^2 = \varepsilon_{\text{eff}}(\omega) \mu(\omega) \omega^2. \quad (1.7)$$

En développant $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \underline{\mathbf{B}})$, on trouve que $\underline{\mathbf{B}}$ obéit à la même équation d'HELMHOLTZ (*idem* pour $\underline{\mathbf{D}}$ et $\underline{\mathbf{H}}$).

Annexe 2

On considère la réflexion d'une onde plane monochromatique homogène progressive, incidente normalement dans le milieu (1), sur un dioptre plan le séparant du milieu (2) - ces deux milieux étant linéaires locaux homogènes isotropes, caractérisés respectivement par n_1, Y_1 , etc. et n_2, Y_2 , etc. On choisit l'axe Oz de façon que le dioptre soit le plan d'équation $z = 0$, et que le vecteur unitaire $\mathbf{N}_{12} = -\mathbf{N}_{21}$ normal au dioptre, orienté de (1) vers (2), soit égal au vecteur \mathbf{u}_z dirigeant Oz .

Les ondes incidente et réfléchie sont caractérisées par les représentations complexes de leurs champs électriques

$$\underline{\mathbf{E}}_i = \underline{\mathbf{E}}_{0i} \exp - i(\omega t - n_1 K_0 z) \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{E}}_r = \underline{\mathbf{E}}_{0r} \exp - i(\omega t + n_1 K_0 z) \quad (2.1)$$

et leurs vecteurs de POYNTING moyens sont :

$$\langle \mathbf{R}_i \rangle (z) = \Re e Y_1 \frac{\|\underline{\mathbf{E}}_{0i}\|^2}{2} \exp(-2n_1'' K_0 z) \mathbf{u}_z \quad (2.2)$$

et

$$\langle \mathbf{R}_r \rangle (z) = -\Re e Y_1 \frac{\|\underline{\mathbf{E}}_{0r}\|^2}{2} \exp(2n_1'' K_0 z) \mathbf{u}_z$$

Par définition, les facteurs de réflexion et de transmission s'écrivent respectivement (même en incidence oblique)

$$R \equiv \frac{\langle \mathbf{R}_r \rangle (0_-) \cdot \mathbf{N}_{21}}{\langle \mathbf{R}_i \rangle (0_-) \cdot \mathbf{N}_{12}} \quad \text{et} \quad T \equiv \frac{\langle \mathbf{R}_t \rangle (0_+) \cdot \mathbf{N}_{12}}{\langle \mathbf{R}_i \rangle (0_-) \cdot \mathbf{N}_{12}} \quad (2.3)$$

où \mathbf{R}_t désigne le vecteur de POYNTING de l'onde transmise ; T est toujours positif à cause de la dernière condition d'onde sortante de (32). Dans le cas de l'incidence normale considéré ici, R se met sous la forme bien connue :

$$R = \left| \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} \right|^2 ; \quad (2.4)$$

quant à T , son intérêt se manifeste surtout lorsqu'il est lié à R par la relation dite de « conservation de l'énergie » :

$$R + T = 1. \quad (2.5)$$

Nous allons rappeler maintenant que R ne correspond à une réalité physique que si n_1 est réel, et qu'avec T non nul la relation (2.5) est satisfaite si et seulement si Y_1 est réel - en dehors du cas très particulier où $Y_2 / Y_1 \in \mathbf{R}$.

En effet, une mesure directe (*i.e.* fondée sur la définition) de R n'est envisageable que par extrapolation [7] : en remplaçant l'onde plane incidente par un pinceau collimaté, d'incidence θ tendant vers zéro, et en mesurant les flux incident et réfléchis assez en

amont du dioptre - où les pinceaux incident et réfléchi sont séparés transversalement, donc en $z < -z_m < 0$. Le rapport de ces flux ne donne le facteur exprimé en (2.4) que si n_1 est réel, car leurs mesures ne se font pas en $z = 0_-$. À cause de la diffraction, et comme on veut que le pinceau incident reste quasi-collimaté, on ne peut pas faire tendre ses dimensions transversales vers zéro ; donc $z_m \rightarrow \infty$ si $\theta \rightarrow 0$, et avec n_1'' positif (resp. négatif) le phénomène d'absorption (resp. de saturation de l'amplification) des pinceaux rend impossible toute extrapolation rigoureuse, ou fiable, du facteur de réflexion en incidence normale à partir des flux en $z < -z_m$.

Envisageons alors une mesure indirecte de R , passant par celle de T supposé obéir à la relation (2.5) ; pour déterminer T expérimentalement il faut encore mesurer le flux incident par extrapolation (donc il faut toujours avoir n_1 réel), mais en plus on veut que :

$$[\langle \mathbf{R}_i \rangle + \langle \mathbf{R}_r \rangle] \cdot \mathbf{N}_{12} = \langle \mathbf{R}_t \rangle \cdot \mathbf{N}_{12} \tag{2.6}$$

Or la relation de passage pour le vecteur de POYNTING dans la matière, déduite de celles des champs \mathbf{E} et \mathbf{H} , s'écrit :

$$(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \cdot \mathbf{N}_{12} = -\mathbf{j}_{1s} \cdot \mathbf{E}_1 = -\mathbf{j}_{1s} \cdot \mathbf{E}_2 \tag{2.7}$$

où \mathbf{j}_{1s} est la densité de courant surfacique libre sur le dioptre immobile, et les indices 1 et 2 désignent les limites d'une grandeur en un point qui tend, du côté 1 ou 2 du dioptre respectivement, vers un même point du dioptre. On considère que les milieux (1) et (2) ne sont pas des supraconducteurs, et ne sont pas modélisés par des conducteurs parfaits ; donc \mathbf{j}_{1s} est nul (sinon cela supposerait qu'il y a sur une épaisseur infiniment petite un courant volumique de densité infiniment grande, ce qui est impossible). Il s'ensuit :

$$\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{N}_{12} = \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{N}_{12} \tag{2.8}$$

Comme dans le milieu (2) l'onde transmise est toute seule,

$$\langle \mathbf{R}_t \rangle(0_+) = \langle \mathbf{R}_2 \rangle ; \tag{2.9}$$

dans le milieu (1) c'est plus compliqué, car les ondes incidente et réfléchie n'ont pas le même sens de propagation et se superposent, donc

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R}_1 \rangle &= \langle \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \Re e \left[(\underline{\mathbf{E}}_{0i} + \underline{\mathbf{E}}_{0r})^* \times (\underline{\mathbf{H}}_{0i} + \underline{\mathbf{H}}_{0r}) \right] \\ &= \langle \mathbf{R}_i \rangle(0_-) + \langle \mathbf{R}_r \rangle(0_-) + \frac{1}{2} \Re e \left[\underline{\mathbf{E}}_{0i}^* \times \underline{\mathbf{H}}_{0r} + \underline{\mathbf{E}}_{0r}^* \times \underline{\mathbf{H}}_{0i} \right] \end{aligned} \tag{2.10}$$

et le terme d'interférences pour $\langle \mathbf{R}_1 \rangle$ entre l'onde incidente et l'onde réfléchie [8] s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Re e \left[\underline{\mathbf{E}}_{0i}^* \times \underline{\mathbf{H}}_{0r} + \underline{\mathbf{E}}_{0r}^* \times \underline{\mathbf{H}}_{0i} \right] &= \frac{1}{2} \Re e \left[\underline{\mathbf{E}}_{0i}^* \times (-Y_1 \mathbf{u}_z \times \underline{\mathbf{E}}_{0r}) + \underline{\mathbf{E}}_{0r}^* \times (Y_1 \mathbf{u}_z \times \underline{\mathbf{E}}_{0i}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \Re e \left[Y_1 (\underline{\mathbf{E}}_{0i} \cdot \underline{\mathbf{E}}_{0r}^* - \underline{\mathbf{E}}_{0i}^* \cdot \underline{\mathbf{E}}_{0r}) \right] \mathbf{u}_z \\ &= (\Im m Y_1) \Im m (\underline{\mathbf{E}}_{0i}^* \cdot \underline{\mathbf{E}}_{0r}) \mathbf{u}_z \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ainsi, lorsque Y_1 est réel, on obtient une propriété remarquable (vraie aussi dans le cas de

l'incidence oblique !) :

$$\langle \mathbf{R}_1 \rangle \cdot \mathbf{N}_{12} = \left[\langle \mathbf{R}_i \rangle(0_-) + \langle \mathbf{R}_r \rangle(0_-) \right] \cdot \mathbf{N}_{12} \quad (2.12)$$

d'où, avec les relations (2.8) et (2.9), l'on déduit (2.6) et (2.5) finalement, ce qui permet de calculer

$$R = 1 - T \leq 1 \quad (2.13)$$

On voit donc qu'une condition suffisante pour obtenir la relation dite de « conservation de l'énergie » est $Y_1 \in \mathbf{R}$; sinon, d'après (2.11) il est nécessaire et suffisant que

$$\Im m \left(\frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} \right) = 0, \text{ i.e. } Y_2 / Y_1 \in \mathbf{R} \text{ (} Y_1 \text{ étant non nul dans ce cas où il n'est pas réel).}$$