



**HAL**  
open science

# UN EFFET D'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE MODERNE : L'INFLUENCE DE LA POLARISATION SUR LA DIRECTION DES RAYONS RÉFRACTÉS

Luc Dettwiller

► **To cite this version:**

Luc Dettwiller. UN EFFET D'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE MODERNE : L'INFLUENCE DE LA POLARISATION SUR LA DIRECTION DES RAYONS RÉFRACTÉS. Doctoral. 2004. sfo-00361402

**HAL Id: sfo-00361402**

**<https://hal-sfo.ccsd.cnrs.fr/sfo-00361402>**

Submitted on 14 Feb 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Union des professeurs de physique et de chimie

## Un effet d'optique géométrique moderne

### *L'influence de la polarisation sur la direction des rayons réfractés*

par **Luc DETTWILLER**

Lycée Blaise Pascal - 63037 Clermont-Ferrand Cedex  
dettwillerluc@voila.fr

#### RÉSUMÉ

*Les définitions et les premières propriétés des ondes inhomogènes et des ondes évanescentes sont rappelées ; dans le cas des ondes électromagnétiques, on donne des expressions inédites de leur vecteur de POYNTING qui, par rapport aux ondes homogènes, présente la particularité d'avoir une moyenne explicitement dépendante de la polarisation. Quand une onde homogène arrive en incidence oblique sur un dioptre, et que l'indice relatif du second milieu n'est pas réel, l'onde transmise est inhomogène ; la direction de ses rayons dépend donc de la polarisation, peut sortir imperceptiblement du plan d'incidence, et même fluctuer de part et d'autre de ce plan dans le cas d'une polarisation partielle. Quoique toutes ces propriétés se démontrent dans le cadre de l'optique géométrique moderne, elles relativisent nettement la portée des lois de DESCARTES !*

#### INTRODUCTION

Nous avons vu récemment [1] que l'étude de phénomènes de réfraction inhabituels et porteurs d'applications nouvelles, comme la réfraction négative entre l'air et un milieu gaucher, suscite un vif intérêt au sein de la communauté des opticiens. Dans la bande de fréquences où le second milieu devient gaucher, comme elle doit se situer auprès d'une résonance diélectrique et magnétique simultanément, l'indice d'absorption  $n''$  (i.e. la partie imaginaire de l'indice complexe  $n$ ) n'est pas toujours négligeable vis-à-vis de l'indice de réfraction  $n'$  (i.e. la partie réelle de  $n$ ) ; il en va de même pour la partie imaginaire  $\mu''$  de la perméabilité magnétique  $\mu$ , etc. Une étude correcte des réfractions négatives doit donc prendre en compte l'influence de ces parties imaginaires ; tel est le but

de cet article. Mais on peut noter que, sur le plan théorique, le problème se posait déjà pour les réfractions ordinaires en optique traditionnelle, puisqu'à part le vide aucun milieu n'est strictement transparent ; cependant, avec les matériaux usuels mais aussi avec les milieux laser, leur caractère absorbant ou amplificateur de lumière s'explique surtout par la partie imaginaire de leur permittivité électrique  $\epsilon$ ...

Dans cet article visant à raffiner la connaissance des lois de la réfraction, nous excluons tout effet de diffraction qui pourrait conduire à une violation des lois de DESCARTES. Nous nous plaçons donc systématiquement dans le cadre de l'optique géométrique ; au sens moderne on sait [2] que cette approche n'ignore pas la nature ondulatoire de la lumière, mais suppose que la structure des ondes considérées est toujours localement plane - ce qui constitue l'approximation fondamentale de l'optique géométrique (voir [2] pp. 59-61 et 66). Afin de considérer une situation exempte des réserves dues à cette approximation, nous nous limiterons au cas idéal où le dioptre provoquant la réfraction est infini et plan, éclairé par une onde plane monochromatique homogène progressive (dans le premier milieu).

Dans ce cas simplifié, si on trouve une violation des lois de DESCARTES de la réfraction [3], on ne pourra pas l'imputer à la diffraction ! Et pour simplifier encore, nous supposerons le premier milieu parfaitement transparent (ce qui n'est réalisé que pour le vide). Quant au second milieu, ses inévitables (quoique faibles) non-linéarités, ainsi que d'éventuelles anisotropies, vont bien sûr affecter les lois de la réfraction ; mais nous omettrons encore ces phénomènes, de façon à nous concentrer sur l'effet du seul - et inévitable - caractère absorbant (ou amplificateur) de ce milieu... Nous verrons que, pour des absorptions faibles permettant l'observation de la lumière transmise, c'est surtout la première loi de DESCARTES de la réfraction qui peut s'avérer la plus erronée, tandis que les corrections à la seconde loi de DESCARTES ne sont que du second ordre. Et une surprise nous attend, concernant le comportement d'un rayon de lumière naturelle réfractée ! Tout cela vient du fait qu'en incidence oblique, lorsque l'indice (relatif) d'absorption du second milieu (par rapport au premier) est non nul, l'onde transmise est inhomogène.

Pour appréhender correctement l'ensemble de ces phénomènes, nous commencerons par rappeler la définition et les propriétés essentielles des ondes inhomogènes ou des ondes évanescentes, en insistant sur l'expression de leur vecteur de POYNTING, dont nous fournirons des expressions inédites - à notre connaissance. Puis, dans le cas de l'incidence oblique, nous déterminerons le vecteur de propagation de l'onde plane transmise dans un milieu d'indice complexe ; enfin, nous calculerons le vecteur de POYNTING moyen de cette onde, dont la direction est par définition celle des rayons réfractés, et nous constaterons qu'ils possèdent plusieurs propriétés insolites...

## 1. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ONDES INHOMOGÈNES

Dans cet article, chaque onde considérée sera toujours une onde plane monochromatique progressive ; sa pulsation est  $\omega$  et son vecteur de propagation  $\mathbf{K} = nK_0 \mathbf{u}$  où

$K_0 \equiv \frac{\omega}{c}$  et  $\mathbf{u}^2 = 1$ , dans un milieu d'indice complexe  $n$  (la célérité de la lumière dans le vide étant notée  $c$ ). Comme les représentations complexes de ses champs sont proportionnelles à

$$\exp(-i\omega t + i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}) = \exp(-\mathbf{K}'\cdot\mathbf{r})\exp(-i(\omega t - \mathbf{K}'\cdot\mathbf{r})) \quad (1)$$

la vitesse de phase  $\mathbf{v}_\varphi$  de cette onde est colinéaire à  $\mathbf{K}'$ , et les amplitudes réelles de ses champs décroissent exponentiellement dans le sens de  $\mathbf{K}''$  (d'où son caractère éventuellement évanescent).

Pour une **onde homogène**, le vecteur unitaire  $\mathbf{u}$  est réel et l'indice  $n$  n'est pas imaginaire pur. Lorsque  $n$  est complexe, les parties réelle et imaginaire  $\mathbf{K}'$  et  $\mathbf{K}''$  du vecteur de propagation sont parallèles, donc la direction de variation de l'amplitude réelle est aussi celle de  $\mathbf{v}_\varphi$  ; c'est le propre d'une onde homogène.

### 1.1. Distinction entre ondes inhomogènes et ondes évanescentes

Pour une **onde inhomogène**, le vecteur  $\mathbf{u}$  est donc non réel ou le scalaire  $n$  est imaginaire pur ([2] pp. 67-68). En notant  $\mathbf{u}'$  et  $\mathbf{u}''$  les parties réelle et imaginaire de  $\mathbf{u}$ , on trouve

$$\mathbf{u}^2 \equiv \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = (\mathbf{u}'^2 - \mathbf{u}''^2) + i2\mathbf{u}'\cdot\mathbf{u}'' \quad (2)$$

et on voit que le caractère unitaire de  $\mathbf{u}$ , défini par  $\mathbf{u}^2 \equiv 1$ , implique

$$\mathbf{u}'^2 - \mathbf{u}''^2 = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{u}'\cdot\mathbf{u}'' = 0 \quad (3)$$

(idem pour  $\mathbf{v}$  défini au paragraphe 1.2.). Alors, d'après la première formule de LAGRANGE [4],

$$(\mathbf{u}' \times \mathbf{u}'')^2 = \mathbf{u}'^2 \mathbf{u}''^2 - (\mathbf{u}'\cdot\mathbf{u}'')^2 = (1 + \mathbf{u}''^2) \mathbf{u}'^2 ; \quad (4)$$

donc, parce que  $\mathbf{u}^2 \in \mathbf{R}^*$ ,  $\mathbf{u}'$  et  $\mathbf{u}''$  ne sont pas colinéaires si  $\mathbf{u}'' \neq 0$ . En général  $\mathbf{K}'$  et  $\mathbf{K}''$  ne sont pas parallèles à  $\mathbf{u}'$  et  $\mathbf{u}''$  respectivement, car avec  $n$  complexe on trouve

$$\mathbf{K}' = K_0 (n'\mathbf{u}' - n''\mathbf{u}'') \quad \text{et} \quad \mathbf{K}'' = K_0 (n''\mathbf{u}' + n'\mathbf{u}'') ; \quad (5)$$

cela donne  $\mathbf{K}' \times \mathbf{K}'' = K_0^2 (n'\mathbf{u}' - n''\mathbf{u}'') \times (n''\mathbf{u}' + n'\mathbf{u}'') = K_0^2 (n'^2 + n''^2) \mathbf{u}' \times \mathbf{u}'' \quad (6)$

donc ( $n$  étant non nul) la non-colinéarité de  $\mathbf{u}'$  et  $\mathbf{u}''$  équivaut à celle de  $\mathbf{K}'$  et  $\mathbf{K}''$  - alors la direction de variation de l'amplitude réelle diffère de celle de  $\mathbf{v}_\varphi$  (d'où l'appellation d'onde inhomogène), mais les plans vectoriels  $(\mathbf{u}', \mathbf{u}'')$  et  $(\mathbf{K}', \mathbf{K}'')$  sont confondus.

Une **onde évanescente** est par définition une onde inhomogène dans un milieu où  $n^2$  est réel ([2] pp. 67-68) ; donc, ou bien  $n$  est réel mais pas le vecteur unitaire  $\mathbf{u}$ , ou bien  $n$  est imaginaire pur et  $\mathbf{u}$  peut être réel. Les directions de  $\mathbf{u}'$  et  $\mathbf{u}''$  sont donc respectivement celles de  $\mathbf{K}'$  et  $\mathbf{K}''$ , ou bien l'inverse - lorsque  $\mathbf{K} = i\mathbf{K}'' = in'' K_0 \mathbf{u}$  ; ainsi une onde évanescente est-elle caractérisée par le fait que  $\mathbf{K}'$  est normal à  $\mathbf{K}'' \neq 0$ .

**Attention :** il ne faut pas confondre  $\mathbf{u}^2$ , qui pourrait être un nombre complexe si  $\mathbf{u}$  n'était pas unitaire, avec  $\|\mathbf{u}\|^2 \equiv \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}^* = \mathbf{u}'^2 + \mathbf{u}''^2$  qui est toujours positif.

### 1.2. Structure et polarisation

L'onde considérée est décrite par la représentation complexe de son champ électrique

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{K}r} \quad \text{tel que} \quad \mathbf{u} \cdot \underline{\mathbf{E}} = 0, \tag{7}$$

et de son champ magnétique

$$\underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \frac{\mathbf{K}}{\omega} \times \underline{\mathbf{E}} = Y \mathbf{u} \times \underline{\mathbf{E}} \tag{8}$$

où  $Y \equiv n/\mu c$  est l'admittance complexe du milieu.

On définit une base réelle orthonormée directe  $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$  telle que  $\mathbf{u}' \equiv u' \mathbf{u}_x$  et  $\mathbf{u}'' \equiv u'' \mathbf{u}_y \neq \mathbf{0}$  avec  $u' > u'' > 0$ . La propriété de transversalité  $\mathbf{u} \cdot \underline{\mathbf{E}} = 0$  fait que  $\underline{\mathbf{E}}$  est une combinaison linéaire des vecteurs unitaires  $\mathbf{u}_z \equiv \mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y \equiv \frac{\mathbf{u}' \times \mathbf{u}''}{\|\mathbf{u}'\| \|\mathbf{u}''\|}$  réel et  $\mathbf{v} \equiv \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}$

complexe :

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{E}_p \mathbf{v} + \underline{E}_s \mathbf{u}_z \tag{9}$$

– les indices  $P$  et  $S$  désignent les composantes respectivement parallèle et perpendiculaire au plan  $(\mathbf{u}', \mathbf{u}'')$  : ce sont les initiales des adjectifs allemands « parallel » et « senkrecht » qui veulent dire « parallèle » et « perpendiculaire ».

Si  $\underline{\mathbf{E}}$  est parallèle à  $\mathbf{u}_z$  (cas de l'« onde TE » où  $\underline{E}_p = 0$ , son champ électrique étant « transverse » - par rapport à  $\mathbf{u}'$  ou à  $\mathbf{K}'$ ),  $\underline{\mathbf{E}}$  est polarisé rectilignement, mais  $\underline{\mathbf{H}}$  est parallèle à  $\mathbf{u} \times \mathbf{u}_z = -\mathbf{v} = iu'' \mathbf{u}_x - u' \mathbf{u}_y$  donc « non transverse » et polarisé elliptiquement, ses grand et petit axes étant parallèles à  $\mathbf{u}_y$  et  $\mathbf{u}_x$  respectivement, son ellipticité valant  $u''/u'$ , et son sens étant celui de la rotation (de moins de 180°) qui transforme  $\mathbf{u}_x$  en  $\mathbf{u}_y$  ; si  $\underline{\mathbf{E}}$  est parallèle à  $\mathbf{v}$  il a la même polarisation elliptique, mais  $\underline{\mathbf{H}}$  est parallèle à  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \equiv \mathbf{u} \times (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}) = (\mathbf{u}^2) \mathbf{u}_z - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_z) \mathbf{u} = \mathbf{u}_z$  donc polarisé rectilignement et perpendiculairement au plan de la polarisation elliptique précédente (cas de l'« onde TM », où  $\underline{E}_s = 0$ ) [5]. Dans le cas général, les plans d'oscillation de  $\underline{\mathbf{E}}$  et de  $\underline{\mathbf{H}}$  ne sont parallèles ni à  $\mathbf{u}_x$ , ni à  $\mathbf{u}_y$  et ni à  $\mathbf{u}_z$  - contrairement au cas d'une onde homogène, où ces plans sont normaux à  $\mathbf{u}_x$  quelle que soit la polarisation de cette onde.

### 1.3. Vecteur de POYNTING

Pour exprimer le vecteur de POYNTING d'une onde monochromatique en fonction des représentations complexes  $\underline{\mathbf{E}}$  et  $\underline{\mathbf{H}}$  de ses champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ , on peut écrire

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{E} \times \mathbf{H} \equiv \frac{\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{E}}^*}{2} \times \frac{\underline{\mathbf{H}} + \underline{\mathbf{H}}^*}{2} = \frac{\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^* + \underline{\mathbf{E}}^* \times \underline{\mathbf{H}}}{4} + \frac{\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}} + \underline{\mathbf{E}}^* \times \underline{\mathbf{H}}^*}{4} \tag{10}$$

et on voit immédiatement que la première fraction de cette somme est indépendante de  $t$  : c'est la valeur moyenne du vecteur de POYNTING sur une durée  $\pi/\omega$ ,

$$\langle \mathbf{R} \rangle = \frac{\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^* + \underline{\mathbf{E}}^* \times \underline{\mathbf{H}}}{4} = \frac{1}{2} \Re e \left( \underline{\mathbf{E}}^* \times \underline{\mathbf{H}} \right) \tag{11}$$

où  $\Re e$  désigne la partie réelle ; quant à la seconde fraction, qui a pour pulsation  $2\omega$ , c'est la partie harmonique du vecteur de POYNTING

$$\mathbf{R} - \langle \mathbf{R} \rangle = \frac{\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}} + \underline{\mathbf{E}}^* \times \underline{\mathbf{H}}^*}{4} = \frac{1}{2} \Re e (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}). \quad (12)$$

### 1.3.1. Valeur moyenne

Dans le cas d'une onde homogène l'expression (11) du vecteur de POYNTING moyen se simplifie facilement [1], et donne le résultat classique  $\Re e Y \frac{\|\underline{\mathbf{E}}\|^2}{2} \mathbf{u}_x$  où  $\|\underline{\mathbf{E}}\| \equiv \sqrt{\underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{E}}^*}$  est réel positif, appelé « norme de  $\underline{\mathbf{E}}$  ».

La plupart du temps  $\Re e Y$  est quasi-proportionnel à  $\Re e n$ , car  $\mu$  est quasiment réel ; mais cela doit parfois être remis en question, plus souvent dans le domaine centimétrique (avec les ferrites, les méta-matériaux, la raie à 21 cm de l'hydrogène, celle du césium 133 définissant la seconde) que dans le domaine optique (par exemple pour une raie à 588,0 nm de l'ion europium, et celle à 1,3  $\mu\text{m}$  du laser à iode).

Le calcul de (11) se complique fortement lorsque l'onde est inhomogène et que  $\mu$  est complexe ; nous allons voir comment généraliser le résultat classique.

En partant des relations (8) et (11), on obtient

$$\langle \mathbf{R} \rangle = \frac{1}{2} \Re e \left[ \underline{\mathbf{E}}^* \times (Y \mathbf{u} \times \underline{\mathbf{E}}) \right] = \frac{\|\underline{\mathbf{E}}\|^2}{2} \Re e (Y \mathbf{u}) - \frac{1}{2} \Re e \left[ Y (\underline{\mathbf{E}}^* \cdot \mathbf{u}) \underline{\mathbf{E}} \right] \quad (13)$$

avec  $\Re e (Y \mathbf{u}) = Y \mathbf{u}' - Y^* \mathbf{u}''$ . Comme les orientations des plans d'oscillation de  $\mathbf{E}$  et de  $\mathbf{H}$  sont *a priori* quelconques par rapport à  $\mathbf{u}_x$ ,  $\mathbf{u}_y$  et  $\mathbf{u}_z$  dans le cas d'une onde inhomogène, il en est de même en général pour  $\langle \mathbf{R} \rangle$ . Compte tenu de  $\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{v}^* = (\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{v})^*$  et  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{u}_z, \mathbf{u}_z, \mathbf{u}) = 0$ , le calcul de  $\|\underline{\mathbf{E}}\|^2$  donne

$$\begin{aligned} \|\underline{\mathbf{E}}\|^2 &= (\underline{E}_p \mathbf{v} + \underline{E}_s \mathbf{u}_z) \cdot (\underline{E}_p^* \mathbf{v}^* + \underline{E}_s^* \mathbf{u}_z) \\ &= |\underline{E}_p|^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^* + |\underline{E}_s|^2 \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z \end{aligned} \quad (14)$$

mais, alors que  $\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z = 1$ , on a

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^* = (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}^*) = (\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*) - (\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}^*) = \|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u}'^2 + \mathbf{u}''^2 \geq 1 \quad (15)$$

d'après la première formule de LAGRANGE [4], et donc

$$\|\underline{\mathbf{E}}\|^2 = |\underline{E}_p|^2 \|\mathbf{u}\|^2 + |\underline{E}_s|^2 \geq |\underline{E}_p|^2 + |\underline{E}_s|^2. \quad (16)$$

De même, puisque  $\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u} = 0 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u}^*$ , le calcul de  $\underline{\mathbf{E}}^* \cdot \mathbf{u}$  donne

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}^* \cdot \mathbf{u} &= (\underline{E}_p^* \mathbf{v}^* + \underline{E}_s^* \mathbf{u}_z) \cdot \mathbf{u} = \underline{E}_p^* \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u} \\ &= \underline{E}_p^* (\mathbf{v}' - i \mathbf{v}'') \cdot \mathbf{u} = \underline{E}_p^* (\mathbf{v} - 2i \mathbf{v}'') \cdot \mathbf{u} \\ &= -2i \underline{E}_p^* \mathbf{v}'' \cdot \mathbf{u} = -2i \underline{E}_p^* (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}'') \cdot (\mathbf{u}' + i \mathbf{u}'') \\ &= 2i \underline{E}_p^* (\mathbf{u}_z, \mathbf{u}', \mathbf{u}'') = 2i \underline{E}_p^* \|\mathbf{u}'\| \|\mathbf{u}''\| \end{aligned} \quad (17)$$

donc

$$\begin{aligned}
 \Re e \left[ Y \left( \underline{\mathbf{E}}^* \cdot \underline{\mathbf{u}} \right) \underline{\mathbf{E}} \right] &= 2 \|\underline{\mathbf{u}}'\| \|\underline{\mathbf{u}}''\| \Re e \left[ i Y \underline{E}_p^* \left( \underline{E}_p \mathbf{v} + \underline{E}_s \mathbf{u}_z \right) \right] \\
 &= -2 \|\underline{\mathbf{u}}'\| \|\underline{\mathbf{u}}''\| \left[ \left| \underline{E}_p \right|^2 \mathbf{u}_z \times \Im m \left( Y \underline{\mathbf{u}} \right) + \Im m \left( Y \underline{E}_p^* \underline{E}_s \right) \mathbf{u}_z \right] \\
 &= -2 \left| \underline{E}_p \right|^2 \left( \underline{\mathbf{u}}' \times \underline{\mathbf{u}}'' \right) \times \left( Y' \underline{\mathbf{u}}'' + Y'' \underline{\mathbf{u}}' \right) - 2 \Im m \left( Y \underline{E}_p^* \underline{E}_s \right) \underline{\mathbf{u}}' \times \underline{\mathbf{u}}'' \\
 &= -2 \left| \underline{E}_p \right|^2 \left[ - \left( Y' \underline{\mathbf{u}}''^2 \right) \underline{\mathbf{u}}' + \left( Y'' \underline{\mathbf{u}}'^2 \right) \underline{\mathbf{u}}'' \right] - 2 \Im m \left( Y \underline{E}_p^* \underline{E}_s \right) \underline{\mathbf{u}}' \times \underline{\mathbf{u}}''
 \end{aligned} \tag{18}$$

où  $\Im m$  désigne la partie imaginaire ; il vient alors

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{R} \rangle &= \frac{\left| \underline{E}_p \right|^2 \left( \underline{\mathbf{u}}'^2 + \underline{\mathbf{u}}''^2 \right) + \left| \underline{E}_s \right|^2}{2} \left( Y' \underline{\mathbf{u}}' - Y'' \underline{\mathbf{u}}'' \right) + \left| \underline{E}_p \right|^2 \left[ - \left( Y' \underline{\mathbf{u}}''^2 \right) \underline{\mathbf{u}}' + \left( Y'' \underline{\mathbf{u}}'^2 \right) \underline{\mathbf{u}}'' \right] \\
 &\quad + \Im m \left( Y \underline{E}_p^* \underline{E}_s \right) \underline{\mathbf{u}}' \times \underline{\mathbf{u}}''
 \end{aligned} \tag{19}$$

et finalement

$$\boxed{\langle \mathbf{R} \rangle = \frac{\left| \underline{E}_p \right|^2 + \left| \underline{E}_s \right|^2}{2} Y' \underline{\mathbf{u}}' + \frac{\left| \underline{E}_p \right|^2 - \left| \underline{E}_s \right|^2}{2} Y'' \underline{\mathbf{u}}'' + \Im m \left( Y \underline{E}_p^* \underline{E}_s \right) \underline{\mathbf{u}}' \times \underline{\mathbf{u}}''} \tag{20}$$

Cette expression intrinsèque, inédite à notre connaissance, nous sera d'un grand secours pour étudier les phénomènes où interviennent les ondes inhomogènes ; signalons déjà qu'ils sont à la base de plusieurs dispositifs d'optique moderne, comme les coupleurs en optique planaire, les modulateurs rapides d'intensité ([2] pp. 130-134), les microscopes optiques en champ proche [6]... Comme les vecteurs  $\mathbf{K}'$  et  $\mathbf{K}''$  sont parfois plus faciles à trouver que  $\underline{\mathbf{u}}'$  et  $\underline{\mathbf{u}}''$ , il est avantageux d'utiliser la relation (6) ; pour finir, on note que l'expression (20) fait naturellement intervenir les paramètres de STOKES de l'onde dans la base orthonormée  $(\mathbf{v}, \mathbf{u}_z)$ , définis par les valeurs moyennes ([7] p. 102) de

$$S_0 \equiv \left| \underline{E}_p \right|^2 + \left| \underline{E}_s \right|^2, \quad S_1 \equiv \left| \underline{E}_p \right|^2 - \left| \underline{E}_s \right|^2, \quad S_2 \equiv 2 \Re e \left( \underline{E}_p \underline{E}_s^* \right), \quad S_3 \equiv 2 \Im m \left( \underline{E}_p \underline{E}_s^* \right) \tag{21}$$

– mais ici ces quatre nombres réels sont constants car l'onde considérée est rigoureusement monochromatique (et donc parfaitement polarisée) :

$$\boxed{\langle \mathbf{R} \rangle = \frac{S_0}{2} Y' \underline{\mathbf{u}}' + \frac{S_1}{2} Y'' \underline{\mathbf{u}}'' + \frac{Y'' S_2 - Y' S_3}{2} \frac{\mathbf{K}' \times \mathbf{K}''}{K_0^2 |n|^2}} \tag{22}$$

Dans le cas d'une onde homogène on a  $\underline{\mathbf{u}}''$  nul, donc  $\mathbf{K}'$  colinéaire à  $\mathbf{K}''$  et  $\underline{\mathbf{u}}' = \underline{\mathbf{u}}_x$  ;

ainsi retrouve-t-on avec bonheur le résultat classique  $\langle \mathbf{R} \rangle = \frac{S_0}{2} Y' \underline{\mathbf{u}}' = \Re e Y \frac{\|\underline{\mathbf{E}}\|^2}{2} \underline{\mathbf{u}}_x$ , où  $S_0$  est appelé « intensité (instantanée) » de l'onde ([7] p. 78).

### 1.3.2. Partie harmonique

Grâce à la relation (12), on sait qu'elle s'écrit  $\mathbf{R} - \langle \mathbf{R} \rangle = \frac{1}{2} \Re e \left( \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}} \right)$ , ce que l'on

calculé plus facilement que  $\frac{1}{2} \Re e \left( \underline{\mathbf{E}}^* \times \underline{\mathbf{H}} \right)$  : en effet, on a

$$\Re e \left[ \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}} \right] = \Re e \left[ \underline{\mathbf{E}} \times \left( Y \mathbf{u} \times \underline{\mathbf{E}} \right) \right] = \Re e \left[ \left( Y \underline{\mathbf{E}}^2 \right) \mathbf{u} - \left( Y \underline{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{u} \right) \underline{\mathbf{E}} \right] = \Re e \left[ \left( Y \underline{\mathbf{E}}^2 \right) \mathbf{u} \right] \quad (23)$$

à cause de (7) ; or

$$\underline{\mathbf{E}}^2 = \left( \underline{E}_p \mathbf{v} + \underline{E}_s \mathbf{u}_z \right)^2 = \underline{E}_p^2 \mathbf{v}^2 + \underline{E}_s^2 \mathbf{u}_z^2 = \underline{E}_p^2 + \underline{E}_s^2 \quad (24)$$

car 
$$\mathbf{v}^2 = \left( \mathbf{u}_z \times \mathbf{u} \right)^2 = \mathbf{u}_z^2 \mathbf{u}^2 - \left( \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u} \right)^2 = \mathbf{u}^2 = 1 ; \quad (25)$$

en posant  $\varphi_{sp} \equiv \arg \underline{E}_s - \arg \underline{E}_p$  il vient

$$\begin{aligned} \left| \underline{\mathbf{E}}^2 \right|^2 &= \left| \underline{E}_p^2 \right|^2 + \left| \underline{E}_s^2 \right|^2 + 2 \left| \underline{E}_p^2 \right| \left| \underline{E}_s^2 \right| \cos 2 \varphi_{sp} \\ &= \left( \left| \underline{E}_p^2 \right| + \left| \underline{E}_s^2 \right| \right)^2 - 2 \left| \underline{E}_p \underline{E}_s^* \right|^2 (1 - \cos 2 \varphi_{sp}) \end{aligned} \quad (26)$$

donc 
$$\left| \underline{\mathbf{E}}^2 \right| = \sqrt{S_0^2 - \left( S_2^2 + S_3^2 \right) \sin^2 \varphi_{sp}} \quad (27)$$

ce qui, compte tenu de

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \text{ puis } \left( S_2^2 + S_3^2 \right) \cos^2 \varphi_{sp} = S_2^2 \text{ et } \left( S_2^2 + S_3^2 \right) \sin^2 \varphi_{sp} = S_3^2, \quad (28)$$

s'écrit encore 
$$\left| \underline{\mathbf{E}}^2 \right| = \sqrt{S_1^2 + \left( S_2^2 + S_3^2 \right) \cos^2 \varphi_{sp}} = \sqrt{S_0^2 - S_3^2} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2}. \quad (29)$$

Pour  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ , dans la base  $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$ , on trouve donc

$$\mathbf{R} - \langle \mathbf{R} \rangle = \frac{|Y|}{2} \sqrt{S_1^2 + S_2^2} \begin{pmatrix} u' \cos \left( 2\omega t - \arg Y - \arg \underline{\mathbf{E}}^2(\mathbf{0}, 0) \right) \\ u'' \sin \left( 2\omega t - \arg Y - \arg \underline{\mathbf{E}}^2(\mathbf{0}, 0) \right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

mais pour un autre vecteur position  $\mathbf{r}$  il faut changer  $\omega t$  en  $\omega t - \mathbf{K}' \cdot \mathbf{r}$  et les valeurs des paramètres de STOKES sont atténuées d'un facteur  $\exp 2\mathbf{K}' \cdot \mathbf{r}$  ; cette expression aussi est inédite, à notre connaissance.

On voit que  $\mathbf{R} - \langle \mathbf{R} \rangle$  est polarisé elliptiquement, ses grand et petit axes étant parallèles à  $\mathbf{u}_x$  et  $\mathbf{u}_y$  respectivement, son ellipticité et son sens étant toujours les mêmes que ceux de  $\mathbf{H}$  pour l'onde TE ou de  $\mathbf{E}$  pour l'onde TM (voir § 1.1.).

Enfin,  $\mathbf{R}$  est constant - *i.e.*  $\mathbf{R}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{R} \rangle(\mathbf{r}) \forall t$  - si et seulement si  $\underline{\mathbf{E}}^2 = 0 \forall t$  (ou  $Y = 0$ ), donc si et seulement si  $\underline{E}_s = \pm i \underline{E}_p$ , ce qui équivaut bien à  $S_1 = S_2 = 0$  : cela correspond aux polarisations circulaires dans la base orthonormée  $(\mathbf{v}, \mathbf{u}_z)$ , mais pas dans l'espace réel où les champs ne sont pas transverses !

Dans le cas d'une onde homogène (avec  $Y$  non nul) les champs électrique et magnétique sont transverses,  $\mathbf{R} - \langle \mathbf{R} \rangle$  est toujours polarisé rectilignement dans la direction de propagation, et  $\mathbf{R}$  est constant si et seulement si l'onde est polarisée circulairement dans l'espace réel.

Pour voir maintenant quelles sont les conséquences de ces insolites propriétés sur

le phénomène de réfraction, il faut d’abord déterminer le vecteur de propagation de l’onde transmise.

**2. LOIS DE DESCARTES GÉNÉRALISÉES :  
VECTEUR DE PROPAGATION DE L’ONDE RÉFRACTÉE  
EN INCIDENCE OBLIQUE DANS UN MILIEU ABSORBANT**

On considère dorénavant un dioptre plan illimité, immobile, séparant un milieu {1} d’un milieu {2} ; ceux-ci sont supposés linéaires locaux homogènes isotropes.

On connaît bien l’énoncé classique de la seconde loi de DESCARTES de la réfraction :  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ , avec des notations usuelles. Mais à ce stade de notre étude, nous considérons que les indices  $n_1$  et  $n_2$  des milieux sont complexes *a priori* (ce qui traduit leur caractère absorbant ou amplificateur) ; il est donc clair que cet énoncé classique ne peut être qu’une forme particulière de la loi, ne s’appliquant que dans des situations simplifiées. Nous devons donc partir d’une expression plus générale des lois de DESCARTES, valable dans le cas général où les indices sont complexes ; pour cela, on passe d’abord par le calcul du vecteur de propagation de l’onde transmise, avant de déterminer la direction de ses rayons.

**2.1. Rappel : expression générale des lois de DESCARTES**

On considère une onde incidente plane monochromatique progressive dans le milieu {1}, caractérisée par la représentation complexe de son champ électrique

$$\underline{\mathbf{E}}_i = \underline{\mathbf{E}}_{oi} \exp - i(\omega t - \mathbf{K}_i \cdot \mathbf{r}) \text{ avec } \mathbf{K}_i = n_1 K_0 \mathbf{u}_i \text{ où } \mathbf{u}_i^2 = 1, \text{ et } \mathbf{u}_i \cdot \underline{\mathbf{E}}_{oi} = 0 \quad (31)$$

où la pulsation  $\omega$  et le vecteur de propagation  $\mathbf{K}_i$  pourraient être complexes ; on veut déterminer les ondes réfléchie et transmise.

Fondamentalement on demande à ces trois ondes incidente, réfléchie et transmise, d’être telles que leurs vecteurs de POYNTING moyens  $\langle \mathbf{R}_i \rangle, \langle \mathbf{R}_r \rangle$  et  $\langle \mathbf{R}_t \rangle$  satisfassent, en tout point  $M$  du dioptre,

$$\langle \mathbf{R}_i \rangle \cdot \mathbf{N}_{12} \geq 0, \langle \mathbf{R}_r \rangle \cdot \mathbf{N}_{21} = - \langle \mathbf{R}_r \rangle \cdot \mathbf{N}_{12} \geq 0 \text{ et } \langle \mathbf{R}_t \rangle \cdot \mathbf{N}_{12} \geq 0 \quad (32)$$

où  $\mathbf{N}_{12} \equiv - \mathbf{N}_{21}$  est le vecteur unitaire orienté de {1} vers {2} normal au dioptre en  $M$  - de façon que les flux d’énergie réfléchie et transmise fuient le dioptre en moyenne, tandis que le flux incident est dirigé vers le dioptre ; ces conditions (dites d’ondes sortantes) rejoignent les exigences du principe de causalité appliquées à la réflexion et la transmission, et font que le problème est bien posé.

En admettant l’unicité de la solution d’un problème bien posé en électromagnétisme classique, il nous suffit d’exhiber une solution particulière ; nous la chercherons sous la forme précisée ci-dessous.

Pour l’onde réfléchie, on écrit la représentation complexe de son champ électrique

$$\underline{\mathbf{E}}_r = \underline{\mathbf{E}}_{or} \exp - i(\omega t - \mathbf{K}_r \cdot \mathbf{r}) \text{ avec } \mathbf{K}_r = n_1 K_0 \mathbf{u}_r \text{ où } \mathbf{u}_r^2 = 1, \text{ et } \mathbf{u}_r \cdot \underline{\mathbf{E}}_{or} = 0 \quad (33)$$

puis de son champ magnétique  $\underline{\mathbf{H}}_r = Y_1 \mathbf{u}_r \times \underline{\mathbf{E}}_r$  ; (34)

de même, pour l'onde transmise, on pose

$$\underline{\mathbf{E}}_t = \underline{\mathbf{E}}_{0t} \exp i(\omega t - \mathbf{K}_t \cdot \mathbf{r}) \text{ avec } \mathbf{K}_t = n_2 K_0 \mathbf{u}_t \text{ où } \mathbf{u}_t^2 = 1, \text{ et } \mathbf{u}_t \cdot \underline{\mathbf{E}}_{0t} = 0 \quad (35)$$

$$\underline{\mathbf{H}}_t = Y_2 \mathbf{u}_t \times \underline{\mathbf{E}}_t. \quad (36)$$

Les relations de passage du champ électromagnétique en tout point du dioptre font que les vecteurs de propagation ont leurs composantes parallèles au dioptre (désignées par l'indice // ) qui sont égales, donc

$$\mathbf{K}_{i//} = \mathbf{K}_{r//} = \mathbf{K}_{t//}, \text{ i.e. } \boxed{n_1 \mathbf{u}_{i//} = n_1 \mathbf{u}_{r//} = n_2 \mathbf{u}_{t//}} ; \quad (37)$$

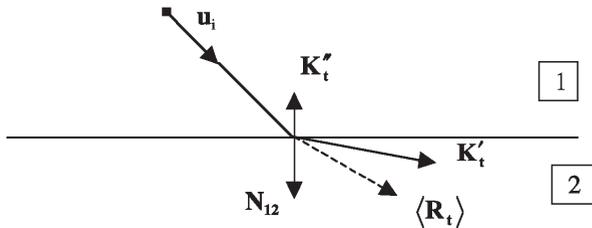
c'est la forme vectorielle des lois de DESCARTES.

Pour toute la suite, nous supposons que l'onde incidente est homogène, *i.e.* que  $\mathbf{u}_i$  est un vecteur réel, ce qui est le cas usuel. On peut montrer qu'alors  $\mathbf{u}_r$  est toujours un vecteur réel ; mais ce n'est pas forcément vrai pour  $\mathbf{u}_t$ , par exemple lorsque  $n_2/n_1$  n'est pas réel (ce qui peut se produire assez nettement au voisinage immédiat des résonances diélectriques et magnétiques).

## 2.2. Détermination du vecteur de propagation de l'onde inhomogène transmise dans un milieu d'indice complexe

Afin d'alléger au maximum des calculs qui s'annonçaient plutôt lourds, nous avons dit que nous nous restreindrons dorénavant au cas où la partie imaginaire de l'indice du premier milieu est négligeable par rapport à celle du second. Cependant,  $\mathbf{u}_t$  et  $\mathbf{K}_t = n_2 K_0 \mathbf{u}_t$  sont complexes dans le cas (réaliste !) où  $n_2$  n'est pas réel - le vecteur  $\mathbf{u}_i$  étant supposé réel mais en incidence non normale ; on va voir que  $\mathbf{K}'_t$  et  $\mathbf{K}''_t$  ne sont pas parallèles, donc que l'onde transmise est forcément inhomogène, ce qui lui confère ses propriétés inhabituelles (comme celles vues au paragraphe 1) :

- ◆ à cause de (37) d'abord,  $\mathbf{K}'_t$ , réel par définition, est parallèle au plan vectoriel d'incidence ( $\mathbf{u}_i, \mathbf{N}_{12}$ ), et  $\mathbf{K}''_t$ , réel par définition, est perpendiculaire au dioptre (*cf.* figure 1) - la composante  $\mathbf{K}_{t//}$  de  $\mathbf{K}_t$  parallèle au dioptre étant réelle et fixée ;
- ◆ grâce à  $\mathbf{K}_t^2 = n_2^2 K_0^2$  ensuite, il n'y a que deux solutions opposées pour l'autre composante de  $\mathbf{K}_t$ , celle qui est perpendiculaire au dioptre :  $\mathbf{K}_{t\perp} = \mathbf{K}'_{t\perp} + i\mathbf{K}''_t$ .



**Figure 1 :** Onde inhomogène transmise dans un milieu amplificateur ( $\langle \mathbf{R}_t \rangle$  est dessiné en pointillés car il sort du plan de la figure, qui est le plan d'incidence).

Si le second milieu absorbe l'onde plane monochromatique transmise, elle vérifie

$$\operatorname{div} \langle \mathbf{R}_t \rangle = -2\mathbf{K}''_t \cdot \langle \mathbf{R}_t \rangle < 0 ; \tag{38}$$

comme on sait que  $\mathbf{K}''_t$  est colinéaire à  $\mathbf{N}_{12}$ , en utilisant maintenant la dernière condition d'onde sortante  $\langle \mathbf{R}_t \rangle \cdot \mathbf{N}_{12} \geq 0$ , on voit que les sens de  $\mathbf{K}''_t$  et  $\mathbf{N}_{12}$  sont identiques : cela permet de ne garder qu'une des deux solutions pour  $\mathbf{K}_{t1}$ . Au contraire, si le second milieu amplifie l'onde,  $\mathbf{K}''_t$  et  $\mathbf{N}_{12}$  sont de sens opposés (cf. figure 1) ; mais alors l'amplitude de l'onde transmise dans le second milieu croît exponentiellement en fonction de la distance au dioptre, jusqu'à la saturation.

Dans les deux cas  $\langle \mathbf{R}_t \rangle \cdot \mathbf{N}_{12} > 0$ , donc le flux énergétique moyen transmis au travers du dioptre n'est pas nul, même si  $|\theta_1| > \arcsin \frac{|n'_2|}{n_1}$  et  $|n''_2| \ll |n'_2|$  ; dans cette dernière situation, on a un phénomène de « réflexion totale atténuée ».

Remarques

On note que la condition d'onde sortante donne  $\mathbf{K}''_t \cdot \mathbf{N}_{12} > 0$  si le milieu {2} est absorbant,  $\mathbf{K}''_t \cdot \mathbf{N}_{12} < 0$  s'il est amplificateur. Ces résultats sont qualitativement indépendants du caractère droitier ou gaucher du second milieu.

La grosse différence par rapport au cas où on a une onde réfractée homogène est qu'*a priori*  $\langle \mathbf{R}_t \rangle$  ne se trouve pas parallèle au plan d'incidence, alors que  $\mathbf{R}_t - \langle \mathbf{R}_t \rangle$  l'est toujours !

### 3. DIRECTION DES RAYONS TRANSMIS

Par définition, la direction des rayons transmis est celle de  $\langle \mathbf{R}_t \rangle$  ; or ce vecteur dépend de la polarisation de l'onde transmise, comme le montre son expression en fonction de la totalité des composantes  $\underline{E}_{p_t}$  et  $\underline{E}_{s_t}$  du champ électrique de l'onde transmise, sur des vecteurs unitaires judicieusement choisis respectivement parallèle et perpendiculaire au plan  $(\mathbf{K}'_t, \mathbf{K}''_t)$  - qui est aussi le plan d'incidence. Mais la polarisation de l'onde transmise dépend de celle de l'onde incidente, et des coefficients de transmission  $\tau_p$  et  $\tau_s$  pour ces composantes *P* et *S* ; dans le cas où les ondes sont homogènes les expressions de ces coefficients sont données par les formules de FRESNEL, mais ici nous devons commencer par les donner dans le cas d'une onde transmise *a priori* inhomogène.

#### 3.1. Coefficients de transmission pour les composantes des champs électriques

Choisissons un repère orthonormé direct tel que *Oxy* soit le plan du dioptre et *Oxz* le plan d'incidence ; ainsi les deuxièmes composantes de  $\mathbf{u}_p$ ,  $\mathbf{u}_r$  et  $\mathbf{u}_t$  sont nulles ( $u_{r_y} = u_{p_y} = u_{t_y} = 0$ ) et le vecteur unitaire  $\mathbf{u}_y$  dirigeant *Oy* est normal au plan d'incidence. On définit aussi les vecteurs unitaires  $\mathbf{v}_p$ ,  $\mathbf{v}_r$  et  $\mathbf{v}_t$  normaux à  $\mathbf{u}_p$ ,  $\mathbf{u}_r$  et  $\mathbf{u}_t$  et parallèles au

plan d'incidence :  $\mathbf{v}_i \equiv \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_x$ ,  $\mathbf{v}_r \equiv -\mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_r$  et  $\mathbf{v}_t \equiv \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_t$  (le signe moins est mis de façon qu'en incidence normale  $\mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{v}_r$  et  $\mathbf{v}_t$  se confondent avec  $\mathbf{u}_x$ ). Or on a déjà posé au paragraphe 2.1. trois relations qui permettent de satisfaire l'équation de MAXWELL-GAUSS :

$$\mathbf{u}_i \cdot \underline{\mathbf{E}}_{oi} = \mathbf{u}_r \cdot \underline{\mathbf{E}}_{or} = \mathbf{u}_t \cdot \underline{\mathbf{E}}_{ot} = 0 ; \tag{39}$$

cela permet de définir, pour les vecteurs  $\underline{\mathbf{E}}_{oi}$ ,  $\underline{\mathbf{E}}_{or}$  et  $\underline{\mathbf{E}}_{ot}$ , leurs composantes parallèles et perpendiculaires au plan d'incidence désignées par les indices  $P$  et  $S$  respectivement, en posant

$$\underline{\mathbf{E}}_{oi} = \underline{E}_{oi}^P \mathbf{v}_i + \underline{E}_{oi}^S \mathbf{u}_y, \quad \underline{\mathbf{E}}_{or} = \underline{E}_{or}^P \mathbf{v}_r + \underline{E}_{or}^S \mathbf{u}_y \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{E}}_{ot} = \underline{E}_{ot}^P \mathbf{v}_t + \underline{E}_{ot}^S \mathbf{u}_y. \tag{40}$$

La continuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{E}$ , par exemple au point  $O$  qui a une position *quelconque sur le dioptre*, s'écrit :

$$\left( \underline{\mathbf{E}}_{oi} + \underline{\mathbf{E}}_{or} \right) \cdot \mathbf{u}_x = \underline{\mathbf{E}}_{ot} \cdot \mathbf{u}_x \quad \text{donc} \quad u_{iz} \underline{E}_{oi}^P - u_{rz} \underline{E}_{or}^P = u_{tz} \underline{E}_{ot}^P \tag{41}$$

$$\left( \underline{\mathbf{E}}_{oi} + \underline{\mathbf{E}}_{or} \right) \cdot \mathbf{u}_y = \underline{\mathbf{E}}_{ot} \cdot \mathbf{u}_y \quad \text{donc} \quad \underline{E}_{oi}^S + \underline{E}_{or}^S = \underline{E}_{ot}^S \tag{42}$$

De même, celle de la composante tangentielle de  $\mathbf{H}$  donne :

$$Y_1 \left( \mathbf{u}_i \times \underline{\mathbf{E}}_{oi} + \mathbf{u}_r \times \underline{\mathbf{E}}_{or} \right) \cdot \mathbf{u}_x = Y_2 \left( \mathbf{u}_t \times \underline{\mathbf{E}}_{ot} \right) \cdot \mathbf{u}_x \quad \text{donc} \quad Y_1 \left( u_{iz} \underline{E}_{oi}^S + u_{rz} \underline{E}_{or}^S \right) = Y_2 u_{tz} \underline{E}_{ot}^S \tag{43}$$

$$Y_1 \left( \mathbf{u}_i \times \underline{\mathbf{E}}_{oi} + \mathbf{u}_r \times \underline{\mathbf{E}}_{or} \right) \cdot \mathbf{u}_y = Y_2 \left( \mathbf{u}_t \times \underline{\mathbf{E}}_{ot} \right) \cdot \mathbf{u}_y \quad \text{donc} \quad Y_1 \left( \underline{E}_{oi}^P - \underline{E}_{or}^P \right) = Y_2 \underline{E}_{ot}^P \tag{44}$$

En tenant compte de  $u_{rz} = -u_{iz}$ , on obtient alors facilement les expressions des coefficients de transmission de  $\{1\}$  vers  $\{2\}$ ,  $\tau_p \equiv \frac{\underline{E}_{or}^P}{\underline{E}_{oi}^P}$  et  $\tau_s \equiv \frac{\underline{E}_{or}^S}{\underline{E}_{oi}^S}$ , pour les composantes  $P$  et  $S$  :

$$\tau_p = \frac{2Y_1 u_{iz}}{Y_1 u_{iz} + Y_2 u_{tz}} \quad \text{et} \quad \tau_s = \frac{2Y_1 u_{tz}}{Y_1 u_{iz} + Y_2 u_{tz}}. \tag{45}$$

Comme  $u_{tz}$  est *a priori* complexe, ces expressions généralisent celles de FRESNEL.

### 3.2. Détermination du vecteur de POYNTING moyen de l'onde transmise

D'après (22) on voit immédiatement que

$$\langle \mathbf{R}_t \rangle = \frac{S_{0t}}{2} Y_2' \mathbf{u}'_t + \frac{S_{1t}}{2} Y_2'' \mathbf{u}''_t + \frac{Y_2'' S_{2t} - Y_2' S_{3t}}{2} \frac{\mathbf{K}'_t \times \mathbf{K}''_t}{K_0^2 |n_2|^2} \tag{46}$$

fait intervenir les valeurs instantanées des paramètres de STOKES de l'onde transmise (affectées de l'indice  $t$ ) ; elles sont reliées à celles de l'onde incidente (affectées de l'indice  $i$ ) par

$$S_{0t} = |\tau_p|^2 |E_{pi}|^2 + |\tau_s|^2 |E_{si}|^2 = \frac{|\tau_p|^2 + |\tau_s|^2}{2} S_{0i} + \frac{|\tau_p|^2 - |\tau_s|^2}{2} S_{1i} \tag{47}$$

$$S_{1t} = |\tau_p|^2 |E_{pi}|^2 - |\tau_s|^2 |E_{si}|^2 = \frac{|\tau_p|^2 - |\tau_s|^2}{2} S_{0i} + \frac{|\tau_p|^2 + |\tau_s|^2}{2} S_{1i} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} S_{2i} &= 2 \Re e \left( \tau_p \tau_s^* \right) \Re e \left( \underline{E}_{pi} \underline{E}_{si}^* \right) - 2 \Im m \left( \tau_p \tau_s^* \right) \Im m \left( \underline{E}_{pi} \underline{E}_{si}^* \right) \\ &= \Re e \left( \tau_p \tau_s^* \right) S_{2i} - \Im m \left( \tau_p \tau_s^* \right) S_{3i} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} S_{3i} &= 2 \Im m \left( \tau_p \tau_s^* \right) \Re e \left( \underline{E}_{pi} \underline{E}_{si}^* \right) + 2 \Re e \left( \tau_p \tau_s^* \right) \Im m \left( \underline{E}_{pi} \underline{E}_{si}^* \right) \\ &= \Im m \left( \tau_p \tau_s^* \right) S_{2i} + \Re e \left( \tau_p \tau_s^* \right) S_{3i} \end{aligned} \quad (50)$$

à condition de les définir comme au paragraphe 1.3.1, d'où

$$Y_2'' S_{2i} - Y_2' S_{3i} = \Im m \left( Y_2 \tau_s \tau_p^* \right) S_{2i} - \Re e \left( Y_2 \tau_s \tau_p^* \right) S_{3i} \quad (51)$$

Ainsi, l'angle  $\alpha_2$  entre le rayon réfracté et le plan d'incidence est donné par

$$\left| \tan \alpha_2 \right| = \frac{\left| Y_2'' S_{2i} - Y_2' S_{3i} \right| \left\| \mathbf{u}'_t \right\| \left\| \mathbf{u}''_t \right\|}{\sqrt{\left( S_{0i} Y_2' \mathbf{u}'_t \right)^2 + \left( S_{1i} Y_2'' \mathbf{u}''_t \right)^2}} \quad \text{avec} \quad \left\| \mathbf{u}'_t \right\| \left\| \mathbf{u}''_t \right\| = \frac{\left\| \mathbf{K}'_t \times \mathbf{K}''_t \right\|}{K_0^2 \left| n_2 \right|^2}. \quad (52)$$

### 3.3. Étude à l'ordre 1 en $n''_2$

Considérons maintenant le cas d'un milieu {2} ordinaire de l'optique, avec  $|\theta_1| < \theta_2 \equiv \arcsin \frac{|n_2|}{|n_1|}$  si  $|n_2| < |n_1|$ ; alors  $n''_2$  est très petit,  $\mu''_2$  est négligeable devant la perméabilité magnétique du vide, et on peut simplifier les résultats obtenus en se contentant d'approximations à l'ordre 1 en  $n''_2$ , où  $Y_2''$  et  $\mathbf{u}''_t$  sont aussi d'ordre 1.

On voit déjà que, si on pose  $\theta_2 \equiv (\mathbf{N}_{12}, \mathbf{K}'_t) \cong (\mathbf{u}_x, Y_2' \mathbf{u}'_t)$ , on a  $n_1 \sin \theta_1 \cong n'_2 \sin \theta_2$ . La relation (46) montre que l'existence de  $n''_2 \ll 1$  ne change pas l'angle de réfraction des rayons à l'ordre 1, *i.e.*  $\theta_2 \cong (\mathbf{N}_{12}, \langle \mathbf{R}_T \rangle)$ , mais leur direction a tourné autour de  $\mathbf{N}_{12}$  d'un petit angle  $\beta_2$ . On en obtient une approximation d'ordre 1 en notant que  $\alpha_2 \cong \beta_2 \sin \theta_2$  et en exprimant à l'ordre 0 le rapport  $\frac{\tan \alpha_2}{\left\| \mathbf{u}''_t \right\|} \cong \frac{\alpha_2}{\left\| \mathbf{u}''_t \right\|}$ ; en appliquant la méthode indiquée au paragraphe 2.2. on trouve

$$\mathbf{K}''_t \cong K_0 \frac{n'_2 n''_2}{\sqrt{n_2'^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}} \mathbf{N}_{12} \quad (53)$$

donc

$$\mathbf{K}'_t \times \mathbf{K}''_t \cong -K_0^2 n_1 \sin \theta_1 \frac{n'_2 n''_2}{\sqrt{n_2'^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}} \mathbf{u}_y \quad (54)$$

en choisissant les orientations telles que  $K_{ix}$  et  $\sin \theta_1$  soient dorénavant positifs. En comptant les angles  $\alpha_2$  et  $\beta_2$  positivement dans le sens de  $\mathbf{N}_{12} \times \mathbf{K}_i$  (*i.e.* dans le sens de  $\mathbf{u}_y$ ), il vient

$$\boxed{\beta_2 \cong \alpha_2 \frac{n'_2}{n_1 \sin \theta_1} \cong \frac{n''_2}{\sqrt{n_2'^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}} \frac{2 \tau_p \tau_s s_{3i}}{\left( \tau_p^2 + \tau_s^2 \right) + \left( \tau_p^2 - \tau_s^2 \right) s_{1i}}} \quad (55)$$

où  $\tau_s \cong \frac{2Y'_1 \cos \theta_1}{Y'_1 \cos \theta_1 + Y'_2 \cos \theta_2}$  et  $\tau_p \cong \frac{2Y'_1 \cos \theta_1}{Y'_1 \cos \theta_2 + Y'_2 \cos \theta_1}$  sont quasiment réels positifs et  $s_{1i} \equiv S_{1i}/S_{0i}$ ,  $s_{2i} \equiv S_{2i}/S_{0i}$  et  $s_{3i} \equiv S_{3i}/S_{0i}$  sont les valeurs instantanées des paramètres de STOKES réduits de l'onde incidente (tels que  $s_{1i} = 1$  corresponde à une polarisation rectiligne incidente de même orientation que  $(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{N}_{12}) \times \mathbf{u}_p$ , i.e. d'orientation *P* - et  $s_{1i} = -1$  de même orientation que  $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{N}_{12}$ , i.e. d'orientation *S*).

Comme  $\tau_p > \tau_s$ , on vérifie évidemment que  $|\alpha_2|$  est maximum pour une polarisation incidente parfaite, de grand axe ayant l'orientation *S* (pour minimiser le dénominateur de  $|\alpha_2|$ ), et d'ellipticité  $|\tan \chi|$  avec  $\chi \in [0, \pi/4]$  tel que  $\left| \frac{2 \tau_p \tau_s \sin 2\chi}{(\tau_p^2 + \tau_s^2) - (\tau_p^2 - \tau_s^2) \cos 2\chi} \right|$  soit maximal, car dans ce cas  $s_{1i} = -\cos 2\chi$  et  $s_{3i} = \sin 2\chi$  [8] ; l'étude en fonction de  $\chi$  montre que son maximum vaut 1, et qu'il est obtenu pour  $\cos 2\chi = \frac{\tau_p^2 - \tau_s^2}{\tau_p^2 + \tau_s^2}$ , donc pour  $|\tan \chi| = \left| \frac{\tau_s}{\tau_p} \right|$  (inférieur à 1, comme il se doit par définition) ; on vérifie bien que la polarisation de l'onde incidente doit être telle que la polarisation de l'onde transmise soit presque circulaire.

### Discussion

Notre étude montre donc que l'inclinaison des rayons réfractés par rapport au plan d'incidence dépend de la polarisation de l'onde incidente (et de grandeurs scalaires uniquement). Comme il se doit, cette dépendance est conforme au principe de CURIE : lorsque la polarisation de l'onde incidente est symétrique par rapport au plan d'incidence, i.e. dans les cas *S* ou *P*, on doit avoir  $\alpha_2 = 0$  ; c'est bien ce que l'on constate avec la relation (55) rigoureusement puisque, dans ce cas,  $S_{2i} = S_{3i} = 0$  et donc (voir (49-50))  $S_{2i} = S_{3i} = 0$ . Et puisque la polarisation circulaire droite de l'onde incidente ( $s_{1i} = s_{2i} = 0$ , donc selon la convention choisie  $s_{3i} = \pm 1$ ) est toujours symétrique de la polarisation circulaire gauche ( $s_{3i} = \mp 1$  donc  $s_{1i} = s_{2i} = 0$ ) par rapport au plan d'incidence, on pouvait prévoir que ces deux cas de polarisation donneraient des valeurs opposées de  $\alpha_2$  (mais pas exactement le maximum de  $|\alpha_2|$ ).

### Application numérique

Avec un milieu {2} formant une couche de densité optique 1 pour une épaisseur de 1 mm, et un milieu {1} nettement plus transparent comme l'air, à la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0 = 0,5 \mu\text{m}$  on a  $n''_2 \cong 9,2 \cdot 10^{-5}$  seulement ; en prenant  $n'_2 \cong 1,5$ ,  $n_1 \cong 1$  et  $\theta_1 \cong 45^\circ$ , il vient  $\frac{n''_2}{\sqrt{n'^2_2 - n'^2_1 \sin^2 \theta_1}} \cong 7,0 \cdot 10^{-5}$  ; en supposant {1} et {2} non magnétiques on trouve  $\tau_s \cong 0,70$  et  $\tau_p \cong 0,73$ , donc pour une polarisation incidente d'ellipticité

$\tau_s/\tau_p \cong 0,96$  et de grand axe ayant l'orientation  $S$  on a  $|\beta_2| \cong 7,0 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cong 14''$  et  $|\alpha_2| \cong \left| \beta_2 \frac{n_1 \sin \theta_1}{n'_2} \right| \cong 6,8''$ . Ce petit écart angulaire par rapport au plan d'incidence est indécélable dans la pratique [3].

### 3.4. Cas d'un pinceau incident de lumière naturelle ou partiellement polarisée

Le cas le plus banal, celui d'un pinceau incident de lumière naturelle quasimonochromatique, s'avère inopinément digne d'intérêt. Dans cette situation en effet, comme dans celle d'une lumière incidente partiellement polarisée, les valeurs instantanées de  $S_{0i}$ ,  $S_{1i}$ ,  $S_{2i}$  et  $S_{3i}$  présentent des fluctuations aléatoires à l'échelle de quelques nanosecondes, ainsi donc que  $s_{1i} \equiv S_{1i}/S_{0i}$ ,  $s_{2i} \equiv S_{2i}/S_{0i}$  et  $s_{3i} \equiv S_{3i}/S_{0i}$ . Si les temps caractéristiques des milieux sont assez brefs vis-à-vis de ceux de  $S_{0i}$ ,  $S_{1i}$ ,  $S_{2i}$  et  $S_{3i}$ , les fluctuations de la moyenne  $\langle \mathbf{R}_i \rangle$  du vecteur de POYNTING sur une pseudo-période se déduisent approximativement de la relation (46). Mais les récepteurs usuels de lumière ont des temps d'intégration  $T$  bien plus grands que ces durées typiques des fluctuations, autrement dit ils sont sensibles à la moyenne  $\langle \langle \mathbf{R}_i \rangle \rangle$  du vecteur de POYNTING sur une durée  $T$  :

$$\langle \langle \mathbf{R}_i \rangle \rangle = \frac{\langle S_{0i} \rangle}{2} Y'_2 \mathbf{u}'_t + \frac{\langle S_{1i} \rangle}{2} Y''_2 \mathbf{u}''_t + \frac{Y''_2 \langle S_{2i} \rangle - Y'_2 \langle S_{3i} \rangle}{2} \frac{\mathbf{K}'_t \times \mathbf{K}''_t}{K_0^2 |n_2|^2} \quad (56)$$

Pour des champs électromagnétiques aléatoires, ergodiques et statistiquement gaussiens, on peut étudier les fluctuations de  $\langle \mathbf{R}_i \rangle$  en se servant des densités de probabilité des grandeurs  $S_{0i}$ ,  $S_{1i}$ ,  $S_{2i}$  et  $S_{3i}$ , connues en fonction de leurs moyennes  $\langle S_{0i} \rangle$ ,  $\langle S_{1i} \rangle$ ,  $\langle S_{2i} \rangle$  et  $\langle S_{3i} \rangle$  qui sont les paramètres de STOKES de l'onde incidente (et sont liés à son degré de polarisation) - voir [7] pp. 147-151 ; ces densités de probabilité sont des combinaisons d'exponentielles décroissantes.

En admettant que  $\tau_s \cong \tau_p$  (voir l'application numérique précédente), l'expression (55) de  $\alpha_2$  se simplifie, car on la trouve proportionnelle à  $s_{3i}$  :

$$\alpha_2 \cong - \frac{n''_2}{n'_2} \frac{n_1 \sin \theta_1}{\sqrt{n'^2_2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}} s_{3i} \quad (57)$$

Toujours avec les mêmes hypothèses statistiques, on connaît les densités de probabilité des grandeurs  $s_{1i}$ ,  $s_{2i}$  et  $s_{3i}$  ([7] pp. 153-158).

Dans le **cas simple d'une lumière incidente naturelle**, elles sont toutes uniformes sur leurs domaines de définition  $[-1, +1]$  ; cela correspond au fait intuitif que la distribution statistique des polarisations instantanées a une densité superficielle uniforme sur la sphère de POINCARÉ dans ce cas d'un champ statistiquement gaussien. Alors la moyenne de  $\alpha_2$  est

$$\langle \alpha_2 \rangle \cong - \frac{n''_2}{n'_2} \frac{n_1 \sin \theta_1}{\sqrt{n_2'^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}} \langle S_{3i} \rangle = 0 \tag{58}$$

et son écart-type vaut 
$$\sigma(\alpha_2) \cong \left| \frac{n''_2}{n'_2} \frac{n_1 \sin \theta_1}{\sqrt{n_2'^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}} \right| \frac{\sqrt{3}}{3}. \tag{59}$$

Conformément au principe de CURIE, la distribution statistique de  $\alpha_2$  est symétrique par rapport au plan d'incidence, donc la direction moyenne des rayons réfractés est parallèle au plan d'incidence.

On obtient ainsi un résultat surprenant : lorsque le pinceau incident n'est pas parfaitement polarisé, la direction des rayons réfractés présente de petites fluctuations, surtout de part et d'autre du plan d'incidence !

Lorsqu'on dit qu'une lumière quasi-monochromatique naturelle est une superposition *incohérente* de deux lumières d'intensités égales et de polarisations quelconques mais orthogonales, on exprime le fait que pour cette lumière naturelle les paramètres de STOKES  $\langle S_0 \rangle$ ,  $\langle S_1 \rangle$ ,  $\langle S_2 \rangle$  et  $\langle S_3 \rangle$  sont égaux à la somme des paramètres correspondants de ces deux autres lumières parfaitement polarisées. Cette propriété permet donc d'exprimer  $\langle \langle \mathbf{R}_i \rangle \rangle$  pour cette lumière naturelle par la somme des  $\langle \langle \mathbf{R}_i \rangle \rangle$  des deux lumières polarisées orthogonalement ; cela ne permet pas d'en déduire des informations sur les *fluctuations* de  $\langle \mathbf{R}_i \rangle$  ...

## CONCLUSION

Cette étude montre que, tout bien considéré dans ses détails, le phénomène de réfraction est nettement plus complexe qu'on ne le croit. Sur le plan théorique, il ne faut pas confondre la direction des rayons réfractés avec celle des parties réelle et imaginaire du vecteur de propagation de l'onde transmise ; d'ailleurs celles-ci ne sont en général pas parallèles entre elles car l'onde est inhomogène, mais sont parallèles au plan d'incidence, alors que les rayons réfractés sont *a priori* non parallèles au plan d'incidence - et la relation (52) s'applique aussi aux cas de réfraction négative. De plus, l'angle entre ces rayons et le plan d'incidence dépend de la polarisation instantanée de l'onde transmise, donc il fluctue (et peut changer de signe) si l'onde incidente n'est pas parfaitement polarisée. Mais cet effet est pratiquement indécélable, car il est quasi-proportionnel à  $n''$  qui est très petit... Si on voulait le rendre perceptible dans un milieu absorbant, il faudrait choisir un milieu ayant une valeur de  $n''$  plus grande, mais alors l'onde transmise serait plus absorbée ; de ce point de vue il serait plus intéressant d'utiliser un milieu amplificateur !

Dans notre calcul du vecteur de POYNTING, nous avons considéré seulement le cas où l'angle d'incidence est inférieur à l'angle limite, donc ne produisant pas de réflexion totale. Pour terminer, soulignons que si l'angle d'incidence dépasse l'angle limite, il existe dans le second milieu une onde transmise de vecteur de POYNTING moyen non nul ;

mais celui-ci est tangent au dioptre si ce milieu a un indice réel, donc il peut y avoir de l'énergie transmise au travers du dioptre de façon instantanée uniquement (d'où les décalages de GOÖS-HÄNCHEN et d'IMBERT-FEDOROV - voir [2] pp. 69-70, et [9] pour une mesure très récente) mais pas en moyenne, ce qui explique le phénomène de réflexion totale. Cependant, si on tient compte de  $n'' \neq 0$ , la réflexion totale est atténuée car le vecteur de POYNTING moyen de l'onde transmise n'est plus tout à fait tangent au dioptre ; on peut calculer son angle avec le plan d'incidence, et on trouve qu'il dépend encore de la polarisation, mais qu'il n'est plus petit (ni quasi-proportionnel à  $n''$ ) comme en l'absence de réflexion totale ! Cependant, la détection du flux d'énergie transmis en moyenne lors d'une réflexion totale atténuée reste une expérience délicate...

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] DETTWILLER L. et FELBACQ D. « Les milieux à indice de réfraction négatif : des composants optiques prometteurs ? » *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, décembre 2003, vol. 97, n° 859 (1), p. 1577-1594.
- [2] DETTWILLER L. *Qu'est-ce que l'optique géométrique ? fondements et applications*. Paris : Dunod Université, 1990.
- [3] IMBERT C. « Effet inertial de spin du photon : théorie et preuve expérimentale ». Thèse d'état, Université d'Orsay, 1970, p. 28-31.
- [4] SIVARDIÈRE J. « Le double produit vectoriel : un outil méconnu ». *Bull. Un. Phys.*, juin 1997, vol. 91, n° 795 (2), p. 121-127.
- [5] HUARD S. « Interaction onde évanescente-atomes : mesure du quantum d'impulsion et mise en évidence de la polarisation de l'onde ». Thèse d'état, Université d'Orsay, 1977, p. 9-11.
- [6] VAN LABEKE D. « La microscopie optique à sonde locale », in BOUCHAREINE P. (éd.), *Optique instrumentale*. Les Ulis : Les éditions de physique, 1997.
- [7] BROSSEAU C. *Fundamentals of Polarized Light - A Statistical Optics Approach*, New York : Wiley Interscience, 1998.
- [8] HUARD S. *Polarisation de la lumière*. Paris : Masson, 1993, p. 25-27.
- [9] PILLON F., GILLES H. et GIRARD S. « Experimental observation of the Imbert-Fedorov transverse displacement after a single total reflection ». *Appl. Opt.*, 2004, vol. 43, p. 1863-1869.



Luc DETTWILLER  
 Professeur en PC\*  
 Lycée Blaise Pascal  
 Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme)