



**HAL**  
open science

## Introduction à l'Optique Anisotrope

Frédéric Bernardot

► **To cite this version:**

| Frédéric Bernardot. Introduction à l'Optique Anisotrope. Master / M1. 2005. sfo-00330582

**HAL Id: sfo-00330582**

**<https://hal-sfo.ccsd.cnrs.fr/sfo-00330582>**

Submitted on 14 Oct 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## INTRODUCTION À L'OPTIQUE ANISOTROPE

Ce cours est une introduction aux manipulations classiques de la lumière. De la même manière que le contrôle et l'utilisation des courants d'électrons forment l'Électronique, les manipulations de la lumière, vue comme un flot granulaire de photons, constituent le domaine de la Photonique.

L'origine première de ce domaine remonte à la découverte, à partir de 1800 environ, que la lumière est un phénomène à la fois ondulatoire et vectoriel. Parmi ses tout premiers développements figurent notamment la compréhension puis l'utilisation de la propagation lumineuse dans les milieux transparents anisotropes. Le formalisme théorique de l'Optique Électromagnétique est inventé par Maxwell dans les années 1860. Ensuite, l'Électro-Optique (interaction de la lumière avec un champ électrostatique) s'est développée sur la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, puis l'Acousto-Optique (interaction de la lumière avec une onde acoustique) dans les années 1930, et enfin l'Optique Non Linéaire (interaction de faisceaux lumineux entre eux) à compter de 1960.

Aujourd'hui, la Photonique est largement utilisée parmi les techniques de laboratoire et dans les applications courantes, par exemple en télécommunications optiques. De plus, elle est entrée dans une phase de miniaturisation, dans laquelle sources, détecteurs, guidages et manipulations de la lumière consistent de plus en plus en des dispositifs de tailles micrométriques. Cependant, ce cours ne présentera pas de récents développements fondamentaux ou appliqués, et se limitera au contraire à une première description, se voulant pédagogique, des propriétés de la lumière et des manipulations les plus simples qu'il est possible de faire sur elles.

Les fondements de l'Optique Électromagnétique sont rappelés au chapitre I, où est traitée en particulier la propagation de la lumière dans un milieu isotrope. Le chapitre II est consacré à la polarisation de la lumière ; il en présente posément le formalisme, ainsi que deux phénomènes physiques où la polarisation linéaire se manifeste : la diffusion dipolaire et la réflexion-réfraction sur un dioptre.

La propagation d'un faisceau lumineux monochromatique dans un milieu anisotrope, est le sujet des deux chapitres suivants. Pour la simplicité, le chapitre III se borne au cas où la direction de propagation de la lumière est suivant une direction particulière du milieu cristallin ; sont alors introduites la notion de polarisations propres et les lames optiques, outils utilisés couramment pour manipuler la polarisation lumineuse. Le chapitre IV aborde la question dans le cas général, quelle que soit la direction de la lumière dans le milieu ; il présente les séparateurs polarisants, dispositifs permettant de séparer spatialement un faisceau lumineux en ses deux composantes orthogonales de polarisation linéaire.

Le chapitre V expose différents moyens de tourner continûment, autour de la direction de propagation, la polarisation linéaire d'un faisceau lumineux. Ce phénomène est spontané dans les milieux optiquement actifs. Il est provoqué par l'application d'un champ magnétostatique dans les milieux doués d'effet Faraday, et par l'application d'un champ électrostatique dans certains cristaux liquides.

L'effet électro-optique est introduit au chapitre VI. Cet effet est la modification des propriétés optiques d'un milieu provoquée par l'application d'un champ électrostatique. Sur ce principe, on fabrique des lames optiques variables, utiles par exemple pour moduler la puissance d'un faisceau lumineux.

L'effet acousto-optique est le sujet du chapitre VII. Un faisceau lumineux dans un milieu peut interagir avec une onde acoustique qui y est présente, *via* les modifications du milieu qu'elle provoque. Le faisceau se trouve ainsi défléchi, et sa fréquence optique modifiée, de façon contrôlable.

Lorsqu'ils sont suffisamment intenses, deux faisceaux lumineux peuvent interagir entre eux dans un milieu (ou un seul faisceau interagir avec lui-même) : on entre dans le cadre des phénomènes optiques non linéaires, abordés au chapitre VIII. Pour la simplicité, n'y est traité essentiellement que le phénomène de génération de second harmonique : sous certaines conditions, un faisceau lumineux de pulsation optique  $\omega$  donne naissance, dans un milieu, à un faisceau de pulsation double  $2\omega$  ; par exemple, un faisceau lumineux rouge peut créer un faisceau bleu.

Les deux derniers chapitres portent sur le guidage des ondes lumineuses. D'abord, le chapitre IX se restreint à l'étude de structures guidantes planes, métallique puis diélectrique ; ce chapitre présente la notion de modes propres de propagation guidée, ainsi que leur dispersion imposée par les conditions aux limites. Ensuite, l'ultime chapitre X est une initiation aux fibres optiques, guides diélectriques cylindriques qui sont utilisés très largement dans les télécommunications ; en particulier, y sont déduites les structures des modes de propagation guidée dans une fibre à saut d'indice de réfraction.

Comme annoncé, ce cours n'est évidemment pas une présentation exhaustive du domaine de la Photonique (notamment, les sources et les détecteurs ne sont même pas effleurés) ; de toute façon, des traités complets, spécialisés, sur ce domaine existent déjà, qui n'abordent parfois qu'un seul des thèmes présentés dans le plan ci-dessus. Le but recherché du présent cours est de donner un premier aperçu de quelques points clés concernant les manipulations de la lumière, tout en veillant à une présentation à la fois élémentaire et rigoureuse des phénomènes : plutôt que d'aborder beaucoup de sujets de façon superficielle, le choix a été d'en traiter peu mais en détail, tout en tâchant que le formalisme n'obscurcisse pas les phénomènes physiques étudiés.

L'ensemble du contenu de ces notes d'«Introduction à la Photonique» peut servir de base à un enseignement annuel, comportant une vingtaine de séances de cours. Dans le présent cadre d'un enseignement semestriel en une dizaine de séances, l'attention est portée sur les parties suivantes : I-A (sans les conditions aux limites), I-B-1, I-C-1 et I-C-2 ; II-A-1, II-A-2, II-C (sans II-C-5) ; III-A et III-B ; IV-B et IV-C-1 ; V-A (sans V-A-3), V-B-1 et V-C (sans V-C-2-b) ; VI-A (sans VI-A-3 ni VI-A-4-b) et VI-B (sans l'effet Kerr ni VI-B-4-c) ; VII-A (sans VII-A-4 ni VII-A-5) et VII-B (avec une onde acoustique longitudinale seulement) ; VIII-A (sans VIII-A-4), VIII-B-1 et VIII-B-3 ; IX-A (sans IX-A-4), IX-B-1 et IX-B-2 ; X-A (descriptif, sans calcul) et X-B. L'élaboration de ce menu a été orientée par l'activité des travaux pratiques (sur la polarisation de la lumière, l'effet électro-optique, l'effet acousto-optique et la génération de second harmonique), ainsi que par le souci de faire passer une culture minimale sur l'Optique guidée.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>I – Optique électromagnétique</b>	<b>I-1</b>
<b><i>AJ Fondements de l'électromagnétisme</i></b>	<b><i>I-2</i></b>
1) Électromagnétisme dans l'espace libre (le vide)	I-3
2) Électromagnétisme dans un milieu matériel	I-4
<b><i>BJ Milieux diélectriques</i></b>	<b><i>I-7</i></b>
1) Milieux diélectriques linéaires, homogènes et isotropes	I-7
2) Milieux non linéaires ou non homogènes ou non isotropes	I-8
<b><i>CJ Ondes électromagnétiques monochromatiques</i></b>	<b><i>I-9</i></b>
1) Généralités	I-9
2) Ondes planes progressives monochromatiques	I-10
3) Paquet d'ondes – Vitesse de groupe	I-11
<b><i>DJ Dispersion et absorption</i></b>	<b><i>I-14</i></b>
1) Fonction de réponse d'un milieu diélectrique	I-14
2) Susceptibilité complexe	I-15
3) Vitesse de groupe et indice de groupe	I-17
4) Modèle classique de résonance optique	I-17
<b><i>Exercices sur le chapitre I</i></b>	
<b>II – Polarisation de la lumière</b>	<b>II-1</b>
<b><i>AJ États de polarisation d'une onde plane progressive monochromatique</i></b>	<b><i>II-2</i></b>
1) Lumière polarisée linéairement	II-3
2) Lumière polarisée circulairement	II-4
3) Lumière polarisée elliptiquement	II-6
4) Remarques	II-7
<b><i>BJ Diffusion (scattering) de la lumière</i></b>	<b><i>II-8</i></b>
1) Position du problème	II-8
2) Potentiels vecteur et scalaire	II-9

- 3) Structure du rayonnement dipolaire II-10
- 4) Diffusion d'un faisceau lumineux II-12

***CJ Réflexion et réfraction II-14***

- 1) Introduction II-14
- 2) Coefficients de Fresnel II-16
- 3) Réflexion en polarisation s II-17
- 4) Réflexion en polarisation p II-19
- 5) Réflexion et réfraction de la puissance lumineuse incidente II-20

***Exercices sur le chapitre II***

**III – Milieux anisotropes I : lames optiques III-1**

***AJ Axes et indices de réfraction principaux III-2***

- 1) Tenseur diélectrique III-2
- 2) Milieux isotropes, uniaxiaux ou biaxiaux III-4

***BJ Propagation le long d'un axe principal III-7***

- 1) Modes propres de propagation III-7
- 2) Lames optiques III-9

***CJ Quelques manipulations de la polarisation lumineuse III-11***

- 1) Polarisation linéaire III-11
- 2) Lames optiques particulières III-13
- 3) Mise en œuvre d'une lame optique III-17

***Exercices sur le chapitre III***

**IV – Milieux anisotropes II : séparateurs polarisants IV-1**

***AJ Faisceau monochromatique en milieu anisotrope : généralités IV-2***

- 1) Ellipsoïde des indices IV-2
- 2) Imperméabilité électrique IV-3
- 3) Modes propres de propagation IV-4
- 4) Direction des faisceaux lumineux IV-7

***BJ Cas des milieux anisotropes uniaxiaux IV-9***

- 1) Modes propres de propagation IV-9
- 2) Double réfraction IV-12

***CJ Séparateurs polarisants IV-15***

- 1) Déplaceurs polarisants IV-15

- |  |       |
|--|-------|
| 2) Séparateurs d'états de polarisation | IV-16 |
| 3) Polariseurs à réflexion totale      | IV-18 |

***Exercices sur le chapitre IV***

**V – Rotateurs de polarisation** **V-1**

***A) Activité optique*** **V-1**

- |  |     |
|--|-----|
| 1) Introduction                          | V-1 |
| 2) Modes propres de propagation          | V-3 |
| 3) Un modèle de milieu optiquement actif | V-6 |

***B) Effet Faraday*** **V-13**

- |  |      |
|--|------|
| 1) Présentation                        | V-13 |
| 2) Modèle classique de l'effet Faraday | V-16 |

***C) Rotateur à cristal liquide*** **V-20**

- |  |      |
|--|------|
| 1) Introduction                                    | V-20 |
| 2) Propagation lumineuse dans un nématique torsadé | V-21 |
| 3) Application : écrans à cristaux liquides        | V-25 |

***Exercices sur le chapitre V***

**VI - Électro-optique** **VI-1**

***A) Principes de l'électro-optique*** **VI-3**

- |  |      |
|--|------|
| 1) Effet Pockels                                   | VI-3 |
| 2) Effet Kerr                                      | VI-5 |
| 3) Contrôle de la phase optique                    | VI-6 |
| 4) Contrôle de la biréfringence d'une lame optique | VI-8 |

***B) Électro-optique des milieux anisotropes*** **VI-12**

- |   |       |
|---|-------|
| 1) Ellipsoïde des indices en présence de $\mathbf{E}_s$ | VI-12 |
| 2) Symétries intrinsèques de [r] et [s]                 | VI-13 |
| 3) Effet des symétries structurales du milieu           | VI-15 |
| 4) Effet Pockels dans $\text{LiNbO}_3$                  | VI-18 |

***Exercices sur le chapitre VI***

**VII – Acousto-optique** **VII-1**

***A) Principes de l'interaction son-lumière*** **VII-1**

- |   |       |
|---|-------|
| 1) Onde acoustique plane dans un milieu structurellement isotrope | VII-1 |
|---|-------|

2) Effet photo-élastique	VII-2
3) Réflexion de Bragg	VII-3
4) Réflexion continue sur l'onde acoustique	VII-6
5) Rendement de la réflexion de Bragg	VII-10
6) Interprétations de la réflexion de Bragg	VII-12

***B) Acousto-optique des milieux anisotropes*** ***VII-14***

1) Onde acoustique plane dans un milieu anisotrope	VII-14
2) Effet photo-élastique	VII-15
3) Réflexion de Bragg	VII-19

***Exercices sur le chapitre VII***

**VIII – Optique non linéaire** **VIII-1**

***A) Principes de l'Optique non linéaire*** ***VIII-1***

1) Non-linéarité de la densité de polarisation	VIII-1
2) Équation d'onde non linéaire	VIII-2
3) Génération de second harmonique	VIII-4
4) Remarques	VIII-7

***B) Accord de phase pour la génération de second harmonique*** ***VIII-9***

1) Intérêt de l'accord de phase	VIII-9
2) Quasi-accord de phase	VIII-10
3) Accord de phase dans un milieu anisotrope uniaxial	VIII-12
4) Accord de phase de type II	VIII-14
5) Remarques	VIII-16

***Annexe VIII*** ***AVIII-1***

1) Densité de polarisation linéaire	AVIII-1
2) Densité de polarisation non linéaire	AVIII-1
3) Équation d'onde non linéaire dispersive	AVIII-2
4) Génération de second harmonique en milieu dispersif	AVIII-3

***Exercices sur le chapitre VIII***

**IX – Ondes électromagnétiques guidées** **IX-1**

***A) Guidage métallique plan*** ***IX-1***

1) Introduction	IX-1
2) Modes de propagation TE	IX-3
3) Remarque	IX-7

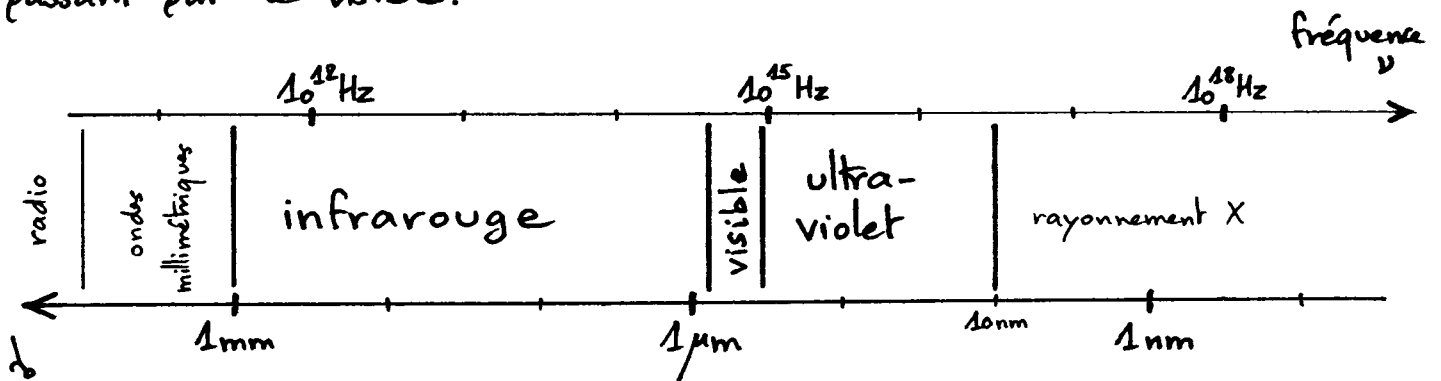
4) Modes de propagation TM	IX-8
<b><i>BJ Guidage diélectrique plan</i></b>	<b><i>IX-10</i></b>
1) Introduction	IX-10
2) Modes de propagation TE	IX-12
3) Modes de propagation TM	IX-17
4) Remarques	IX-19
<b><i>Exercices sur le chapitre IX</i></b>	
<b>X – Fibres optiques</b>	<b>X-1</b>
<b><i>AJ Guidage des rayons lumineux dans les fibres optiques multimodes</i></b>	<b><i>X-3</i></b>
1) Fibre à saut d'indice	X-3
2) Fibre à gradient d'indice	X-6
<b><i>BJ Modes de propagation d'une fibre à saut d'indice</i></b>	<b><i>X-9</i></b>
1) Distribution spatiale des modes	X-9
2) Paramètre de fibre	X-13
3) Modes de propagation LP	X-13
<b><i>Annexe X</i></b>	<b><i>AX-1</i></b>
1) Fonctions de Bessel d'ordre entier	AX-1
2) Fonctions de Bessel modifiées, d'ordre entier	AX-2
3) Structure des modes guidés à l'approximation de guidage faible	AX-3
<b><i>Exercices sur le chapitre X</i></b>	



# INTRODUCTION À LA PHOTONIQUE

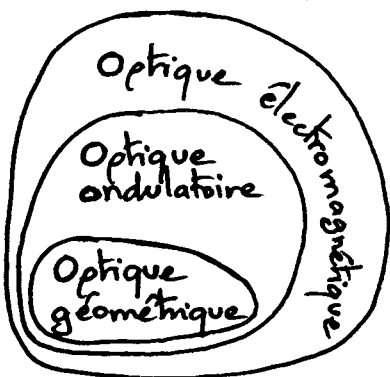
## I - Optique électromagnétique

La lumière est un phénomène ondulatoire décrit par les mêmes principes qui gouvernent toutes les formes de rayonnements électromagnétiques. Les fréquences optiques occupent une bande du spectre électromagnétique qui s'étend de l'infrarouge jusqu'à l'ultraviolet, en passant par le visible :



Dans le graphique ci-dessus,  $\lambda_0 = c/\nu$  est la longueur d'onde du rayonnement dans l'espace libre ; pour le visible,  $400 \text{ nm} \leq \lambda_0 \leq 750 \text{ nm}$ .

Une radiation électromagnétique se propage sous la forme de deux ondes vectorielles couplées, une onde de champ électrique et une onde de champ magnétique. L'Optique ondulatoire — appelée aussi Optique physique ou Optique scalaire — est une approximation de la théorie électromagnétique, dans laquelle la lumière est décrite par une seule fonction scalaire de la position et du temps ; cette approximation est appropriée pour des ondes dont on peut oublier le caractère vectoriel. L'Optique géométrique — dite aussi Optique des rayons — consiste en une simplification supplémentaire, valable dans la limite où les ouvertures ou les obstacles ont une taille  $\gg \lambda_0$ . Ainsi, l'Optique électromagnétique contient l'Optique ondulatoire, qui à son tour comprend l'Optique géométrique : ce sont des théories gigognes (cf. schéma ci-contre).



Ce chapitre présente brièvement les aspects de l'électromagnétisme qui sont d'importance en Optique. Les fondements de la théorie sont présentés au § A, tandis que les propriétés électromagnétiques des milieux diélectriques sont introduites dans le § B. Au paragraphe suivant (§ C) est abordé le cas important des ondes monochromatiques, notamment celui des ondes planes progressives monochromatiques. Enfin, le paragraphe D aborde la question des milieux diélectriques dispersifs, dont le comportement dépend de la fréquence optique  $\nu$ .

### A) Fondements de l'électromagnétisme

Un champ électromagnétique est formé d'un champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et d'un champ magnétique  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  —  $\vec{r}$ : position dans l'espace;  $t$ : temps. En utilisant des coordonnées cartésiennes, il est donc décrit par six fonctions scalaires:  $E_x(\vec{r}, t)$ ,  $E_y(\vec{r}, t)$ ,  $E_z(\vec{r}, t)$ ,  $B_x(\vec{r}, t)$ ,  $B_y(\vec{r}, t)$  et  $B_z(\vec{r}, t)$ . Son évolution spatio-temporelle est régie par les équations de Maxwell<sup>(\*)</sup>:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

où  $\rho(\vec{r}, t)$  et  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  sont les densités volumiques de charge et de courant. Les équations de Maxwell sont des équations aux dérivées partielles couplées en  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , dont les termes sources sont  $\rho$  et  $\vec{j}$ . Ce système d'équations est bouclé une fois connues les relations entre les sources  $\{\rho, \vec{j}\}$  et le champ électromagnétique  $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ ; ces relations caractérisent chaque milieu matériel considéré, et sont appelées relations (constitutives) du milieu.

Les constantes  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  apparaissant dans les équations de Maxwell, sont respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique de l'espace libre (le vide):  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$  et  $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$ .

(\*) James Clerk Maxwell (1831-1879); équations de Maxwell: 1864.

# 1) Électromagnétisme dans l'espace libre (le vide)

a) Dans l'espace libre, c'est-à-dire loin de toute charge et de tout courant,  $\rho(\vec{r}, t) = 0$  et  $\vec{j}(\vec{r}, t) = 0$ . Un champ électromagnétique  $\{\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t)\}$  y suit les équations de Maxwell :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{E} = 0, \quad \text{div} \vec{B} = 0, \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Les opérateurs<sup>(\*)</sup>  $\text{div}$ ,  $\vec{\text{rot}}$  et  $\frac{\partial}{\partial t}$  étant linéaires, le principe de superposition s'applique : si deux champs électromagnétiques  $\{\vec{E}_1, \vec{B}_1\}$  et  $\{\vec{E}_2, \vec{B}_2\}$  sont solutions des équations de Maxwell ci-dessus, alors leur somme  $\{\vec{E}_1 + \vec{E}_2, \vec{B}_1 + \vec{B}_2\}$  est aussi une solution.

b) Une condition nécessaire pour que  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  suivent les équations de Maxwell ci-dessus, est que chacune de leurs composantes cartésiennes obéisse à l'équation d'onde

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0,$$

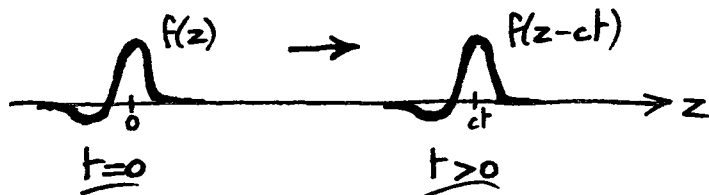
où  $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  est la célérité de la lumière dans l'espace libre, et la fonction scalaire  $u(\vec{r}, t)$  représente n'importe laquelle des composantes  $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$  du champ électromagnétique. L'équation d'onde se dérive des équations de Maxwell en développant  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E})$  et en utilisant la relation  $\Delta \vec{V} = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{V}) - \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{V})$  qui définit le champ de vecteur  $\Delta \vec{V}$  (les composantes cartésiennes de  $\Delta \vec{V}$  sont  $(\Delta \vec{V})_j = \Delta V_j = \frac{\partial^2 V_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_j}{\partial z^2}$ ,  $j = x$  ou  $y$  ou  $z$ ); une procédure similaire est suivie pour  $\vec{B}$ .

c) Cherchant une solution de l'équation d'onde ci-dessus sous la forme d'une onde plane  $u(z, t)$ , il vient  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ , soit, par le changement de

(\*) En coordonnées cartésiennes,  $\text{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$ , et  $\vec{\text{rot}} \vec{V}$  a pour composantes  $(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z})$ ,  $(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x})$  et  $(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y})$ .

variable  $\xi = z - ct$ ,  $\eta = z + ct$ ,  $u(z,t) = \Psi(\xi, \eta)$  :  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$  ; cette équation admet pour solution générale  $\Psi(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$ , d'où  $u(z,t) = f(z-ct) + g(z+ct)$ .

$f(z-ct)$  représente un signal de profil spatial  $f(z)$  se



déplaçant sans déformation avec la célérité  $c$  dans la direction  $z$ , suivant les  $z > 0$ ;  $g(z+ct)$  est un signal se déplaçant à la même célérité dans le sens des  $z$  décroissants. L'existence de telles ondes planes progressives, se propageant sans déformation dans l'espace libre, est une propriété essentielle des ondes électromagnétiques — qui est mise à profit dans les télécommunications.

## 2) Électromagnétisme dans un milieu matériel

Un champ électromagnétique dans un milieu matériel est décrit par une théorie<sup>(\*)</sup> où les champs pertinents (champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$ , densités de charge  $\rho$  et de courant  $\vec{j}$ ) sont des moyennes spatiales des champs microscopiques correspondants. Les champs microscopiques possèdent des variations spatiales à l'échelle atomique ou moléculaire — de l'ordre de  $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$  dans la matière condensée ; ces variations à petite échelle sont gommées par le moyennage spatial pris sur un volume de matière grand devant les dimensions atomiques. Cette description macroscopique des propriétés électromagnétiques de la matière traitée comme un milieu continu, suffit pour étudier la propagation d'ondes électromagnétiques tant que leur longueur d'onde est infiniment grande devant les dimensions atomiques ; cette condition est largement vérifiée dans le domaine optique, pour la matière condensée. Cependant, il est clair que cette théorie cesse d'être valable pour décrire un gaz extrêmement dilué dans le domaine optique ou le rayonnement X dans un cristal, la longueur d'onde étant alors de l'ordre de la distance interatomique.

(\*) Théorie de 1895 due à Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), prix Nobel 1902.

↳ Dans le cadre de la théorie de champs moyennés qui vient d'être présentée, les densités de charge et de courant sont séparées en une partie due aux charges libres, capables de se déplacer dans le matériau sur de très grandes distances et de le traverser, et une autre partie provenant des charges liées à un atome ou à une molécule du milieu :  $\rho = \rho_{\text{libre}} + \rho_{\text{liée}}$ ,  $\vec{j} = \vec{j}_{\text{libre}} + \vec{j}_{\text{liée}}$ . La partie liée des sources du champ électromagnétique est trouvée égale à

$$\rho_{\text{liée}} = -\operatorname{div} \vec{P}, \quad \vec{j}_{\text{liée}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{M},$$

où  $\vec{P}(\vec{r}, t)$ , densité de polarisation du milieu, est la somme des dipôles électriques microscopiques par unité de volume en  $\vec{r}$ , et où  $\vec{M}(\vec{r}, t)$ , densité d'aimantation du milieu, est la somme des moments magnétiques microscopiques par unité de volume.

En utilisant ces expressions de  $\rho$  et  $\vec{j}$ , les équations de Maxwell fixant l'évolution spatio-temporelle du champ électromagnétique  $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ , prennent la forme :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{libre}}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

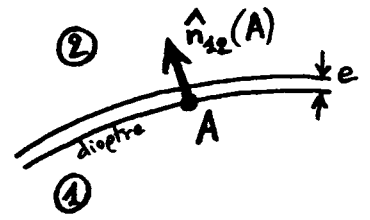
où apparaissent les champs auxiliaires  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  et  $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$ .

Un milieu matériel est caractérisé, du point de vue électromagnétique, par les relations liant  $\{\vec{P}, \vec{M}, \rho_{\text{libre}}, \vec{j}_{\text{libre}}\}$  au champ électromagnétique  $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ .

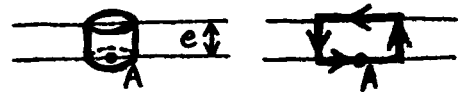
↳ Dans ce cours, ne seront considérés que des milieux sans propriété magnétique : on aura toujours  $\vec{M} = 0$ , soit  $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$ . De plus, lorsqu'aucune charge libre n'est présente dans le milieu étudié,  $\rho_{\text{libre}} = 0$  et  $\vec{j}_{\text{libre}} = 0$  ; les propriétés électromagnétiques du milieu sont alors entièrement fixées par la relation entre la densité de polarisation  $\vec{P}$  et le champ électromagnétique  $\{\vec{E}, \vec{B}\}$  — bien souvent,  $\vec{P}$  ne dépend que de  $\vec{E}$ .

↳ Si les équations de Maxwell déterminent l'évolution d'un champ électromagnétique dans un milieu, elles fixent également les conditions aux limites suivies par le champ à la frontière entre deux milieux matériels différents. Considérant la

surface (régulière) séparant deux milieux 1 et 2, on y définit en chaque point A le vecteur unitaire normal  $\hat{n}_{12}(A)$ , orienté du milieu 1 vers le milieu 2. Physiquement, les propriétés de la matière varient continûment du milieu 1 au milieu 2 sur une épaisseur faible  $e$  ( $e$  est très petite devant la longueur d'onde, mais elle peut être grande à l'échelle atomique de la matière). On appelle densités surfaciques de charge et de courant libres, les quantités  $\sigma_{\text{libre}}(A) = e \rho_{\text{libre}}(A)$  et  $\vec{J}_{\text{libre}}(A) = e \vec{J}_{\text{libre}}(A)$ .



En utilisant les équations de Maxwell du § 6 et les théorèmes d'Astrogradski ou de Stokes appliqués à un petit cylindre ou un petit circuit placés en A à cheval sur la surface,



il vient facilement les conditions aux limites suivantes :

$$\vec{E}_{2\parallel}(A) = \vec{E}_{1\parallel}(A) \quad , \quad \vec{D}_{2\perp}(A) - \vec{D}_{1\perp}(A) = \sigma_{\text{libre}}(A) \hat{n}_{12}(A) \quad ,$$

$$\vec{B}_{2\perp}(A) = \vec{B}_{1\perp}(A) \quad , \quad \vec{H}_{2\parallel}(A) - \vec{H}_{1\parallel}(A) = \vec{J}_{\text{libre}}(A) \times \hat{n}_{12}(A) \quad ,$$

où l'indice  $\parallel$  désigne la composante tangentielle au dioptre en A et l'indice  $\perp$  la composante normale (c'est-à-dire suivant  $\hat{n}_{12}$ ). Ces relations seront utilisées dans ce cours, toujours avec  $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$  car seuls des milieux non magnétiques seront considérés (cf. §§ II, IX et X).

¶ Dans un milieu matériel, le transport de l'énergie associée à la présence d'une onde électromagnétique est gouverné par le vecteur de Poynting<sup>(\*)</sup>  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ ; dans un milieu non magnétique,  $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$ . Le flux de  $\vec{S}$  au travers d'une surface  $\Sigma$ ,  $\iint_{\Sigma} \vec{S} \cdot d\vec{\Sigma}$ , est la puissance d'origine électromagnétique qui passe dans  $\Sigma$ . L'intensité  $I$  de l'onde électromagnétique (en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ) est le module du vecteur de Poynting moyenné sur le temps :  $I(\vec{r}) = |\langle \vec{S}(\vec{r}, t) \rangle|$ .

(\*) John Henry Poynting (1852-1914); vecteur de Poynting: 1885.

## Ⓑ Milieux diélectriques

On considère un milieu diélectrique ( $\vec{j}_{\text{libre}} = 0$ ) sans charge libre ( $\rho_{\text{libre}} = 0$ ), ne possédant pas de propriété magnétique ( $\vec{M} = 0$ ), et dont les propriétés électromagnétiques sont entièrement caractérisées par une relation entre la densité de polarisation  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  du milieu et le champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  qui y règne.

### 1) Milieux diélectriques linéaires, homogènes et isotropes

a) Dans un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope, la densité de polarisation et le champ électrique sont parallèles et proportionnels :

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi \vec{E}(\vec{r}, t),$$

où  $\chi$ , la susceptibilité électrique, est une constante réelle positive. Il vient alors  $\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}(\vec{r}, t)$ , avec  $\epsilon_r = 1 + \chi$  la permittivité relative du milieu, appelée également constante diélectrique ( $\epsilon_0 \epsilon_r$  est la permittivité électrique). Il est usuel de définir l'indice de réfraction du milieu par  $n = \sqrt{\epsilon_r}$ . Le milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope est caractérisé, de la même façon, par la donnée de  $\chi$  ou de  $\epsilon_r$  ou de  $n$ .

b) Suivant le § A-2-b, les équations de Maxwell dans ce milieu sont :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{E} = 0, \quad \text{div} \vec{B} = 0, \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Formellement, il s'agit des mêmes équations que celles dans l'espace libre (cf. § A-1-a) avec  $\epsilon_0$  remplacée par  $\epsilon_0 \epsilon_r$ ; chacune des composantes cartésiennes de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  satisfait donc l'équation d'onde  $\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ , où la

célérité de la propagation est :

$$v = (\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r)^{-1/2} = \frac{c}{n}.$$

Comme  $n = \sqrt{1 + \chi} > 1$ , on a  $v < c$ : la célérité est plus faible que dans le vide.

## 2) Milieux non linéaires ou non homogènes ou non isotropes

a) Dans un milieu anisotrope, linéaire et homogène, chaque composante de la densité de polarisation est une combinaison linéaire des composantes du champ électrique :

$$P_i(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} E_j(\vec{r}, t),$$

où les indices  $i, j = 1, 2$  ou  $3$  représentent  $x, y$  ou  $z$  respectivement. On note souvent, de manière condensée,  $\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \underline{\chi} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$  — ou bien  $\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 [\underline{\chi}] \vec{E}(\vec{r}, t)$  —, où le tenseur de susceptibilité électrique  $\underline{\chi}$  — ou bien  $[\underline{\chi}]$  — est représenté par une matrice  $3 \times 3$  d'éléments  $\chi_{ij}$  dans un repère cartésien donné. Dans un tel milieu, le vecteur  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  est lié à  $\vec{E}$  par l'équation  $D_i(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{r,ij} E_j(\vec{r}, t)$ , les  $\epsilon_{r,ij} = \delta_{ij} + \chi_{ij}$  étant les composantes du tenseur diélectrique. Les propriétés optiques des milieux anisotropes sont étudiées plus loin dans ce cours (cf. §§ III et IV).

b) Un milieu inhomogène, linéaire et isotrope, admet une relation de proportionnalité entre  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , avec une susceptibilité  $\chi(\vec{r})$  dépendant de la position :  $\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t)$  ; il vient  $\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon_r(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t)$ , avec  $\epsilon_r(\vec{r}) = 1 + \chi(\vec{r})$ . Lorsque la constante diélectrique  $\epsilon_r(\vec{r})$  varie très peu à l'échelle de la longueur d'onde, les équations de Maxwell dans le milieu imposent l'équation d'onde  $\frac{1}{v(\vec{r})^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = 0$ , où la célérité de propagation  $v(\vec{r}) = c / \sqrt{\epsilon_r(\vec{r})}$  varie spatialement. Cette situation sera rencontrée au § III.

c) Lorsque le champ électrique dans la matière est de forte amplitude, l'approximation linéaire pour exprimer  $\vec{P}$  en fonction de  $\vec{E}$  est insuffisante, et il faut développer  $\vec{P}$  au-delà de l'ordre 1 en  $\vec{E}$  ; on écrit, pour un milieu homogène :

$$P_i(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \left\{ \sum_j \chi_{ij} E_j(\vec{r}, t) + \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)} E_j(\vec{r}, t) E_k(\vec{r}, t) + \dots \right\},$$

(\*) Dans un milieu anisotrope,  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  ne sont pas parallèles, en général.



où  $[\chi_{ij}]$  est le tenseur de susceptibilité linéaire et  $[\chi_{ijk}^{(2)}]$  celui de susceptibilité non linéaire d'ordre deux. Le lien non linéaire entre  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  fait que le principe de superposition (cf. § A-1-a) ne s'applique pas. Les propriétés non linéaires de milieux en interaction avec de la lumière très intense, seront abordées plus loin dans ce cours (cf. § VIII).

## © Ondes électromagnétiques monochromatiques

### 1) Généralités

a) Lorsqu'une source lumineuse de pulsation  $\omega$  (fréquence  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ ) rayonne vers un milieu linéaire, tous les champs dans ce milieu oscillent à cette même pulsation. Le champ électrique s'exprime sous la forme

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re e \left\{ \vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t} \right\},$$

où  $\vec{E}(\vec{r})$  est son amplitude complexe<sup>(\*)</sup>. Les amplitudes complexes  $\vec{B}$ ,  $\vec{P}$ ,  $\vec{M}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{J}_{\text{ext}}$ ,  $\vec{E}_{\text{ext}}$  des champs  $\vec{B}$ ,  $\vec{P}$ ,  $\vec{M}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{J}_{\text{ext}}$ ,  $\vec{E}_{\text{ext}}$  sont définies de façon similaire, avec  $\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})$  et  $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r}) - \vec{M}(\vec{r})$ .

En utilisant  $\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$ , les équations de Maxwell dans le milieu (cf. § A-2-b) deviennent:

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -i\omega \vec{B}, \quad \text{div} \vec{D} = \rho_{\text{ext}}, \quad \text{div} \vec{B} = 0, \quad \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J}_{\text{ext}} + i\omega \vec{D}.$$

b) Le vecteur de Poynting associé à une onde monochromatique régnant dans ce milieu linéaire, est  $\vec{S}(\vec{r}, t) = \Re e \left\{ \vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t} \right\} \times \Re e \left\{ \vec{H}(\vec{r}) e^{i\omega t} \right\}$  (cf. § A-2-e).

En développant les parties réelles suivant  $\Re e \{ \bar{z} \} = \frac{1}{2} (\bar{z} + \bar{z}^*)$ , on trouve facilement que le vecteur de Poynting moyenné sur le temps, s'écrit :

$$\langle \vec{S}(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \Re e \left\{ \vec{E}(\vec{r})^* \times \vec{H}(\vec{r}) \right\}. \quad \text{Dans le cas d'un milieu linéaire non magnétique, } \vec{M} = 0 \text{ et l'on a : } \langle \vec{S}(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \Re e \left\{ \vec{E}(\vec{r})^* \times \vec{B}(\vec{r}) \right\}.$$

(\*)  $\vec{E}(\vec{r})$  possède trois composantes cartésiennes  $E_j(\vec{r}) = |E_j(\vec{r})| e^{i\varphi_j(\vec{r})}$ ,  $j = x, y$  ou  $z$ .

## 2) Ondes planes progressives monochromatiques

a) On considère, dans un milieu linéaire <sup>et homogène</sup>, une onde électromagnétique à  $\omega$  dont les composantes du champ électrique sont des ondes planes de vecteur d'onde  $\vec{k}$  :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}},$$

où l'enveloppe  $\vec{E}_0$  est un vecteur constant, indépendant de  $\vec{r}$  ou de  $t$ ; les amplitudes <sup>des</sup> autres champs associés à l'onde ( $\vec{B}, \vec{F}, \dots$ ) suivent une relation semblable, qui définit leur enveloppe ( $\vec{B}_0, \vec{F}_0, \dots$ ). Le champ électrique physique de l'onde est  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re\{ \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})] \}$ , ce qui montre que l'on a affaire à une onde plane progressive : à un instant donné elle possède la même champ dans un plan orthogonal à  $\vec{k}$ , et au cours du temps elle avance dans la direction et le sens de  $\vec{k}$ , avec la vitese de phase  $v_p = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$ . À une date  $t$  fixée, l'onde oscille spatialement suivant  $\vec{k}$  avec une période spatiale, appelée longueur d'onde, valant  $\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|} = \frac{2\pi v_p}{\omega} = \frac{v_p}{\nu}$  :



b) Pour une telle onde électromagnétique, les équations de Maxwell du § 1-a prennent <sup>la forme</sup> <sup>suivante</sup> <sup>(\*)</sup>, dans un milieu linéaire <sup>et homogène</sup>, non magnétique, sans charge ni courant libres :

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0, \quad \vec{k} \cdot \vec{D}_0 = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0, \quad \vec{k} \times \vec{B}_0 = -\mu_0 \omega \vec{D}_0,$$

où  $\vec{D}_0$  est liée à  $\vec{E}_0$  par  $\vec{D}_0 = \epsilon_0 [\epsilon_r] \vec{E}_0$  (cf. § B-2-a). L'étude de la propagation de la lumière dans un milieu diélectrique anisotrope sera faite plus loin dans ce cours, aux §§ III et IV.

c) Dans ce chapitre, on se limitera à la description d'une onde plane progressive monochromatique dans un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope (cf. § B-1),

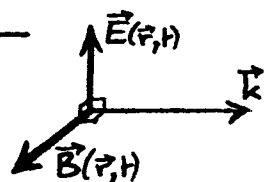
(\*) Ces équations se dérivent aisément en notant que  $\text{rot } \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$  et  $\text{div } \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ ,

où  $\vec{\nabla}$  est l'opérateur  $\vec{\nabla} = \hat{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$ .

de constante diélectrique  $\epsilon_r$ . Les quatre équations du § b précédent se ramènent à deux seulement :

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{D}_0 \quad \text{et} \quad \vec{k} \times \vec{D}_0 = -\frac{\omega}{v^2} \vec{E}_0$$

( $v = (\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r)^{-1/2} = c/n$ ) ; elles fournissent la structure de l'onde plane progressive : les champs électrique et magnétique sont orthogonaux à  $\vec{k}$  (\*), et forment en tout point  $\vec{r}$ , à tout temps  $t$ , un trièdre direct  $(\vec{k}, \vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t))$  — la première équation ci-dessus impliquant  $\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}(\vec{r}, t)$ .



Des deux équations ci-dessus, on tire la relation suivante, vérifiée par  $\vec{E}_0$  seule :  $\vec{k} \times (\frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}_0) = -\frac{\omega}{v^2} \vec{E}_0$ , soit, en utilisant l'identité  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$  :  $(\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{v^2}) \vec{E}_0 = 0$ , d'où :

$$\omega = v |\vec{k}|.$$

Une telle relation, qui lie la pulsation  $\omega$  d'une onde plane progressive à son vecteur d'onde  $\vec{k}$ , est appelée relation de dispersion. Il s'agit ici de la relation de dispersion dans un milieu linéaire, et isotrope ; d'où  $v_p = v$  et  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ .

Finalement, les deux seuls paramètres libres de l'onde plane progressive, sont les composantes de  $\vec{E}_0$  orthogonales à la direction de propagation définie par  $\vec{k}$  ; une relation entre ces composantes fixe la polarisation de l'onde (cf. § II). On notera que le vecteur de Poynting associé à l'onde vaut, en moyenne sur le temps (cf. § 1b) :

$$\langle \vec{S}(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \Re \{ \vec{E}(\vec{r})^* \times \vec{B}(\vec{r}) \} = \frac{1}{2\mu_0} \Re \{ \vec{E}_0^* \times \vec{D}_0 \} = \frac{1}{2\mu_0} |\vec{E}_0|^2 \frac{\vec{k}}{\omega}$$

il est indépendant de  $\vec{r}$ , quadratique en champ électrique et pointe sans surprise dans la direction et le sens du vecteur d'onde  $\vec{k}$ .

### 3) Paquet d'ondes - Vitesse de groupe

Une onde plane progressive monochromatique  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \{ \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \}$  apparaît, à juste titre, comme une solution bien artificielle des équations de

(\*) Pour cette raison, l'onde est qualifiée de TEM, pour transverse électro-magnétique.

Maxwell : le champ électromagnétique d'une telle onde existe à tout temps, de  $t = -\infty$  à  $t = +\infty$ , et s'étend spatialement à l'infini, aussi bien suivant la direction de propagation que transversalement. Un tel champ électromagnétique n'est donc pas physique. Cependant, l'intérêt de l'étude de la propagation d'ondes planes monochromatiques dans un milieu linéaire, est que ces ondes entrent dans la décomposition de tout champ électromagnétique régnant dans ce milieu :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re e \left\{ \int d^3k \vec{g}(\vec{k}) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right\},$$

où la pulsation  $\omega$  dépend de  $\vec{k}$  via la relation de dispersion. Cette décomposition s'obtient en utilisant la transformée de Fourier<sup>(\*)</sup> spatiale  $\vec{E}(\vec{k}, t)$  de  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  :  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \int d^3k \vec{E}(\vec{k}, t) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r})$ , et l'équation d'onde du § B-1-b valable dans un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope ; il vient  $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \omega^2 \vec{E} = 0$ , avec  $\omega = v|\vec{k}|$ , d'où  $\vec{E}(\vec{k}, t) = \frac{1}{2} \vec{g}(\vec{k}) e^{i\omega t} + \frac{1}{2} \vec{g}(-\vec{k})^* e^{-i\omega t}$  et finalement le résultat annoncé.

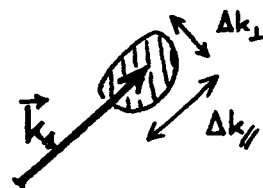
b) Dans le cas où l'enveloppe  $\vec{g}(\vec{k})$  ne prend des valeurs notables que dans le voisinage d'un vecteur d'onde  $\vec{k}_1$  (zone hachurée de la figure ci-contre),  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  est un paquet d'ondes.

Sa composante  $j$ ,  $j = x, y, z$ , prend la forme

$E_j(\vec{r}, t) = \Re e \left\{ A_j(\vec{r}, t) \exp[i(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})] \right\}$ ,  $\omega_1 = \omega(\vec{k}_1)$ , où l'enveloppe lentement variable vaut

$$A_j(\vec{r}, t) = \int d^3k |g_j(\vec{k})| \exp[i\{(\omega - \omega_1)t - (\vec{k} - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} + \varphi_j\}],$$

où  $\varphi_j(\vec{k})$  est l'argument de  $g_j(\vec{k})$ . En développant  $\omega$  et  $\varphi_j$  au voisinage de  $\vec{k}_1$ , l'argument de l'intégrand s'écrit :  $(\vec{k} - \vec{k}_1) \cdot \left[ \vec{\text{grad}}_{\vec{k}} \omega \Big|_{\vec{k}_1} t - \vec{r} + \vec{\text{grad}}_{\vec{k}} \varphi_j \Big|_{\vec{k}_1} \right] + \varphi_j(\vec{k}_1)$  ; à un instant  $t$  donné, l'enveloppe  $A_j(\vec{r}, t)$  est donc de module maximum au



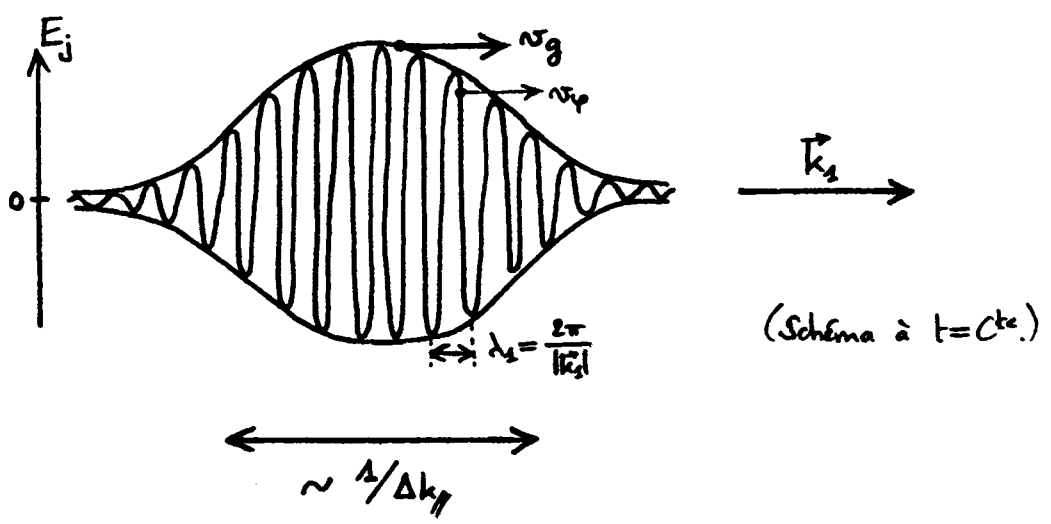
(\*) Joseph Fourier (1768-1830); transformation de Fourier: 1822.

point  $\vec{r} = \vec{\text{grad}}_{\vec{k}} \omega|_{\vec{k}_2} t + \vec{\text{grad}}_{\vec{k}} \varphi|_{\vec{k}_2}$  : le paquet d'ondes se déplace dans le milieu avec la vitesse

$$\vec{v}_g = \vec{\text{grad}}_{\vec{k}} \omega|_{\vec{k}_2},$$

appelée vitesse de groupe.

De plus, suivant les propriétés de la transformée de Fourier, le paquet d'ondes possède une extension spatiale  $\sim 1/\Delta k_{\parallel}$  suivant la direction de propagation fixée par  $\vec{k}_2$ , et une extension  $\sim 1/\Delta k_{\perp}$  dans une direction transverse<sup>(\*)</sup>. En un point fixe du milieu, par lequel il passe, le paquet d'ondes dure pendant un intervalle de temps  $\sim (|\vec{v}_g| \Delta k_{\parallel})^{-1}$ .



c) Dans le milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope considéré ici, la pulsation  $\omega$  est fonction du module du vecteur d'onde  $\vec{k}$  :  $\omega = v k, k = |\vec{k}|$ .

La vitesse de groupe d'un paquet d'ondes s'écrit alors  $\vec{v}_g = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega}{\partial k_i} \hat{u}_i = \dots$   
 $\dots = \sum_{i=1}^3 \frac{d\omega}{dk} \frac{\partial k}{\partial k_i} \hat{u}_i = \frac{d\omega}{dk} \hat{u}$ , où  $\hat{u} = \frac{\vec{k}}{k}$  est le vecteur unitaire suivant la direction et le sens de propagation. On a donc  $\vec{v}_g = v \hat{u}$ , où  $v = \frac{c}{n}$ , c'est-à-dire une vitesse de groupe égale à la vitesse de phase <sup>(cf. § D)</sup>  
 $\vec{v}_p = \frac{\omega}{k} \hat{u} = v \hat{u}$ . Ce résultat n'est pas la généralité : dans un milieu dispersif<sup>(\*)</sup>,  $\vec{v}_g$  et  $\vec{v}_p$  sont alignés avec  $\vec{k}$ , mais n'ont pas le même module,  $v_g \neq v_p$  ; et dans un milieu linéaire anisotrope, la vitesse de groupe  $\vec{v}_g = \vec{\text{grad}}_{\vec{k}} \omega$  n'est pas alignée avec la vitesse de phase  $\vec{v}_p = \frac{\omega}{k} \hat{u}$ , comme on le verra au § IV.

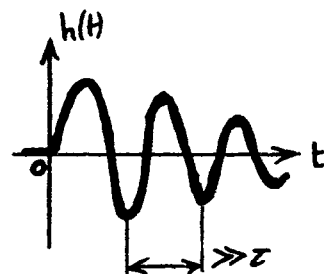
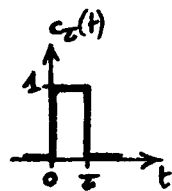
(\*) On suppose la diffraction négligeable ( $1/\Delta k_{\perp} \gg \lambda$ ).

## D) Dispersion et absorption

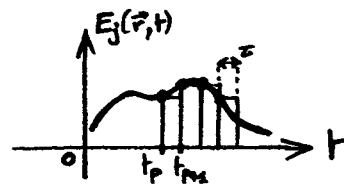
### 1) Fonction de réponse d'un milieu diélectrique

On a vu qu'un milieu linéaire, homogène et isotrope est caractérisé par son équation constitutive liant la densité de polarisation du milieu au champ électrique qui y règne:  $\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi \vec{E}(\vec{r}, t)$ , relation qui définit la susceptibilité électrique  $\chi$  (cf. § B-1-a). Cette relation est instantanée: au point  $\vec{r}$  du milieu, la densité de polarisation suit les variations temporelles du champ électrique. Il est clair qu'il s'agit là d'une approximation: la matière ne peut s'adapter instantanément au champ électrique qu'elle subit, la création (ou l'orientation) des dipôles électriques microscopiques réclamant un certain temps de réaction. La relation constitutive ci-dessus n'est valable que lorsque ce temps de réaction est très faible devant la période optique.

La dynamique de la polarisation du milieu est décrite par la fonction de réponse  $h(t)$ , définie comme suit: si au point  $\vec{r}$ , le champ électrique est une impulsion  $\vec{E}_0(\vec{r}) c_\tau(t)$  de durée  $\tau$  ayant lieu à  $t=0$ , alors la densité de polarisation au même point vaut  $\epsilon_0 \vec{E}_0(\vec{r}) \tau h(t)$ ;  $\tau$  est bien plus courte que tous les temps caractéristiques du système. Pour des raisons de causalité, on a évidemment  $h(t < 0) = 0$ .



La fonction de réponse  $h(t)$  permet d'exprimer la polarisation du milieu en fonction d'un champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  arbitraire. En effet,  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  se met sous la forme d'une série d'impulsions consécutives:  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_p \vec{E}(\vec{r}, t_p) c_\tau(t - t_p)$ ,  $t_p = p\tau$ , et la réponse du milieu linéaire est la superposition des réponses provoquées par chaque impulsion:  $\vec{P}(\vec{r}, t) = \sum_p \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t_p) \tau h(t - t_p)$ , c'est-à-dire:



$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int dt' \vec{E}(\vec{r}, t') h(t - t').$$

Avec le changement de variable  $t'' = t - t'$ , il vient aussi  $\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int dt'' \vec{E}(\vec{r}, t - t'') h(t'')$ : la densité de polarisation à l'instant  $t$  dépend du champ électrique à des instants antérieurs.

## 2) Susceptibilité complexe

g) Si une onde lumineuse à la pulsation  $\omega$ , de champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \dots = \Re e \{ \vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t} \}$ , est présente dans un milieu linéaire, homogène et isotrope, alors l'utilisation de la relation précédente fournit la polarisation du milieu sous la forme  $\vec{P}(\vec{r}, t) = \dots = \Re e \{ \vec{P}(\vec{r}) e^{i\omega t} \}$  avec

$$\vec{P}(\vec{r}) = \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}(\vec{r}),$$

où la susceptibilité électrique complexe  $\chi(\omega)$  est la transformée de Fourier de la fonction de réponse  $h(t)$ :

$$\chi(\omega) = \int dt h(t) e^{-i\omega t}.$$

En décomposant  $\chi(\omega)$  en parties réelle et imaginaire,  $\chi(\omega) = \chi'(\omega) - i\chi''(\omega)$ , il vient:

$$\chi'(\omega) = \int_0^{+\infty} dt h(t) \cos \omega t \quad \text{et} \quad \chi''(\omega) = \int_0^{+\infty} dt h(t) \sin \omega t.$$

Dans le cas où l'extension temporelle de  $h(t)$  est petite devant la période optique  $\frac{2\pi}{\omega}$ ,  $\chi'(\omega) \approx \chi^0 = \chi$  et  $\chi''(\omega) \approx 0$ ; on a alors  $\vec{P}(\vec{r}) = \epsilon_0 \chi \vec{E}(\vec{r})$ , d'où la relation constitutive instantanée  $\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi \vec{E}(\vec{r}, t)$ . Cependant, lorsque  $h(t)$  possède un temps caractéristique de l'ordre  $\frac{2\pi}{\omega}$ , la susceptibilité est complexe et dépend de  $\omega$ , ces deux propriétés étant toujours en coexistence — l'une n'allant pas sans l'autre.

b) Le vecteur  $\vec{D}(\vec{r}, t) = \Re e \{ \vec{D}(\vec{r}) e^{i\omega t} \}$  vérifie alors  $\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \vec{E}(\vec{r})$ , où la constante diélectrique complexe est  $\epsilon_r(\omega) = 1 + \chi(\omega)$ . Dans ces conditions, un raisonnement semblable à celui du § C-2-c montre que les ondes planes progressives monochromatiques, de la forme  $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ , possèdent la relation de dispersion:

$$\vec{k}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (1 + \chi' - i\chi'').$$

Le vecteur d'onde  $\vec{k}$  est donc complexe (ses composantes cartésiennes sont complexes).

En notant  $z$  l'axe suivant  $\vec{k}$ ,  $\vec{k} = k \hat{z}$  et il est usuel d'écrire

$$k = \beta - i \frac{\alpha}{2},$$

où  $\beta$  est la constante de propagation de l'onde considérée, et  $\alpha$  son coefficient d'absorption : on a  $\exp(-ikz) = \exp(-\frac{\alpha}{2}z) \exp(-i\beta z)$ , d'où le facteur d'atténuation de l'intensité lumineuse  $|\exp(-ikz)|^2 = \exp(-\alpha z)$ . La vitesse de phase  $v_p = \frac{\omega}{\beta}$  se met sous la forme  $v_p = \frac{c}{n}$ , l'indice de réfraction  $n(\omega)$  valant

$$n(\omega) = \frac{\beta(\omega)}{k_0}, \text{ où } k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \text{ est le nombre d'onde dans le vide.}$$

La relation de dispersion précédente permet de relier l'indice de réfraction  $n(\omega)$  et le coefficient d'absorption  $\alpha(\omega)$  aux parties réelle et imaginaire de la susceptibilité électrique complexe :

$$\left(n - i \frac{\alpha}{2k_0}\right)^2 = 1 + \chi' - i\chi'';$$

on obtient, de manière exacte :

$$n = \left\{ \frac{(1+\chi') + \sqrt{(1+\chi')^2 + \chi''^2}}{2} \right\}^{1/2}$$

$$\text{et } \alpha = \frac{\chi''}{n} k_0.$$

c) Dans le cas d'un milieu possédant une variété particulière de constituants, ou étant le siège d'un processus physique précis, qui donne <sup>l'un ou l'autre</sup> une susceptibilité complexe  $\chi_2(\omega) = \chi_2'(\omega) - i\chi_2''(\omega)$ , tandis que tous les autres constituants, et tous les autres processus, contribuent à une susceptibilité constante  $\chi_0$  (réelle  $> 0$ ), indépendante de  $\omega$ , les expressions de  $n(\omega)$  et  $\alpha(\omega)$  précédentes s'appliquent, avec  $\chi(\omega) = \chi_0 + \chi_2'(\omega) - i\chi_2''(\omega)$ . Si, de plus,  $|\chi_2'|$  et  $|\chi_2''| \ll n_0^2$  où  $n_0 = \sqrt{1 + \chi_0}$ , alors il vient :

$$n(\omega) \simeq n_0 + \frac{\chi_2'(\omega)}{2n_0}$$

$$\text{et } \alpha(\omega) \simeq \frac{\omega \chi_2''(\omega)}{c n_0}$$

à l'ordre le plus bas en  $\chi_2'$  et  $\chi_2''$ . Ces expressions manifestent que l'absorption provient essentiellement de l'existence d'une partie imaginaire non nulle de la susceptibilité électrique, et que la dispersion — c'est-à-dire la variation de l'indice de réfraction avec la pulsation optique  $\omega$  — a pour origine <sup>essentielle</sup> la dépendance en  $\omega$  de la partie réelle de la susceptibilité.



### 3) Vitesse de groupe et indice de groupe

Dans un milieu linéaire, homogène et isotrope présentant de la dispersion, la relation de dispersion liant la pulsation  $\omega$  d'une onde plane progressive à sa constante de propagation  $\beta$ , est (cf. § 2-b) :

$$\beta = n(\omega) \frac{\omega}{c}.$$

La vitesse de phase est  $v_p(\omega) = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{n(\omega)}$ , tandis que la vitesse de groupe d'un paquet d'ondes vaut (cf. § C-3-c) :  $v_g(\omega) = \frac{d\omega}{d\beta}$ . La relation de dispersion ci-dessus donne  $\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{n}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega}$ , d'où

$$v_g = \frac{c}{N}, \quad \text{où } N = n + \omega \frac{dn}{d\omega} \text{ est l'indice de groupe.}$$

Il est usuel d'employer un indice de réfraction  $n(\lambda_0)$  exprimé en fonction de la longueur d'onde dans l'espace libre  $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$ . L'indice de groupe prend alors la forme  $N = n - \lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0}$ . En général,  $N \neq n$ , et donc  $v_g \neq v_p$ .

### 4) Modèle classique de résonance optique

a) Dans un milieu diélectrique, le champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  d'une onde électromagnétique agit sur les charges liées se trouvant au voisinage immédiat du point  $\vec{r}$ . Dans un cristal, ces charges sont les ions du réseau et les électrons qui leur sont liés. On suppose que le nuage électronique entourant un <sup>certain</sup> type d'ion, est lié à celui-ci par une force de rappel élastique  $-x\vec{\delta}$ ,  $x > 0$ , où  $\vec{\delta}$  est l'écart à sa position d'équilibre du barycentre du nuage d'électrons; en présence du champ  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , le déplacement  $\vec{\delta}_p$  des nuages situés en  $\vec{r}$  suit l'équation dynamique :

$$m \ddot{\vec{\delta}}_p(t) = -x \vec{\delta}_p(t) - f \dot{\vec{\delta}}_p(t) + q \vec{E}(\vec{r}, t),$$

où  $m$  et  $q (< 0)$  sont la masse et la charge totales d'un nuage, et  $f (> 0)$  un coefficient d'amortissement fluide. Alors, en notant  $n$  le nombre de ces

nuages électroniques par unité de volume, on tire l'équation suivie par la densité de polarisation  $\vec{P}_1(\vec{r}, t) = nq\vec{d}_p(t)$  qu'ils créent :

$$\frac{\partial^2 \vec{P}_1}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \vec{P}_1}{\partial t} + \omega_0^2 \vec{P}_1 = \omega_0^2 \epsilon_0 \chi_{1s} \vec{E}(\vec{r}, t),$$

avec  $\gamma = \frac{p}{m}$ ,  $\omega_0 = (\frac{X_0}{m})^{1/2}$  et  $\chi_{1s} = \frac{nq^2}{\epsilon_0 m \omega_0^2}$ . On considère  $\gamma \ll \omega_0$ .

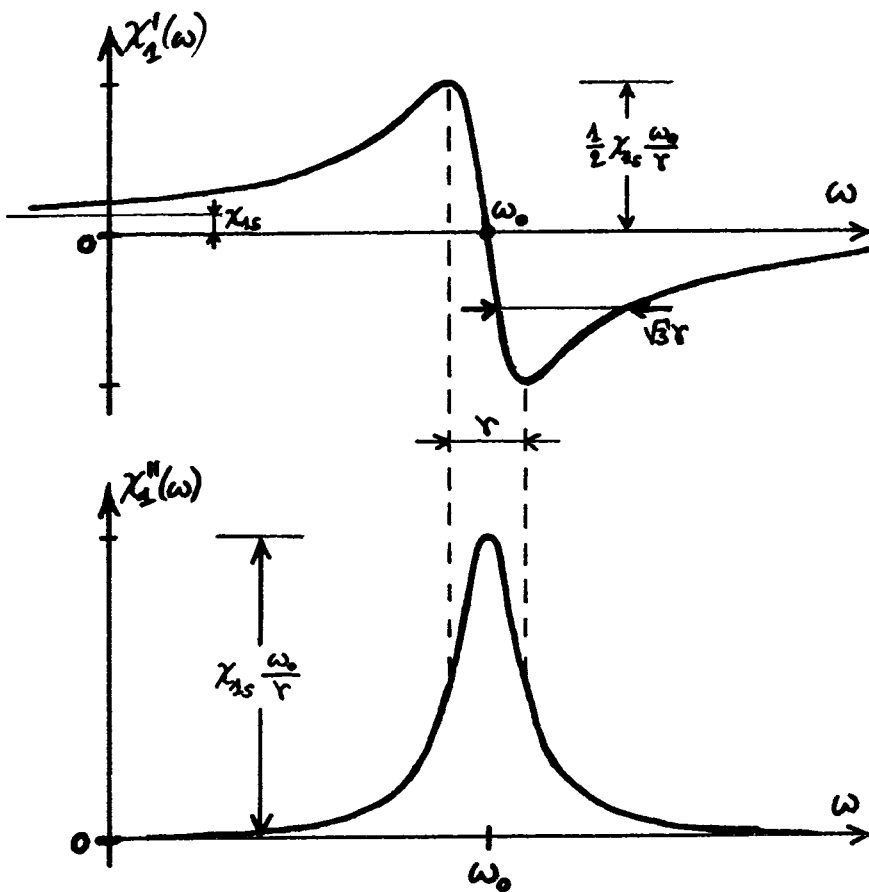
b) Pour un champ électrique harmonique à la pulsation optique  $\omega$ ,  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re\{ \vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t} \}$  et la densité de polarisation  $\vec{P}_1(\vec{r}, t) = \Re\{ \vec{P}_1(\vec{r}) e^{i\omega t} \}$  vérifie :

$$(-\omega^2 + \gamma i\omega + \omega_0^2) \vec{P}_1(\vec{r}) = \omega_0^2 \epsilon_0 \chi_{1s} \vec{E}(\vec{r}), \text{ soit } \vec{P}_1(\vec{r}) = \epsilon_0 \chi_1(\omega) \vec{E}(\vec{r}) \text{ avec}$$

une susceptibilité complexe

$$\chi_1(\omega) = \chi_{1s} \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}.$$

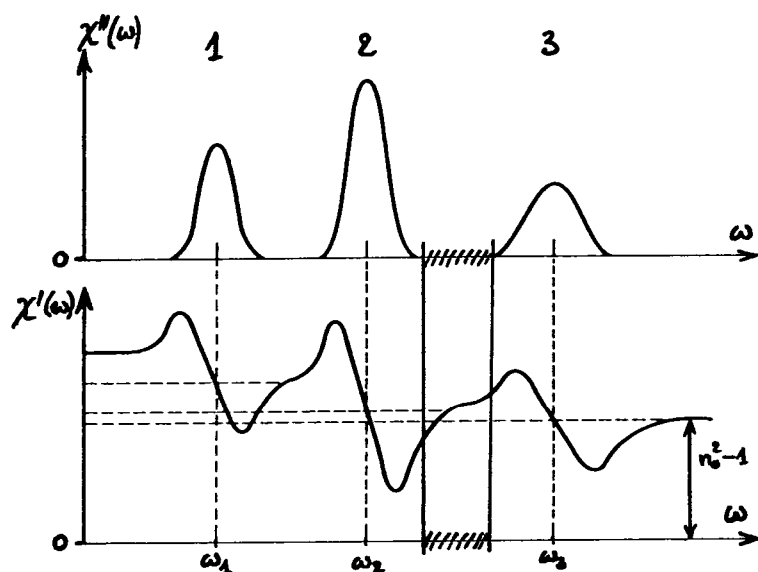
Les parties réelle et imaginaire de  $\chi_1(\omega) = \chi_1'(\omega) - i\chi_1''(\omega)$  sont tracées ci-contre. Aux très basses pulsations ( $\omega \ll \omega_0$ ), la susceptibilité approche de sa valeur de régime statique,  $\chi_1(\omega) \approx \chi_{1s}$ . Aux très hautes pulsations ( $\omega \gg \omega_0$ ),  $\chi_1(\omega) \approx 0$  et le processus (cf. § a) ne contribue pas à la polarisation du milieu. À résonance,  $\chi_1'(\omega = \omega_0) = 0$  et  $\chi_1''(\omega)$



atteint sa valeur maximale  $\chi_1''(\omega = \omega_0) = \chi_{1s} \frac{\omega_0}{\gamma}$  ( $\gg \chi_{1s}$ ). Pour étudier le comportement de  $\chi_1(\omega)$  au voisinage de la résonance, on utilise les approximations  $(\omega_0^2 - \omega^2) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$  et  $i\gamma\omega \approx i\gamma\omega_0$ , valables si  $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ ; il vient ainsi  $\chi_1(\omega) \approx \chi_{1s} \frac{(\frac{\omega_0}{2})}{[(\omega_0 - \omega) + i\frac{\gamma}{2}]}$ . La largeur à mi-hauteur de  $\chi_1''(\omega)$  vaut  $\gamma$ ; les extrema de  $\chi_1'(\omega)$  sont en  $\omega_{\mp} = \omega_0 \mp \frac{\gamma}{2}$ , et  $\chi_1'(\omega_{\mp}) = \pm \frac{1}{2} \chi_{1s} \frac{\omega_0}{\gamma}$ .

c) Typiquement, un milieu diélectrique possède plusieurs résonances optiques, dont les pulsations de résonance sont dans le domaine visible, ou proches du visible. La susceptibilité électrique totale  $\chi(\omega)$  du milieu est la somme des contributions de ces résonances. Suivant

l'étude du § b, la partie imaginaire  $\chi''(\omega)$  n'est non nulle qu'au voisinage des résonances, tandis que ces résonances contribuent à la partie réelle  $\chi'(\omega)$  non seulement en leur voisinage, mais aussi à toutes les



pulsations  $\omega$  qui leur sont plus basses (cf. figure<sup>(\*)</sup> ci-dessus).

Ainsi un milieu diélectrique possède-t-il des bandes spectrales d'absorption (où  $\chi''(\omega) \neq 0$ ), qui sont entrecoupées de fenêtres de transparence (où  $\chi''(\omega) \approx 0$ ). Par exemple, dans la zone de transparence hachurée sur la figure, l'absorption est nulle :  $\alpha(\omega) \approx 0$  (on peut se contenter de cette approximation pour les épaisseurs de diélectrique usuellement traversées par la lumière,  $\leq 1$  cm), et l'indice de réfraction possède de la dispersion due aux résonances 2 et 3, ce qui permet de l'écrire sous la forme

$$n(\omega) = n_0 + \frac{1}{2n_0} [\chi'_2(\omega) + \chi'_3(\omega)]$$

(d'après le § 2-c), où  $\chi'_2(\omega) = \chi_{2s} \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega^2}$  d'après le § b. Dans une fenêtre de transparence, un milieu diélectrique montre donc en général de la dispersion, qui est d'autant plus prononcée que la pulsation optique  $\omega$  s'approche d'une pulsation de résonance du milieu.

(\*) Cette figure est tirée de: Saleh, Teich Fundamentals of Photonics (Wiley, 1991).

# INTRODUCTION À LA PHOTONIQUE

## Exercices I

1) Conservation locale de la charge électrique. En écrivant que le taux de variation de la charge  $Q(t) = \iiint_V d^3r \rho(\vec{r}, t)$  comprise à l'intérieur d'un volume  $V$ , est dû à l'intensité  $I(t) = \oint_{\Sigma} \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{\Sigma}$  du courant au travers de la surface  $\Sigma$  qui le délimite, montrer que  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$ . Vérifier que les équations de Maxwell sont compatibles avec cette relation. Montrer que, dans un milieu, les charges liées et les charges libres obéissent séparément à la relation en question.

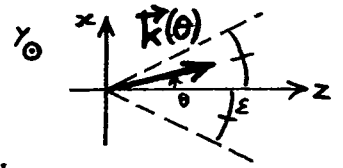
2) Onde plane progressive dans le vide. Une onde électromagnétique dans l'espace libre possède le champ électrique  $\vec{E}(z, t) = \hat{u}_x f(t - \frac{z}{c})$ . Déterminer l'expression du champ magnétique de cette onde. Quelle est la nature de l'onde si  $f(t) = E_0 \cos \omega t$  ? si  $f(t) = E_0 e^{-t/\tau} \cos \omega t$  ( $\tau^{-1} \ll \omega$ ) ?

3) Potentiels vecteur et scalaire. Dédurre des équations de Maxwell qu'il existe des potentiels vecteur  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  et scalaire  $U(\vec{r}, t)$  permettant d'exprimer le champ électromagnétique sous la forme  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ ,  $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} U$ ; quelles équations suivent  $\vec{A}$  et  $U$  ? Vérifier que les potentiels  $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad} \chi$  et  $U' = U - \frac{\partial \chi}{\partial t}$  correspondant au même champ électromagnétique que celui donné par  $\vec{A}$  et  $U$ . Dans la jauge de Lorentz :  $\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} = 0$ , montrer que les équations pour  $\vec{A}$  et  $U$  se découpent.

4) Conditions aux limites entre deux milieux. Dérivez les conditions aux limites pour les composantes normales de  $\vec{B}$  et  $\vec{D}$ , en utilisant le théorème d'Ostrogradski. Dérivez celles pour les composantes tangentiels de  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$ , avec le théorème de Stokes. (Le point de départ est constitué des équations de Maxwell dans un milieu matériel.)

5) Dimension transverse d'un faisceau lumineux. Dans l'espace libre, une onde optique de pulsation  $\omega$  est formée d'une superposition à poids égaux d'ondes planes progressives de même pulsation, dont les vecteurs d'onde sont ( $k_0 = \frac{\omega}{c}$ )

$$\vec{k}(\theta) = k_0 \cos \theta \hat{u}_z + k_0 \sin \theta \hat{u}_x, \quad |\theta| < \varepsilon \ll 1:$$



$$E_y(z, x, t) = E_0 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\theta \exp[i(\omega t - k_0 \cos \theta z - k_0 \sin \theta x)].$$

a) En utilisant  $\vec{k}(\theta)$  exprimé à l'ordre 1 en  $\theta$ , montrer que l'onde possède une extension transverse  $\Delta x \propto \frac{1}{\varepsilon}$ , c'est-à-dire  $\Delta x \propto 1/\Delta k_x$ .

b) En poussant le développement de  $\vec{k}(\theta)$  à l'ordre 2, montrer que l'onde possède également une divergence, d'ouverture  $\varepsilon$ .

6) Largeur temporelle d'une impulsion lumineuse. Dans un milieu linéaire, homogène et isotrope d'indice de réfraction  $n(\omega)$ , se propage un paquet d'ondes de pulsations comprises entre  $\omega_1 - \frac{\delta}{2}$  et  $\omega_1 + \frac{\delta}{2}$  ( $\delta \ll \omega_1$ ):

$$E_y(z, t) = E_0 \int_{\omega_1 - \frac{\delta}{2}}^{\omega_1 + \frac{\delta}{2}} \frac{d\omega}{\delta} \exp[i(\omega t - k(\omega)z)], \quad k(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c}.$$

a) En utilisant un développement de  $\omega t - k(\omega)z$  à l'ordre 1 en  $\omega - \omega_1$ , montrer que l'impulsion lumineuse progresse à la vitesse de groupe  $v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\omega=\omega_1}$ , et possède une durée  $\Delta t \propto 1/\delta$  (c'est-à-dire une extension  $\Delta z \propto v_g/\delta$ ).

b) La phase  $\omega t - k(\omega)z$  étant développée à l'ordre 2 en  $\omega - \omega_1$ , montrer que la durée de l'impulsion vaut  $\Delta t = |\Delta \omega| \delta z$  ( $\Delta \omega = \left. \frac{d^2 k}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_1}$ ) pour les grandes distances de propagation  $z$ . Retrouver simplement ce résultat en considérant les vitesses de groupe des composantes spectrales de l'impulsion lumineuse.

7) Fonction de réponse et susceptibilité. Un milieu a pour équation caractéristique ( $\gamma \ll \omega$ ):

$$\frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \omega_0^2 \vec{P} = \omega_0^2 \varepsilon_0 \chi \vec{E} \quad (\vec{P}(\vec{r}, t): \text{densité de polarisation}; \vec{E}(\vec{r}, t): \text{champ électrique}).$$

Montrer que la fonction de réponse de ce milieu est  $h(t) = \chi \omega_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin \omega_0 t$ . Trouver la susceptibilité complexe  $\chi(\omega)$  du milieu. Vérifier que  $h(t)$  et  $\chi(\omega)$  sont liés par T.F.

## INTRODUCTION À LA PHOTONIQUE

II - Polarisation de la lumière

Dans un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope, peuvent se propager des ondes optiques planes monochromatiques, avec la vitesse de phase  $c/n$  où  $n$  est l'indice de réfraction du milieu; des ondes du même type peuvent également se propager dans l'espace libre, à la vitesse de phase  $c$ . Dans un milieu linéaire, homogène et isotrope, une onde plane progressive monochromatique est TEM — ses champs électrique et magnétique sont orthogonaux à la direction de propagation — et les deux seuls paramètres libres de l'onde sont les deux composantes cartésiennes transverses du champ électrique, une fois fixés la pulsation lumineuse et la direction de propagation (cf. § I-C-2). Une relation entre ces deux composantes transverses du champ électrique, caractérise la polarisation de l'onde lumineuse en question.

Ce chapitre présente d'abord (§ A) les états de polarisation possibles pour une onde plane progressive monochromatique. Ces états de polarisation sont, par ordre de complexité croissante de leur description, les polarisations linéaire, circulaire et elliptique. Ensuite, deux phénomènes physiques où interviennent essentiellement la polarisation linéaire de la lumière sont exposés: la diffusion (scattering) de la lumière par des atomes ou des molécules (§ B), et la réflexion/réfraction de la lumière sur le dioptre séparant deux diélectriques linéaires, homogènes et isotropes (§ C). Dans ce dernier phénomène, on verra que la quantité de lumière réfléchiée par un dioptre dépend de la polarisation de l'onde incidente, et qu'il est même possible, sous certaines conditions, que la réflexion s'annule totalement.

La polarisation de la lumière peut être manipulée à volonté, grâce à des éléments optiques transparents au travers desquels on fait passer les faisceaux lumineux. Ces éléments seront précisés dans les prochains chapitres III, IV et V.

## Ⓐ États de polarisation d'une onde plane progressive monochromatique

Dans un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope, on considère une onde plane progressive monochromatique à la pulsation optique  $\omega$ . En appelant  $z$  l'axe suivant la direction et le sens de propagation, le vecteur d'onde vaut  $\vec{k} = k \hat{u}_z$ , avec  $k = n \frac{\omega}{c}$ , et le champ électrique de l'onde est

$$\vec{E}(z, t) = \Re e \left\{ \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - kz)] \right\}, \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \vec{k} \\ \longrightarrow z \end{array}$$

où l'enveloppe complexe  $\vec{E}_0 = E_{0x} \hat{u}_x + E_{0y} \hat{u}_y$  est un vecteur constant orthogonal à l'axe  $z$  suivant la propagation (cf. § I-C-2); le champ magnétique de l'onde,  $\vec{B}(z, t)$ , possède la même forme que celle du champ électrique, avec l'enveloppe  $\vec{B}_0 = \frac{n}{c} \hat{u}_z \times \vec{E}_0$ . Ainsi les composantes  $E_{0x}$  et  $E_{0y}$  sont-elles les deux seuls paramètres ajustables de l'onde plane de pulsation  $\omega$  se propageant dans le milieu<sup>(\*)</sup>. C'est la relation d'amplitude et de phase entre  $E_{0x}$  et  $E_{0y}$  qui définit la polarisation de l'onde lumineuse.

En écrivant

$$E_{0x} = |E_{0x}| e^{i\varphi_x} \quad \text{et} \quad E_{0y} = |E_{0y}| e^{i\varphi_y},$$

les composantes du champ électrique de l'onde prennent la forme :

$$\begin{cases} E_x(z, t) = |E_{0x}| \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y(z, t) = |E_{0y}| \cos(\omega t - kz + \varphi_y). \end{cases}$$

$E_x(z, t)$  et  $E_y(z, t)$  oscillent, avec la pulsation  $\omega$  en fonction du temps, avec la période spatiale  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{c}{n\nu}$  en fonction de  $z$ , et avec des amplitudes et des phases initiales différentes.

Avant de décrire les différents états de polarisation possibles pour cette

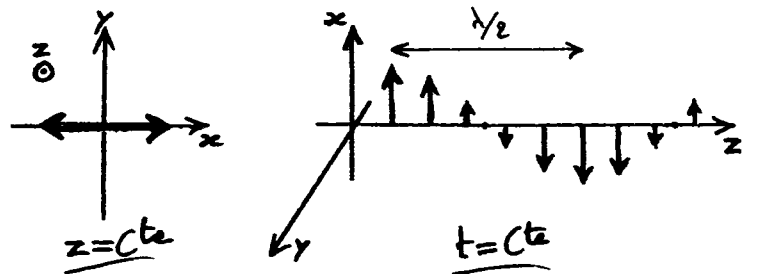
---

(\*) Une onde du même type peut se propager dans l'espace libre; pour ce cas, les résultats du § A s'appliquent, en y faisant  $n=1$ .

onde lumineuse, on remarquera que le vecteur de Poynting moyen qui lui est associé :  $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} |\vec{E}_0|^2 \frac{\vec{k}}{\omega} = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (|\dot{\epsilon}_{0x}|^2 + |\dot{\epsilon}_{0y}|^2) \hat{u}_z$ , ne fait pas intervenir de relation de phase entre  $\dot{\epsilon}_{0x}$  et  $\dot{\epsilon}_{0y}$ . Il y a donc absence d'interférence entre deux états de polarisation linéaire (cf. §1 ci-dessous) selon des directions orthogonales. (L'expression de  $\langle \vec{S} \rangle$  ci-dessus a été vue au § I-C-2.)

### 1) Lumière polarisée linéairement

a) Si l'une des composantes cartésiennes du champ électrique est nulle, ce champ est constamment orienté dans la direction de l'autre composante. Par exemple, si  $\dot{\epsilon}_{0y} = 0$ , la seule composante non nulle du champ électrique de l'onde optique est  $E_x(z, t) = |\dot{\epsilon}_{0x}| \cos(\omega t - kz + \varphi_x)$ ; dans un plan  $\hat{u}_z$  fixé, le champ électrique oscille suivant l'axe  $x$  et à une date  $t$  fixée, il oscille en fonction de  $z$  tout en restant aligné avec  $x$  (le champ est le même dans un plan  $z = Ct$ ).



Si, inversement, c'est l'autre composante cartésienne qui est nulle :  $\dot{\epsilon}_{0x} = 0$ , alors l'onde lumineuse est polarisée linéairement suivant  $y$ . Pour représenter cette onde, on utilise des schémas semblables aux précédents, dans lesquels les rôles des axes  $x$  et  $y$  sont échangés.

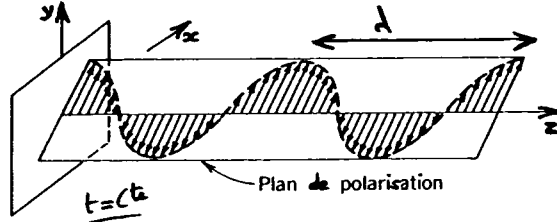
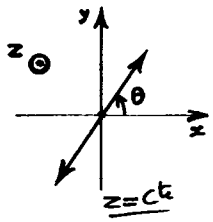
On a vu qu'une onde quelconque (à la pulsation  $\omega$ , se propageant suivant  $z$ ) est caractérisée par son enveloppe complexe  $\vec{E}_0 = \dot{\epsilon}_{0x} \hat{u}_x + \dot{\epsilon}_{0y} \hat{u}_y$ . Cette écriture s'interprète comme la décomposition de l'onde sur les états de polarisation linéaire suivant  $x$  et  $y$ , le champ électrique physique s'écrivant en effet  $\vec{E}(z, t) = \hat{u}_x \Re\{ \dot{\epsilon}_{0x} e^{i(\omega t - kz)} \} + \hat{u}_y \Re\{ \dot{\epsilon}_{0y} e^{i(\omega t - kz)} \}$ .

b) Lorsque ni  $\dot{\epsilon}_{0x}$  ni  $\dot{\epsilon}_{0y}$  ne sont nuls, le champ électrique de l'onde est également polarisé linéairement si la différence de phase

$$\varphi = \varphi_y - \varphi_x$$



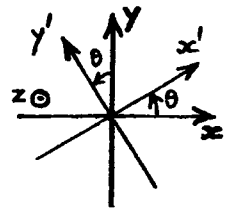
vaut  $\varphi = 0$  ou  $\varphi = \pi$  (modulo  $2\pi$ ). En effet, on a alors  $E_y(z,t) = \frac{|\tilde{\epsilon}_y|}{|\tilde{\epsilon}_{ox}|} E_x(z,t)$  ou  $E_y(z,t) = -\frac{|\tilde{\epsilon}_y|}{|\tilde{\epsilon}_{ox}|} E_x(z,t)$ , qui est l'équation d'une droite de pente  $\text{tg } \theta = |\tilde{\epsilon}_y|/|\tilde{\epsilon}_{ox}|$  ( $\varphi = 0$ ) ou  $\text{tg } \theta = -|\tilde{\epsilon}_y|/|\tilde{\epsilon}_{ox}|$  ( $\varphi = \pi$ ) — avec  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Les



figures ci-contre représentent une polarisation linéaire avec  $\varphi = 0$ ; l'amplitude d'oscillation du champ

électrique vaut  $\sqrt{|\tilde{\epsilon}_{ox}|^2 + |\tilde{\epsilon}_y|^2}$ . Le plan passant par l'axe  $z$  et parallèle à la direction du champ électrique de l'onde optique, est le plan de polarisation de l'onde (une lumière linéairement polarisée est dite aussi de polarisation planeaire).

L'état de polarisation linéaire selon le vecteur unitaire  $\cos\theta \hat{u}_x + \sin\theta \hat{u}_y$ , associé à l'état selon  $-\sin\theta \hat{u}_x + \cos\theta \hat{u}_y$ , orthogonal au premier, peut servir à décomposer une onde lumineuse se propageant suivant  $z$ . En effet, il s'agit simplement de choisir, plutôt que le système de coordonnées  $(x, y)$ , le système  $(x', y')$  qui est tourné de l'angle  $\theta$  autour de  $z$  (cf. figure ci-contre).



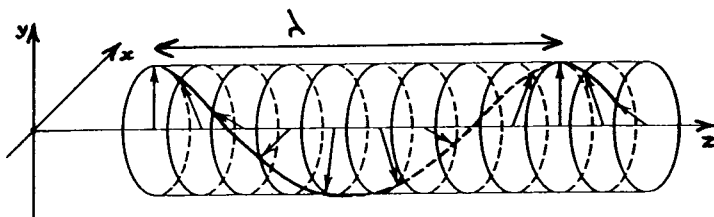
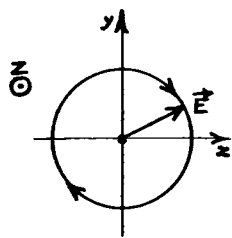
## 2) Lumière polarisée circulairement

Si  $|\tilde{\epsilon}_{ox}| = |\tilde{\epsilon}_{oy}| = E_0$  et  $\varphi = \varphi_y - \varphi_x = \pm \frac{\pi}{2}$  (modulo  $2\pi$ ), les composantes du champ électrique de l'onde lumineuse sont  $E_x(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi_x)$  et  $E_y(z,t) = \mp E_0 \sin(\omega t - kz + \varphi_x)$ . On en déduit  $E_x(z,t)^2 + E_y(z,t)^2 = E_0^2$ : dans un plan  $z = ct$ , ie en tout point de ce plan, le champ électrique de l'onde décrit un cercle à la pulsation optique  $\omega$ . Le sens de rotation est le sens trigonométrique autour de l'axe  $z$  si  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ , et le sens opposé si  $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ ; dans le premier cas, la polarisation de l'onde est dite circulaire gauche, et dans le second, circulaire droite (suivant les ouvrages, on peut trouver une dénomination où les termes "droite" et "gauche" sont échangés). À une date  $t$  fixée, la pointe du champ électrique se situe sur une hélice d'axe  $z$ , d'hélicités

opposées pour les polarisations circulaires droite et gauche.

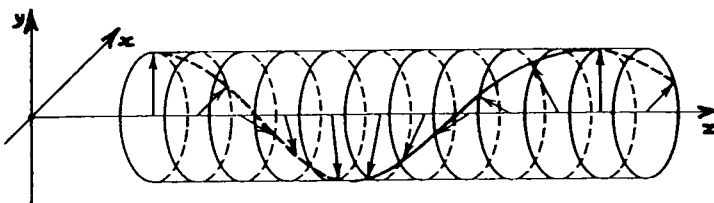
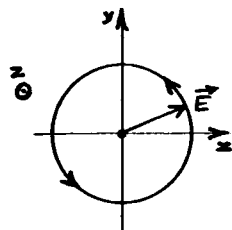
circ. droite:

$$\dot{\mathcal{E}}_{0y} = i \dot{\mathcal{E}}_{0x}$$



circ. gauche:

$$\dot{\mathcal{E}}_{0y} = -i \dot{\mathcal{E}}_{0x}$$



$$z = ct$$

$$t = ct$$

Il est utile de noter que les relations d'amplitude et de phase:  $|\dot{\mathcal{E}}_{0x}| = |\dot{\mathcal{E}}_{0y}|$  et  $\Psi = -\frac{\pi}{2}$ , que doivent vérifier les composantes d'une lumière circulaire gauche, se résument par l'expression  $\dot{\mathcal{E}}_{0y} = -i \dot{\mathcal{E}}_{0x}$ ; de la même façon, la relation  $\dot{\mathcal{E}}_{0y} = +i \dot{\mathcal{E}}_{0x}$  caractérise une lumière circulaire droite.<sup>(\*)</sup>

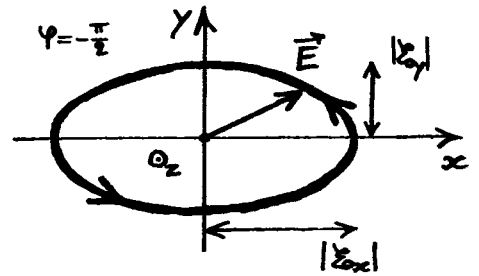
b) Une lumière circulaire gauche possède une enveloppe complexe suivant le vecteur unitaire  $\hat{u}_g = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{u}_x - i\hat{u}_y)$ , et une lumière circulaire droite une enveloppe suivant  $\hat{u}_d = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{u}_x + i\hat{u}_y)$ . Ces deux vecteurs forment une base orthonormée, au sens  $\hat{u}_d^* \cdot \hat{u}_d = \hat{u}_g^* \cdot \hat{u}_g = 1$  et  $\hat{u}_d^* \cdot \hat{u}_g = 0$ , sur laquelle une onde optique se propageant selon  $z$  peut se décomposer:  $\vec{\mathcal{E}}_0 = \dot{\mathcal{E}}_{0d} \hat{u}_d + \dot{\mathcal{E}}_{0g} \hat{u}_g$ .

Il est facile de trouver la correspondance entre les composantes circulaires  $(\dot{\mathcal{E}}_{0d}, \dot{\mathcal{E}}_{0g})$  d'une onde et ses composantes linéaires  $(\dot{\mathcal{E}}_{0x}, \dot{\mathcal{E}}_{0y})$ :  
 $\dot{\mathcal{E}}_{0x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{\mathcal{E}}_{0d} + \dot{\mathcal{E}}_{0g})$ ,  $\dot{\mathcal{E}}_{0y} = i\frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{\mathcal{E}}_{0d} - \dot{\mathcal{E}}_{0g})$ . En utilisant ces relations, le vecteur de Poynting moyen associé à l'onde lumineuse:  $\langle \vec{S} \rangle = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (|\dot{\mathcal{E}}_{0x}|^2 + |\dot{\mathcal{E}}_{0y}|^2) \hat{u}_z$ , se met aussi sous la forme  $\langle \vec{S} \rangle = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (|\dot{\mathcal{E}}_{0d}|^2 + |\dot{\mathcal{E}}_{0g}|^2) \hat{u}_z$ , qui manifeste l'absence d'interférence entre les états de polarisation circulaires droite et gauche.

(\*) Si l'on avait écrit  $\vec{\mathcal{E}}(z,t) = \text{Re}\{\dot{\mathcal{E}}_0 \exp[i(kz - \omega t)]\}$ ,  $\dot{\mathcal{E}}_{0y} = +i \dot{\mathcal{E}}_{0x}$  (et  $\dot{\mathcal{E}}_{0y} = -i \dot{\mathcal{E}}_{0x}$ ) aurait caractérisé une polarisation circulaire gauche (et droite); et dans les expressions du §b,  $i$  aurait été remplacé par  $-i$ .

### 3) Lumière polarisée elliptiquement

a) Lorsque  $\varphi = \varphi_y - \varphi_x \stackrel{= -\frac{\pi}{2} \text{ (modulo } 2\pi)}{}$ , les composantes d'une onde lumineuse se propageant suivant  $z$  sont  $E_x(z,t) = |\tilde{E}_{0x}| \cos(\omega t - kz + \varphi_x)$  et  $E_y(z,t) = |\tilde{E}_{0y}| \sin(\omega t - kz + \varphi_x)$ . Il vient  $E_x^2/|\tilde{E}_{0x}|^2 + E_y^2/|\tilde{E}_{0y}|^2 = 1$  : en tout point d'un plan  $z = Ct$ , l'extrémité du vecteur champ électrique décrit, dans le sens trigonométrique, une ellipse d'axes principaux  $x$  et  $y$ , et de dimensions principales  $|\tilde{E}_{0x}|$  et  $|\tilde{E}_{0y}|$  (si, de plus,  $|\tilde{E}_{0x}| = |\tilde{E}_{0y}|$ , alors la polarisation de la lumière est circulaire gauche, cf. § 2-a).



Dans le cas où  $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ ,  $|\tilde{E}_{0x}|$  et  $|\tilde{E}_{0y}|$  étant inchangés, la même ellipse est décrite dans le sens inverse du sens trigonométrique.

L'enveloppe complexe d'une onde lumineuse elliptique gauche, d'axes principaux  $x$  et  $y$  (cf. figure ci-dessus), vaut  $(|\tilde{E}_{0x}| \hat{u}_x - i |\tilde{E}_{0y}| \hat{u}_y) e^{i\varphi_x}$ ; elle est donc proportionnelle au vecteur unitaire  $\hat{u}_g^\theta = \cos\theta \hat{u}_x - i \sin\theta \hat{u}_y$ , où  $\text{tg}\theta = \frac{|\tilde{E}_{0y}|}{|\tilde{E}_{0x}|}$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ). Le vecteur unitaire normal au précédent est  $\hat{u}_d^\theta = \sin\theta \hat{u}_x + i \cos\theta \hat{u}_y$ , où  $\theta$  est toujours le même angle;  $\hat{u}_d^\theta$  caractérise une polarisation elliptique droite, toujours d'axes principaux  $x$  et  $y$ , mais dont les dimensions principales ont été échangées. Les vecteurs unitaires  $\hat{u}_d^\theta$  et  $\hat{u}_g^\theta$  peuvent servir de base de décomposition<sup>(\*)</sup> d'une lumière se propageant suivant  $z$ , et ce, quel que soit  $\theta$ .

b) Dans le cas général, les composantes  $E_x(z,t)$  et  $E_y(z,t)$  de la lumière (cf. p. II-2) vérifient

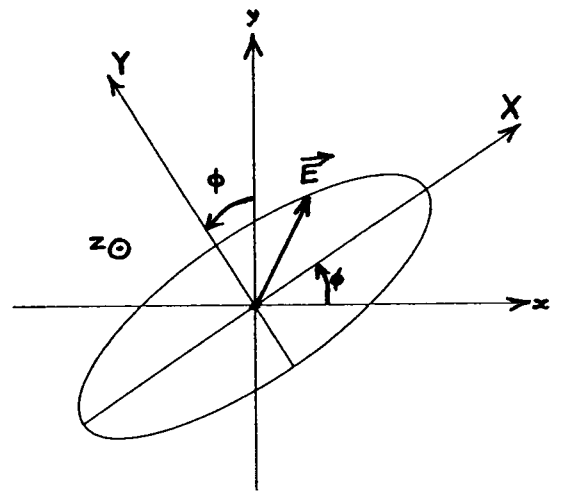
$$\frac{E_x^2}{|\tilde{E}_{0x}|^2} + \frac{E_y^2}{|\tilde{E}_{0y}|^2} - 2 \cos\varphi \frac{E_x}{|\tilde{E}_{0x}|} \frac{E_y}{|\tilde{E}_{0y}|} = \sin^2\varphi \quad (\varphi = \varphi_y - \varphi_x),$$

qui est l'équation d'une ellipse dont les axes principaux  $X$  et  $Y$  sont tournés par rapport aux axes  $x$  et  $y$ , d'un angle  $\phi$  donné par

$$\text{tg} 2\phi = 2 \cos\varphi \frac{|\tilde{E}_{0x}| |\tilde{E}_{0y}|}{|\tilde{E}_{0x}|^2 - |\tilde{E}_{0y}|^2}, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}.$$

(\*) Comme attendu, pour  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , les vecteurs  $\hat{u}_d^\theta$  et  $\hat{u}_g^\theta$  coïncident avec  $\hat{u}_d$  et  $\hat{u}_g$  qui caractérisent une polarisation circulaire droite et gauche, respectivement (cf. § 2-b).

L'angle  $\phi$  est trouvé en injectant dans l'équation de l'ellipse les relations  $E_{ze} = E_x \cos \phi - E_y \sin \phi$ ,  $E_y = E_x \sin \phi + E_y \cos \phi$  et en annulant le terme en  $E_x E_y$ . En inversant les relations précédentes pour exprimer  $E_x$  et  $E_y$  en fonction de  $E_{ze}$  et  $E_y$ , on obtient les expressions de  $E_x(z,t)$  et  $E_y(z,t)$ , d'où l'on déduit les



dimensions principales de l'ellipse de polarisation  $|\Sigma_{ox}|$  et  $|\Sigma_{oy}|$  sous la forme :

$$|\Sigma_{ox}|^2 = |\Sigma_{oze}|^2 \cos^2 \phi + |\Sigma_{oy}|^2 \sin^2 \phi + 2 |\Sigma_{oze}| \cos \phi |\Sigma_{oy}| \sin \phi \cos \psi$$

$$\text{et } |\Sigma_{oy}|^2 = |\Sigma_{oze}|^2 \sin^2 \phi + |\Sigma_{oy}|^2 \cos^2 \phi - 2 |\Sigma_{oze}| \sin \phi |\Sigma_{oy}| \cos \phi \cos \psi.$$

La polarisation est elliptique gauche ( $\vec{E}$ , à  $z=ct$ , tourne dans le sens trigonométrique autour de  $z$ ) si  $\sin \psi < 0$ ; elle est elliptique droite si  $\sin \psi > 0$ .

#### 4) Remarques

a) Lorsqu'un faisceau lumineux est formé d'une suite de paquets d'ondes se propageant suivant  $z$  (cf. § I-C-3), il peut arriver qu'une minorité d'entre eux n'aient pas la même polarisation que la majorité. La polarisation du faisceau est alors dite partielle.

b) Pour la simplicité, les différents états de polarisation possibles de la lumière ont été présentés, dans ce § A, sur le cas d'une onde plane progressive monochromatique. Dans le cas plus général d'une onde monochromatique (cf. § I-C-1), l'extrémité du vecteur champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t} \}$  décrit, en tout point  $\vec{r}$  de l'espace, une ellipse; le plan de cette ellipse et ses caractéristiques, qui peuvent éventuellement correspondre à une polarisation linéaire ou circulaire, varient avec la position  $\vec{r}$  dans l'espace. On ne peut donc parler de la polarisation d'une onde monochromatique qu'en un point donné. Au contraire, la polarisation d'une onde plane progressive monochromatique est, elle, indépendante du lieu où l'onde est observée.

## ⓑ Diffusion (scattering) de la lumière

### 1) Position du problème

Une onde optique monochromatique de pulsation  $\omega$ , polarisée linéairement <sup>suivant  $x$</sup> , excite un atome, ou une molécule, placé en  $\vec{r} = 0$ . Les électrons de cet atome, ou de cette molécule, sont ainsi mis en mouvement et produisent une densité de courant de la forme :

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \hat{u}_x \Re e \{ j e^{i\omega t} \} \delta(x) \delta(y) \delta(z),$$

où la fonction  $\delta(x)$  est de l'ordre de  $1/a$  sur un intervalle d'extension  $\sim a$  autour de  $x=0$ , et est nulle en dehors de cet intervalle<sup>(\*)</sup>;  $a$ , taille typique du nuage électronique considéré, est une échelle de longueur infiniment petite devant toutes les longueurs caractéristiques du problème. On notera que l'amplitude complexe  $j$  possède la dimension d'une densité de courant multipliée par un volume, c'est-à-dire celle d'une intensité électrique fois une longueur.

L'équation de conservation locale de la charge,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$ , impose d'associer à  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  la densité volumique de charge

$$\rho(\vec{r}, t) = \Re e \left\{ \frac{i}{\omega} j e^{i\omega t} \right\} \delta'(x) \delta(y) \delta(z).$$

Cette distribution de charge est caractérisée <sup>(entre autres)</sup> par son dipôle électrique  $\vec{d}(t) = \int d^3 r \vec{r} \rho(\vec{r}, t)$ , qui oscille ici suivant l'axe  $x$  :

$$\vec{d}(t) = \Re e \left\{ -\frac{i}{\omega} j e^{i\omega t} \right\} \hat{u}_x.$$

Ce dipôle oscillant rayonne un champ électromagnétique dans tout l'espace; ainsi l'énergie apportée par l'onde lumineuse initiale se trouve-t-elle redistribuée dans toutes les directions.

Le point clé de ce § B est le calcul du champ électromagnétique rayonné par le dipôle électrique oscillant ci-dessus. À cette fin, on utilise les équations de Maxwell (cf. début du § I-A), avec les sources  $\rho$  et  $\vec{j}$  précédentes. Il est pratique d'employer les outils de calcul annexes que sont les potentiels vecteur et scalaire; ils sont brièvement présentés au § suivant. Le calcul du rayonnement dipolaire est effectué au § 3.

(\*) On a  $\int dx \delta(x) = 1$ .

## 2) Potentiels vecteur et scalaire

a) Il est possible d'exprimer un champ électromagnétique  $\{\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t)\}$  en fonction de potentiels vecteur  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  et scalaire  $U(\vec{r}, t)$ , par les relations :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } U.$$

L'existence d'un potentiel vecteur  $\vec{A}$  satisfaisant la première équation ci-dessus, découle de l'équation de Maxwell  $\text{div } \vec{B} = 0$  (tout champ de vecteur à divergence nulle est un champ de rotationnel). La seconde équation de Maxwell indépendante des sources,  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , s'écrit alors  $\text{rot}(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$ , d'où l'existence d'un potentiel scalaire  $U$  satisfaisant la seconde équation ci-dessus (tout champ de vecteur à rotationnel nul est un champ de gradient).

Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  étant exprimés en fonction des potentiels, les deux dernières équations de Maxwell,  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  et  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , donnent

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U = \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} \right\} \quad \text{et}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{J} - \text{grad} \left\{ \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} \right\}$$

(où  $\Delta U = \text{div}(\text{grad } U)$  et  $\Delta \vec{A} = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \text{rot}(\text{rot } \vec{A})$ ;  $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$ ).

b) Les potentiels vecteur et scalaire ne sont pas définis de manière univoque. En effet, étant donné une fonction régulière quelconque  $\chi(\vec{r}, t)$ , il est immédiat de vérifier que les potentiels  $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \chi$  et  $U' = U - \frac{\partial \chi}{\partial t}$  correspondent au même champ électromagnétique que celui donné par  $\vec{A}$  et  $U$ . Un choix de potentiels  $\vec{A}$  et  $U$  correspond à une jauge particulière, et la liberté du choix de jauge permet d'imposer aux potentiels une contrainte conduisant à des propriétés mathématiques intéressantes.

La jauge utile dans ce §B est la jauge de Lorentz, dans laquelle  $\vec{A}$  et  $U$  satisfont

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} = 0.$$

Ce choix simplifie, en les découplant, les équations d'évolution de  $\vec{A}$  et  $U$ :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} .$$

Dans cette jauge,  $U(\vec{r}, t)$  ne dépend que de la densité volumique de charge  $\rho(\vec{r}, t)$ , et  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  que de la densité de courant  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ . Les équations ci-dessus ont pour solutions

$$U(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad \text{et} \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} .$$

Ces expressions, valables uniquement en jauge de Lorentz, possèdent une interprétation physique évidente: le potentiel en un point  $\vec{r}$  à l'instant  $t$  dépend de l'état des sources en tous les points de l'espace à des instants antérieurs  $t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ ; le temps correspondant à chaque point  $\vec{r}'$  est antérieur à  $t$  de l'intervalle correspondant à la propagation de  $\vec{r}'$  à  $\vec{r}$  avec la vitesse  $c$ .

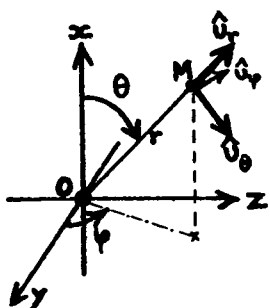
### 3) Structure du rayonnement dipolaire

a) Pour calculer le champ électromagnétique créé par le dipôle oscillant du §1, on emploie le potentiel vecteur  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  en jauge de Lorentz (cf. §2-b), avec la densité de courant  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  associée au dipôle (cf. §1). Il vient  $\vec{A}(\vec{r}, t) = \mathcal{P}_{\text{oe}} \{ \vec{j}_0(\vec{r}) e^{i\omega t} \}$

$$\text{avec} \quad \vec{j}_0(\vec{r}) = \hat{u}_{3c} \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j} \frac{\exp(-i k_0 r)}{r} \quad , \quad r = |\vec{r}| ,$$

où  $k_0 = \frac{\omega}{c}$ . Le champ magnétique rayonné vaut alors  $\mathcal{P}_{\text{oe}} \{ \vec{B}(\vec{r}) e^{i\omega t} \}$ , où

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j} \text{rot} \left\{ \frac{\exp(-i k_0 r)}{r} \hat{u}_{3c} \right\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j} \text{grad} \left( \frac{\exp(-i k_0 r)}{r} \right) \times \hat{u}_{3c} .$$



En coordonnées sphériques (cf. schéma ci-contre), on a

$$\text{grad} \left( \frac{\exp(-i k_0 r)}{r} \right) = \hat{u}_r \frac{d}{dr} \left( \frac{\exp(-i k_0 r)}{r} \right)$$

avec  $\hat{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$  le vecteur unitaire dirigé du dipôle vers le point

(\*) On utilise  $\text{rot}(\vec{r} \cdot \vec{V}) = \text{grad} \vec{r} \times \vec{V} + \vec{r} \text{rot} \vec{V}$ .

d'observation  $M$ . La dérivation par rapport à  $r$  de la fonction  $\frac{\exp(-ik_0 r)}{r}$  donne un terme en  $\frac{1}{r^2}$  (provenant du facteur  $\frac{1}{r}$ ), et un autre en  $\frac{k_0}{r} = \frac{2\pi}{\lambda_0 r}$  (qui provient de la fonction  $e^{-ik_0 r}$ ). On s'intéresse ici au champ électromagnétique rayonné à grande distance du dipôle oscillant,  $r \gg \lambda_0$ ; on ne conserve donc <sup>dans</sup> l'expression de  $\vec{B}(\vec{r})$  que le terme dominant ( $\vec{d}_0 = -\frac{i}{\omega}$ ) est l'amplitude complexe du dipôle, cf. §1):

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{-\mu_0}{4\pi c} \vec{d}_0 \omega^2 \frac{\exp(-ik_0 r)}{r} \sin\theta \hat{u}_\varphi \quad (r \gg \lambda_0).$$

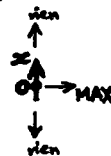
Pour calculer le champ électrique rayonné par le dipôle oscillant, il est certes possible d'employer l'expression  $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} U$  vue au §2-a, qui nécessite la détermination préliminaire du potentiel scalaire  $U(\vec{r}, t)$ . Cependant, le plus commode est d'utiliser l'équation de Maxwell  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , valable en tout point en dehors du lieu du dipôle. Le calcul de  $\text{rot} \vec{B}$  est effectué suivant la démarche utilisée <sup>précédemment</sup> pour évaluer  $\text{rot} \vec{A}$ ; en constatant, encore une fois, que le terme dominant à grande distance provient de la dérivation par rapport à  $r$  de la fonction  $\exp(-ik_0 r)$ , on trouve:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{-\mu_0}{4\pi} \vec{d}_0 \omega^2 \frac{\exp(-ik_0 r)}{r} \sin\theta \hat{u}_\theta \quad (r \gg \lambda_0).$$

b) L'onde électromagnétique rayonnée par le dipôle est à la pulsation  $\omega$ , et sa phase se propage radialement à la vitesse  $c$ ; cette onde est proportionnelle à l'amplitude d'oscillation du dipôle  $\vec{d}_0$ , ainsi qu'à  $\omega^2$ , elle est donc proportionnelle à l'accélération des charges oscillantes.

La structure de cette onde rayonnée à grande distance, possède les propriétés:

- (i) elle est localement une onde plane TEM, avec  $\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{u}_r \times \vec{E}(\vec{r}, t)$ ;
- (ii) elle est polarisée linéairement, suivant  $\hat{u}_\theta$  (en un point donné);
- (iii) elle est nulle dans la direction d'oscillation du dipôle ( $\theta = 0$  ou  $\pi$ ), et est d'amplitude maximale dans les directions perpendiculaires ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ).

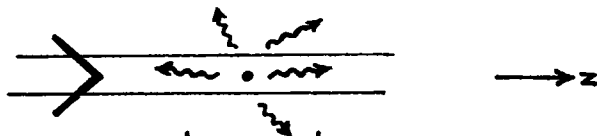


c) La dépendance en  $1/r$  de l'onde rayonnée est la signature que l'énergie électromagnétique est portée infiniment loin du dipôle: le vecteur de Poynting moyen  $\langle \vec{S} \rangle$



est proportionnel à  $\frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{u}_r$ , et son flux au travers de la sphère de centre 0 et de rayon  $r$ , est fini  $\left( \int_0^\pi 2\pi r^2 \sin \theta d\theta \times \frac{\sin^2 \theta}{r^2} = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) = \frac{8\pi}{3} \right)$ .

#### 4) Diffusion d'un faisceau lumineux



a) Un faisceau lumineux monochromatique, représenté par l'onde plane progressive  $\vec{E}_i(z,t) = \Re\{ \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \}$ , excite un atome (ou une molécule) situé en  $\vec{r}=0$ . Ainsi mis en mouvement, les électrons de cet atome rayonnent un champ électromagnétique dans tout l'espace. Dans le cas où l'onde lumineuse incidente est polarisée linéairement suivant  $x$  ( $\vec{E}_0 = E_0 \hat{u}_x$ ), l'onde diffusée peut être évaluée à l'aide des résultats du §3 précédent, où l'amplitude complexe  $\vec{d}_0$  du dipôle est à préciser.

Dans une description classique d'une résonance de l'atome, à la pulsation  $\omega_0$  proche de  $\omega$ , la position  $\delta_2(t)$  du barycentre des électrons atomiques obéit à l'équation dynamique:  $m \ddot{\delta}_2(t) = -m\omega_0^2 \delta_2(t) - m\gamma \dot{\delta}_2(t) + q \Re\{ \vec{E}_0 e^{i\omega t} \}$ ,  $q$  ( $< 0$ ) et  $m$  étant la charge et la masse totales des électrons, et  $\gamma$  ( $\ll \omega_0$ ) un taux d'amortissement fluide. En régime permanent, le dipôle  $d(t) = q \delta_2(t) = \Re\{ \vec{d}_0 e^{i\omega t} \}$  possède l'amplitude complexe

$$\vec{d}_0 = \frac{\left(\frac{q^2}{m}\right)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \vec{E}_0.$$

L'onde lumineuse diffusée par l'atome possède la structure décrite au §3-b, et son vecteur de Poynting moyen vaut

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c} \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^2 |\vec{d}_0|^2 \omega^4 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{u}_r.$$

Dans une direction donnée (autre que  $\theta=0$  ou  $\pi$ ), la dépendance de l'intensité lumineuse diffusée  $|\langle \vec{S} \rangle|$  en la pulsation  $\omega$  de l'onde incidente, est régie par le facteur  $|\vec{d}_0|^2 \omega^4$ . Pour les hautes pulsations ( $\omega \gg \omega_0$ , régime de diffusion Thomson<sup>(\*)</sup> d'électrons libres),  $|\langle \vec{S} \rangle|$  est indépendante de  $\omega$ . Pour les basses pulsations ( $\omega \ll \omega_0$ , diffusion Rayleigh<sup>(\*\*)</sup>), l'intensité de la diffusion varie comme  $\omega^4 \propto 1/\lambda_0^4$ ; c'est cette

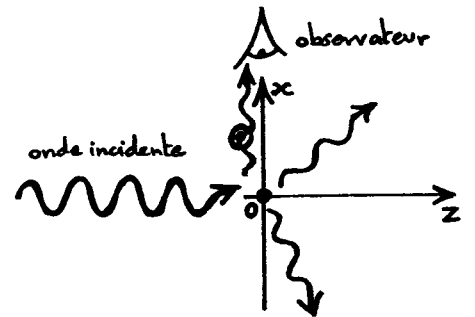
(\*) Joseph John Thomson (1856-1940), prix Nobel 1906.

(\*\*) John William Strutt, lord Rayleigh (1842-1919), prix Nobel 1904; diffusion Rayleigh: 1871.

propriété qui est à l'origine de la lumière bleue du ciel, et de la couleur rouge du soleil levant ou couchant. À résonance ( $\omega = \omega_0$ ), l'intensité diffusée est  $\frac{\omega_0^2}{r^2}$  fois plus grande que dans le régime  $\omega \gg \omega_0$  — typiquement,  $\omega_0^2/r^2 \sim 10^{45}$  (!).

b) Dans le cas où l'onde lumineuse incidente n'est pas polarisée linéairement, ses deux composantes  $\vec{E}_{0x}$  et  $\vec{E}_{0y}$  (cf. p. II-2) excitent deux dipôles linéaires suivant  $x$  et  $y$ , respectivement. Ces deux dipôles oscillants rayonnent deux champs électromagnétiques cohérents, dont la forme a été vue au §3; en tout point et à tout instant, l'onde lumineuse diffusée est la superposition de ces deux champs rayonnés.

Si la lumière diffusée est observée dans une direction passant par l'atome ( $\vec{r} = 0$ ) et orthogonale à l'axe  $z$  de propagation de l'onde incidente, on peut appeler  $x$  cet axe d'observation. Le dipôle oscillant suivant  $x$  ne rayonne alors pas vers l'observateur (cf. §3-b), et seule est observée la lumière diffusée en provenance du dipôle suivant  $y$ ; cette lumière est polarisée linéairement suivant  $y$ , ie orthogonalement à la fois à la direction de propagation de l'onde incidente et à la direction d'observation. Il est clair que cette propriété reste valable lorsque l'onde lumineuse incidente n'est pas polarisée<sup>(\*)</sup>; on peut d'ailleurs l'observer avec le bleu du ciel étudié dans une direction orthogonale à la direction de visée du soleil.



c) Une autre direction de diffusion remarquable est la direction suivant  $z$  (diffusion vers l'avant). En effet, on constate que dans cette direction, les deux contributions à la lumière diffusée, provenant des deux dipôles linéaires, s'ajoutent en ayant les mêmes amplitude et phase relatives que les composantes  $\vec{E}_{0x}$  et  $\vec{E}_{0y}$  de l'onde lumineuse incidente: la lumière diffusée vers l'avant possède la même polarisation que la lumière incidente.

Dans un solide cristallin, les nuages électroniques sont périodiquement disposés dans

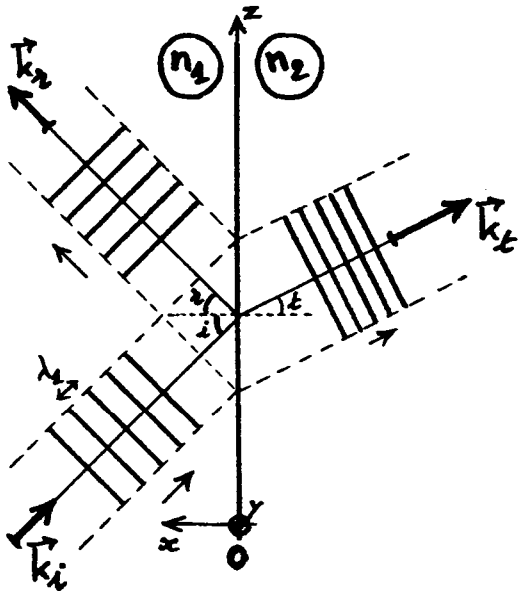
(\*) car aucune relation de phase entre  $\vec{E}_{0x}$  et  $\vec{E}_{0y}$  n'intervient dans le phénomène.

l'espace, en suivant les positions régulières des ions du cristal. Il s'avère que la superposition des ondes diffusées par ces nuages sous l'effet d'une onde lumineuse incidente, ne donne de contribution non nulle que vers l'avant, la lumière diffusée totale s'annulant par interférence destructive dans toute autre direction : un solide transparent parfaitement homogène ne diffuse pas de lumière.<sup>(\*)</sup> Cependant, tout défaut (écart à la périodicité spatiale)<sup>cristalline</sup> à l'intérieur du solide provoque de la diffusion dans toutes les directions, la structure de l'onde diffusée ayant les propriétés décrites précédemment.

## © Réflexion et réfraction

### 1) Introduction

a) On examine la réflexion et la réfraction d'un faisceau lumineux monochromatique sur un dioptre plan séparant deux milieux diélectriques linéaires, homogènes et isotropes, caractérisés par les indices de réfraction  $n_1$  et  $n_2$ . Ce faisceau incident se propage



dans le milieu d'indice de réfraction  $n_1$ ; il est représenté par une onde plane progressive monochromatique, ce qui est licite si l'on suppose que son diamètre est très grand devant la longueur d'onde  $\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{n_1} = \frac{2\pi}{n_1 k_0}$  dans le milieu ( $k_0 = \frac{\omega}{c}$ , où  $\omega$  est la pulsation optique). Le vecteur d'onde de l'onde incidente est  $\vec{k}_i$ , avec  $|\vec{k}_i| = n_1 k_0$ . L'axe normal  $x$  et  $\vec{k}_i$  sont dans le plan d'incidence

$zOx$ ; on a ainsi  $k_{iy} = 0$  et  $\begin{cases} k_{ix} = -n_1 k_0 \cos i \\ k_{iz} = n_1 k_0 \sin i, \end{cases}$

où  $i = (\hat{x}, \vec{k}_i)$  est l'angle d'incidence ( $0 < i < \frac{\pi}{2}$ ).

La présence du dioptre  $x=0$  donne naissance à un faisceau réfléchi dans le milieu 1 et à un faisceau réfracté, c'est-à-dire transmis dans le milieu 2. Les

(\*) La démonstration de cette propriété - d'ailleurs observable - se situe hors du cadre de ce cours.

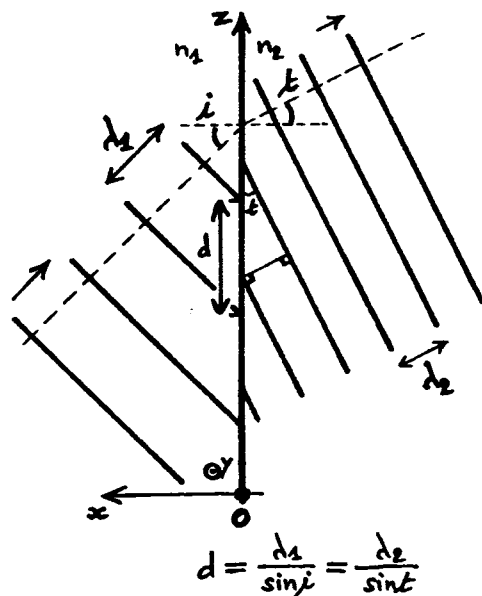
vecteurs d'onde des ondes réfléchi et réfracté sont respectivement  $\vec{k}_r$  et  $\vec{k}_t$ , avec  $|\vec{k}_r| = |\vec{k}_i| = n_1 k_0$  et  $|\vec{k}_t| = n_2 k_0$ . Les équations de Maxwell imposent des conditions aux limites sur le dioptre  $z=0$  (cf. § I-A-2-d). Par exemple, la composante <sup>tangentielle</sup> du champ électrique est continue :

$$\vec{E}_{0i\parallel} e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} + \vec{E}_{0r\parallel} e^{-i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} = \vec{E}_{0t\parallel} e^{-i\vec{k}_t \cdot \vec{r}},$$

où  $\vec{r} = y \hat{y} + z \hat{z}$  est un point quelconque du dioptre ;  $\vec{E}_{0i\parallel}$ ,  $\vec{E}_{0r\parallel}$  et  $\vec{E}_{0t\parallel}$  sont les projections sur le dioptre des enveloppes  $\vec{E}_i$ ,  $\vec{E}_r$  et  $\vec{E}_t$  des ondes incidente, réfléchi et réfracté. Cette relation de continuité impose  $k_{ry} = k_{ty} = k_{iy} = 0$  et  $k_{rz} = k_{tz} = k_{iz} = n_1 k_0 \sin i$ , égalités qui correspondent aux lois de Snell-Descartes <sup>(\*)</sup> :

- Les vecteurs d'onde réfléchi et réfracté sont dans le plan d'incidence.
- L'angle de réflexion  $r$  et l'angle de réfraction  $t$  sont tels que
 
$$r = i \quad \text{et} \quad n_1 \sin i = n_2 \sin t.$$

b) Ainsi, la simple existence de conditions aux limites suivies par le champ électromagnétique sur le dioptre, suffit à imposer les lois de Snell-Descartes. En effet, elles indiquent naturellement que l'onde réfracté ait sur le dioptre, à un instant donné, la même périodicité spatiale que celle de l'onde incidente, c'est-à-dire une invariance suivant  $y$  et une période  $\lambda_2 / \sin i$  suivant  $z$  ; la première condition donne la direction de propagation de l'onde réfracté dans le plan d'incidence, et la seconde fournit  $\frac{\lambda_1}{\sin i} = \frac{\lambda_2}{\sin t}$ , où  $\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{n_2}$  est la longueur d'onde dans le milieu 2, ce qui est la relation  $n_1 \sin i = n_2 \sin t$ . Les lois pour la réflexion se trouvent avec un raisonnement semblable.



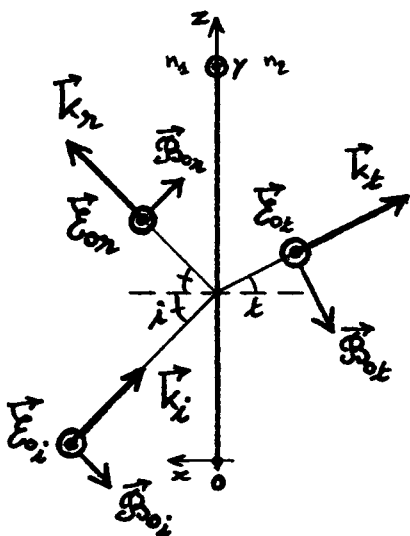
(\*) Les lois de réflexion/réfraction de la lumière ont été découvertes par Willebrord Snell (1580-1626) en 1620, puis par René Descartes (1596-1650) en 1637. Et avant par Ibn Sahl en 985 (Pour la Science, nov. 2002).

## 2) Coefficients de Fresnel (\*)

Si la simple existence des conditions aux limites sur le dioptre implique les lois de Snell-Descartes (cf. § 1 précédent), leurs écritures explicites permettent d'achever la détermination des ondes lumineuses réfléchie et réfractée, par l'expression des enveloppes  $\vec{E}_{0r}$  et  $\vec{E}_{0t}$  en fonction de  $\vec{E}_{0i}$ . Il est utile d'étudier séparément le cas où la lumière incidente est polarisée linéairement dans la direction perpendiculaire au plan d'incidence (polarisation dite "s", de l'allemand senkrecht: perpendiculaire), et celui où elle est linéairement polarisée dans une direction parallèle au plan d'incidence (polarisation dite "p", de l'allemand parallel: parallèle); en effet, toute onde incidente se décompose sur les deux états de polarisation s et p, et l'onde réfléchie (ou réfractée) est alors obtenue par la superposition des deux ondes réfléchies (ou réfractées) qui sont dues aux deux composantes s et p de la lumière incidente.

a) Dans le cas d'une onde incidente polarisée s, la continuité de la composante tangentielle du champ électrique sur le dioptre s'écrit, avec  $\vec{E}_{0i} = E_{0i} \hat{y}$ ,  $\vec{E}_{0r} = E_{0r} \hat{y}$  et  $\vec{E}_{0t} = E_{0t} \hat{y}$  :

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}.$$



En l'absence de charges libres sur le dioptre, il ne s'y trouve pas de courant libre surfacique, et la composante tangentielle du champ magnétique est continue :

$$-n_1 E_{0i} \cos i + n_1 E_{0r} \cos i = -n_2 E_{0t} \cos t,$$

où l'on a utilisé  $\vec{B}_{0i} = \frac{\vec{k}_i}{\omega} \times \vec{E}_{0i} = \frac{n_1}{c} E_{0i} \frac{\vec{k}_i}{|\vec{k}_i|} \times \hat{y}$  et des relations similaires pour les ondes réfléchie et réfractée (cf. § I-C-2).

Les deux équations ci-dessus conduisent aux expressions suivantes des coefficients

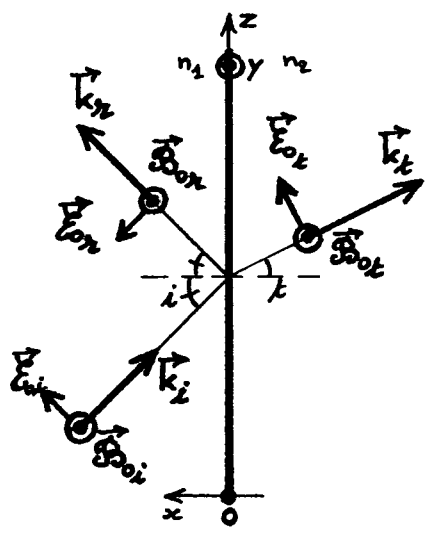
(\*) Augustin Fresnel (1788-1827) a été le premier à étudier, en 1817, la réflexion/réfraction de la lumière polarisée.

de réflexion  $r_s = \frac{\epsilon_{0x}}{\epsilon_{0i}}$  et de réfraction  $t_s = \frac{\epsilon_{0t}}{\epsilon_{0i}}$  en amplitude :

$$r_s = \frac{n_2 \cos i - n_1 \cos t}{n_2 \cos i + n_1 \cos t}, \quad t_s = 1 + r_s.$$

Pour la simplicité de la dérivation de ces coefficients, on a considéré d'emblée que les ondes réfléchi et réfracté étaient polarisées s ; en effet, si on leur suppose des composantes p, la démarche précédente montre qu'elles sont nulles. Par ailleurs, on peut remarquer qu'une condition aux limites n'a pas été utilisée, celle de la continuité de la composante normale du champ magnétique ; en fait, il est facile de vérifier que cette condition fournit la même équation que celle donnée par la continuité de la composante tangentielle du champ électrique.

b) Dans le cas d'une onde incidente polarisée p, la continuité de la composante tangentielle du champ électrique :



$$\epsilon_{0i} \cos i - \epsilon_{0r} \cos i = \epsilon_{0t} \cos t,$$

et celle de la composante tangentielle du champ magnétique :

$$n_1 \epsilon_{0i} + n_1 \epsilon_{0r} = n_2 \epsilon_{0t},$$

conduisent aux coefficients de réflexion et de réfraction en amplitude suivants :

$$r_p = \frac{n_2 \cos i - n_1 \cos t}{n_2 \cos i + n_1 \cos t}, \quad t_p = \frac{n_1}{n_2} (1 + r_p).$$

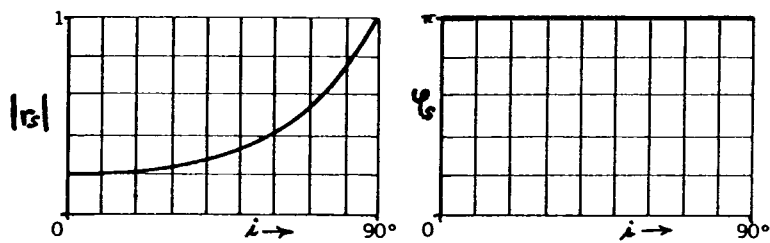
(La continuité de la composante normale du vecteur  $\vec{D}$  fournit la même équation que celle donnée par la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique.)

### 3) Réflexion en polarisation s

a) Lorsque  $n_1 < n_2$  (le milieu 1 est moins réfringent que le milieu 2), on a  $t < i$  et donc  $\cos t > \cos i$  : le coefficient  $r_s$  est réel négatif, quel que soit l'angle d'incidence  $i$ . Le module  $|r_s|$  et l'argument  $\varphi_s$  de  $r_s = |r_s| e^{i\varphi_s}$

sont représentées sur les figures ci-dessous.  $|r_s|$  vaut  $\frac{n_2 - n_1}{n_2 + 1}$  en incidence normale

( $i=0$ ), et croît jusqu'à 1 à la limite de l'incidence rasante ( $i \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ); dans cette limite,  $t_s = 1 + r_s \rightarrow 0$ : il n'y a



plus d'onde réfractée ( $\vec{E}_{0z} \approx -\vec{E}_{0i}$ ,  $\vec{E}_{0t} \approx 0$ ).

b) Lorsque  $n_1 > n_2$ , on a  $t > i$ :  $r_s$  est réel positif pour les angles d'incidence inférieurs à l'angle d'incidence critique  $i_c$ , tel que  $\sin i_c = \frac{n_2}{n_1}$  (à l'incidence critique, l'angle de réfraction vaut  $\frac{\pi}{2}$ ).  $|r_s|$  démarre à  $\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$  pour  $i=0$ , et

atteint 1 pour  $i = i_c$ .

Pour  $i > i_c$ , la valeur de  $\cos t$ , fixée par  $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t = \dots = 1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 i$ , est imaginaire

pour:  $\cos t = -i \frac{n_1}{n_2} \eta(i)$ , avec  $\eta(i) = (\sin^2 i - \sin^2 i_c)^{1/2}$ . Le coefficient de réflexion est alors  $r_s = (\cos i + i\eta(i)) / (\cos i - i\eta(i))$ :  $|r_s| = 1$  et  $\varphi_s$  est donné par

$$0 < \varphi_s < \pi, \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi_s}{2} = \frac{\eta(i)}{\cos i} = \sqrt{\frac{\cos^2 i_c}{\cos^2 i} - 1}.$$

Ainsi, pour  $i > i_c$ ,  $|\vec{E}_{0z}|^2 = |\vec{E}_{0i}|^2$  et toute la puissance lumineuse du faisceau incident se retrouve dans le faisceau réfléchi; on est donc dans une situation de réflexion totale. Cependant, le coefficient de réfraction  $t_s = 1 + e^{i\varphi_s}$  est non nul, ce qui implique  $\vec{E}_{0t} \neq 0$  et l'existence d'une onde optique dans le milieu 2.

Dans le cas où la réflexion est totale ( $i > i_c$ ), la lumière réfractée possède un vecteur d'onde, situé dans le plan d'incidence, dont les composantes sont

$k_{tz} = k_{iz} = n_2 k_0 \sin i$  et  $k_{tx} = -n_2 k_0 \cos t = +i n_2 k_0 \eta(i)$ . L'amplitude complexe du champ électrique de l'onde réfractée dans le milieu 2 ( $x < 0$ ) prend

alors la forme:

$$\vec{E}_t(z, x) = \vec{E}_{0t} \hat{u}_y e^{-i\vec{k}_t \cdot \vec{r}} = \vec{E}_{0t} \hat{u}_y e^{n_2 k_0 \eta(i) x} e^{-i n_2 k_0 \sin i z}.$$

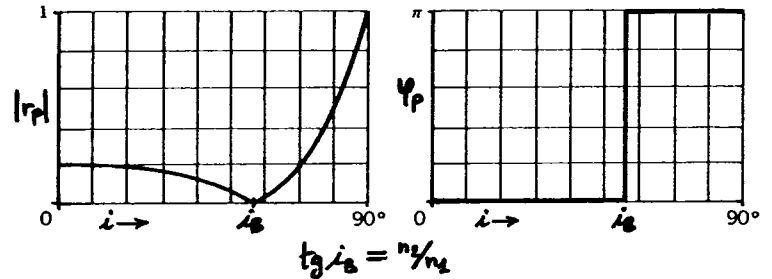
Cette onde se propage suivant les  $z$  croissants, parallèlement au dioptre, avec la vitesse de phase  $v_{pz} = \frac{\omega}{n_2 k_0 \sin i} = \frac{c}{n_2} \frac{1}{\sin i}$ . L'onde possède en outre un caractère évanescent<sup>(\*)</sup> suivant les  $x$  décroissants, en s'éloignant normalement du dioptre, avec une épaisseur caractéristique  $[\frac{1}{n_2 k_0 \eta(i)}]^{-1}$  d'autant plus importante que l'angle d'incidence  $i$  est proche de  $i_c$ .

#### 4) Réflexion en polarisation p

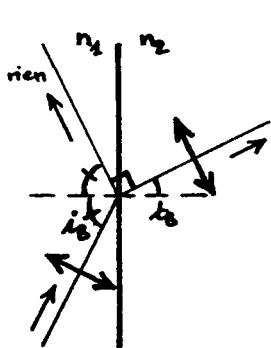
a) Lorsque  $n_1 < n_2$ , le coefficient de réflexion  $r_p = (n_2 \cos i - n_1 \cos t) / (n_2 \cos i + n_1 \cos t)$  est réel. Il part de la valeur positive  $\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$  en incidence normale, décroît et s'annule en changeant de signe à l'incidence de Brewster<sup>(o)</sup>  $i_B$  telle que  $n_2 \cos i_B = n_1 \cos t_B$ , et enfin atteint  $-1$  à l'incidence rasante.

$$r_p = |r_p| e^{i\varphi_p}$$

L'élimination des indices de réfraction entre la relation définissant l'angle d'incidence de Brewster et la seconde loi de Snell-Descartes pour



la réfraction, conduit à  $\sin 2i_B = \sin 2t_B$ , c'est-à-dire  $i_B + t_B = \frac{\pi}{2}$ . Cette égalité signifie que la direction attendue de l'onde réfléchie coïncide avec la direction de polarisation de l'onde réfractée. L'origine physique de l'annulation



de l'onde réfléchie est alors claire : l'onde réfléchie dans le milieu 1, qui est fabriquée par le rayonnement des dipôles microscopiques du dioptre, est nulle quand son vecteur d'onde est dans la direction d'oscillation de ces dipôles (cf. § B-3-b).

La propriété qu'une onde p à l'incidence de Brewster ne soit pas réfléchie, a pour conséquence qu'une lumière<sup>quelconque</sup> à l'incidence de Brewster produit une réflexion polarisée s (effet facilement observable avec une vitre).

(o) David Brewster (1781-1868); incidence de Brewster : 1818.

(\*) L'autre détermination de  $\cos t$  ( $+i \frac{n_1}{n_2} \eta(i)$ ) est à écarter car elle fournit une onde lumineuse réfractée croissant exponentiellement avec l'éloignement au dioptre.



b) Lorsque  $n_1 > n_2$ , le coefficient de réflexion  $r_p$  s'annule en changeant de signe à l'incidence de Brewster

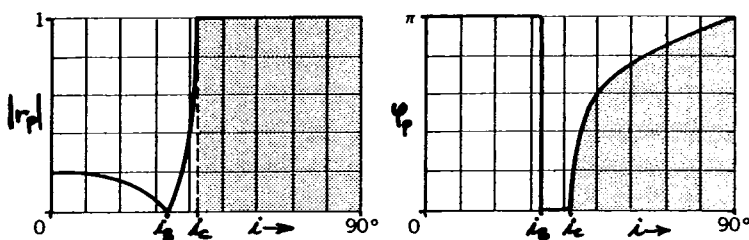
$i_B = \text{Arctg} \frac{n_2}{n_1}$  (effet caractéristique de la polarisation p).

Pour des angles d'incidence supérieurs à l'incidence critique  $i_c = \text{Arcsin} \frac{n_2}{n_1}$  ( $i_c > i_B$ ), la réflexion est totale,  $|r_p| = 1$  (effet caractéristique de la situation  $n_1 > n_2$ );

la même démarche que celle du § 3-b donne  $r_p = (n_2^2 \cos i + i n_1^2 \eta(i)) / (n_2^2 \cos i - i n_1^2 \eta(i))$ ,

soit  $r_p = e^{i\varphi_p}$  avec

$$0 < \varphi_p < \pi, \quad \text{tg} \frac{\varphi_p}{2} = \frac{1}{\sin^2 i_c} \sqrt{\frac{\cos^2 i_c}{\cos^2 i} - 1}.$$



### 5) Réflexion et réfraction de la puissance lumineuse incidente

a) Le vecteur de Poynting moyen associé à l'onde lumineuse incidente vaut

$$\langle \vec{S}_i \rangle = \frac{1}{2\mu_0} |\vec{\mathcal{E}}_i|^2 \frac{\vec{k}_i}{\omega} = \frac{n_1}{2\mu_0 c} |\vec{\mathcal{E}}_i|^2 \frac{\vec{k}_i}{|\vec{k}_i|} \quad (\text{cf. § I-C-2-c}),$$

où  $\vec{\mathcal{E}}_i$  est l'enveloppe complexe du champ électrique polarisé linéairement s ou p. La puissance lumineuse

du faisceau incident est donc  $P_i = \frac{n_1}{2\mu_0 c} |\vec{\mathcal{E}}_i|^2 A_1$ ,  $A_1$  étant l'aire de la section droite du faisceau. Les puissances lumineuses des faisceaux réfléchis et réfractés ont des formes semblables :

$$P_r = \frac{n_1}{2\mu_0 c} |\vec{\mathcal{E}}_r|^2 A_1, \quad P_t = \frac{n_2}{2\mu_0 c} |\vec{\mathcal{E}}_t|^2 A_2.$$

Le coefficient de réflexion de la puissance lumineuse est

$$R = P_r / P_i = |\vec{\mathcal{E}}_r|^2 / |\vec{\mathcal{E}}_i|^2, \quad \text{soit:}$$

$$R = |r|^2,$$

avec  $r = r_s$  ou  $r = r_p$  suivant la polarisation s ou p de l'onde incidente. Dans

le cas particulier de l'incidence normale ( $i = t = 0$ ), on a (\*)  $r_s = -r_p = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ ,

d'où  $R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$  indépendamment de la polarisation; par exemple, à la

frontière entre l'espace libre ( $n_1 = 1$ ) et le verre ( $n_2 = 1,5$ ),  $R \approx 0,04$ , de

telle sorte que 4% de la lumière est réfléchi sur une vitre en incidence normale

(en fait 8%, en tenant compte du second dioptre verre-air). En dehors de

(\*) La différence de signe entre  $r_s$  et  $r_p$  en incidence normale, provient de la convention d'orientation des champs électriques des ondes s ou p (cf. les figures des §§ 2-a et 2-b).

l'incidence normale,  $R_s = |r_s|^2$  et  $R_p = |r_p|^2$  différent ; notamment,  $R_p = 0$  à l'incidence de Brewster, alors que  $R_s$  ne s'annule jamais.

De son côté, le coefficient de réfraction en puissance s'écrit  $T = \frac{P_t}{P_i} = \dots = \frac{n_2}{n_1} \frac{|\vec{E}_t|^2}{|\vec{E}_i|^2} \frac{A_2}{A_1}$ . Comme  $A_1 = A_0 \cos i$  et  $A_2 = A_0 \cos t$ , où  $A_0$  est l'aire de la surface du dioptre éclairée par le faisceau incident, il vient finalement:

$$T = \frac{n_2 \cos t}{n_1 \cos i} |t|^2 \quad (\cos t \text{ réel}),$$

avec  $t = t_s$  ou  $t = t_p$  suivant la polarisation s ou p de l'onde incidente. Par conservation de l'énergie lumineuse, on doit avoir  $P_i = P_r + P_t$ , soit  $R + T = 1$  (pour une polarisation s ou p donnée). Dans le cas où l'angle d'incidence est supérieur à  $i_c = \text{Arccos} \frac{n_2}{n_1}$ , dans une situation où  $n_1 > n_2$ , on a  $R = 1$  et  $T = 0$ .

b) Dans une description en termes de photons<sup>(\*)</sup>, la puissance lumineuse du faisceau incident s'écrit  $P_i = \hbar \omega \Phi_i$ , où  $\hbar \omega = h\nu$  est l'énergie<sup>(\*\*)</sup> d'un photon et  $\Phi_i$  le débit de photons dans le faisceau, c'est-à-dire le nombre moyen des photons qui traversent une section droite par unité de temps. Les débits de photons  $\Phi_r$  et  $\Phi_t$  des faisceaux réfléchis et réfractés sont alors donnés par

$$\frac{\Phi_r}{\Phi_i} = R \quad \text{et} \quad \frac{\Phi_t}{\Phi_i} = T.$$

Un photon<sup>incident</sup> ne pouvant pas se fractionner sur le dioptre, il est clair que le coefficient R (resp. T) est la probabilité qu'un photon de l'onde incidente soit envoyé dans l'onde réfléchie (resp. réfractée) lorsqu'il rencontre le dioptre. Il est à noter que ces probabilités ont été calculées dans un cadre ondulatoire, celui de l'optique électromagnétique.

(\*) Le terme de photon a commencé à être employé à partir des années 1920, pour désigner les grains de lumière découverts en 1905 par Albert Einstein (1879-1955), prix Nobel 1921.

(\*\*) Max Planck (1858-1947), prix Nobel 1918, est le découvreur, en 1899, de la constante  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  qui porte son nom ( $\hbar = h/2\pi$ ).

La figure non manuscrite de la page II-7 est extraite de :

Yariv, Yeh Optical Waves in Crystals (Wiley, 1984).

Toutes les autres figures non manuscrites de ce chapitre sont tirées de :

Salch, Teich Fundamentals of Photonics (Wiley, 1991).

# INTRODUCTION À LA PHOTONIQUE

## Exercices II

1) Quelles polarisations? Discuter l'état de polarisation d'une onde plane monochromatique se propageant suivant l'axe  $z$  dans l'espace libre, lorsque les composantes transverses du champ électrique sont ( $k_0 = \frac{\omega}{c}$ ):

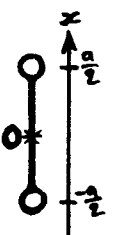
$$a) \begin{cases} E_x(z,t) = \frac{1}{2} E_0 \cos(\omega t - k_0 z) \\ E_y(z,t) = \frac{\sqrt{3}}{2} E_0 \sin(\omega t - k_0 z) \end{cases}; \quad b) \begin{cases} E_x(z,t) = E_0 \cos(\omega t - k_0 z) \\ E_y(z,t) = \frac{1}{2} E_0 \cos(\omega t - k_0 z + \pi) \end{cases};$$

c)  $\begin{cases} E_x(z,t) = E_0 \cos(\omega t - k_0 z) \\ E_y(z,t) = -E_0 \sin(\omega t - k_0 z) \end{cases}$ . Dans chacun des cas a), b) et c), on précisera l'amplitude complexe  $\vec{E}(z)$  associée à l'onde.

2) Superposition de deux ondes linéaires co-propageantes. Deux ondes planes, de même pulsation  $\omega$ , se propagent dans l'espace libre suivant l'axe  $z$ . Leurs polarisations sont linéaires, leurs enveloppes respectives étant  $\Sigma_0 \hat{u}_x$  d'une part et  $\Sigma'_0 (\cos \theta \hat{u}_x + \sin \theta \hat{u}_y)$  d'autre part. Écrire le champ électrique résultant de la superposition de ces deux ondes, puis le vecteur de Poynting moyenné sur le temps. Discuter les cas  $\theta = 0$  (que se passe-t-il si  $\Sigma'_0 = -\Sigma_0$ ?) et  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

3) Superposition de deux ondes linéaires contra-propageantes. Deux ondes planes, de même pulsation  $\omega$ , se propagent dans l'espace libre, l'une suivant les  $z$  croissants, l'autre suivant les  $z$  décroissants. Décrire l'onde résultante si les deux ondes ont la même enveloppe  $\Sigma_0 \hat{u}_x$ , ou si l'une a pour enveloppe  $\Sigma_0 \hat{u}_x$  et l'autre  $\Sigma_0 \hat{u}_y$ .

4) Rayonnement du dipôle de Hertz. En 1888, Heinrich Hertz (1857-1894) a prouvé le caractère propageant des ondes électromagnétiques du domaine radio en utilisant un dipôle oscillant macroscopique, constitué par un courant électrique oscillant suivant une tige métallique rectiligne terminée par des sphères en métal. L'intensité du courant, compris entre  $x = -\frac{a}{2}$  et  $x = +\frac{a}{2}$ ,



vaut  $I(t) = I_0 \cos \omega t$ . Montrer que, en jauge de Lorentz (cf. exercice I-3 et § II-B-2), l'amplitude complexe du potentiel vecteur est

$$\vec{A}(\vec{r}) = \hat{u}_x \frac{\mu_0}{4\pi r} I_0 a \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \quad (k_0 = \frac{\omega}{c})$$

pour  $r \gg a$  et  $k_0 a \ll 1$ . En déduire le champ magnétique puis le champ électrique rayonnés<sup>(\*)</sup> par le dipôle de Hertz. Examiner la polarisation de l'onde électromagnétique rayonnée, ainsi que sa structure. [<sup>(\*)</sup> à grande distance:  $r \gg \lambda_0$ ]

5) Fenêtre de Brewster. Une onde optique polarisée p est envoyée sur une lame d'un milieu transparent, d'indice de réfraction  $n$ , sous incidence de Brewster  $i_B = \text{Arctg} n$ . Vérifier que cette onde ne subit aucune réflexion, ni à la première interface air-milieu ni à la deuxième, milieu-air.

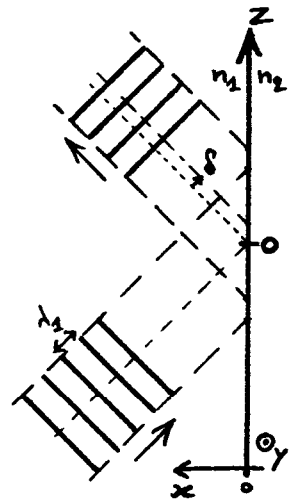
6) Décalage de Goos-Hänchen. Un faisceau lumineux dans un milieu 1 (indice de réfraction  $n_1$ ) est envoyé sur un dioptre plan  $x=0$  entre le milieu 1 et un milieu 2 d'indice de réfraction  $n_2$ ,  $n_2 < n_1$ . L'angle d'incidence  $i$  du faisceau est plus grand que l'angle d'incidence critique  $i_c = \text{Arcsin} \frac{n_2}{n_1}$ , et la réflexion est totale. Ce faisceau incident, polarisé s, possède le champ électrique:

$$E_y^i(z, x, t) = E_0 \int_{i-\varepsilon}^{i+\varepsilon} d\theta \exp[i(\omega t + k_1 \cos\theta x - k_1 \sin\theta z)],$$

$k_1 = n_1 \frac{\omega}{c}$ ; ce faisceau a une extension transverse  $\frac{\pi}{k_1 \varepsilon} = \frac{\lambda_1}{2\varepsilon}$

(cf. exercice I-5). Écrire le champ électrique  $E_y^r(z, x, t)$  du faisceau réfléchi, en faisant intervenir le coefficient de réflexion  $r_s(\theta) = \exp(i\varphi_s(\theta))$  d'une onde plane polarisée s ayant l'angle d'incidence  $\theta$ ,  $\theta > i_c$ . Montrer que, sur le dioptre, le faisceau réfléchi a son maximum d'amplitude décalé par rapport à celui du faisceau incident; en déduire que le décalage  $\delta$  de la figure vaut:

$$\delta = \frac{\lambda_1}{2\pi} \left. \frac{d\varphi_s}{d\theta} \right|_{\theta=i}$$



## INTRODUCTION À LA PHOTONIQUE

III - Milieux anisotropes I: lames optiques

Dans un milieu linéaire, homogène et isotrope, la densité de polarisation du milieu  $\vec{P}(\vec{r}, t)$ , au point  $\vec{r}$  et à l'instant  $t$ , est proportionnelle au champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  régnant au même point et au même instant:  $\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi \vec{E}(\vec{r}, t)$ , où la susceptibilité électrique  $\chi$  est une constante réelle positive, sans dimension. Cette équation relie instantanément  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , et est valable pour des fréquences optiques appartenant aux fenêtres de transparence du milieu ( $\chi$  étant différente d'une fenêtre à l'autre). Dans un milieu caractérisé par une telle relation, peuvent se propager des ondes électromagnétiques planes monochromatiques, de champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}\{ \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - n k_0 \hat{u} \cdot \vec{r})] \}$ ,  $k_0 = \frac{\omega}{c}$ , où  $\hat{u}$  est le vecteur unitaire suivant la direction et le sens de la propagation,  $\omega$  la pulsation optique, et  $n = \sqrt{1 + \chi}$  l'indice de réfraction du milieu (cf. §§ I-B-1 et I-C-2); l'enveloppe complexe  $\vec{E}_0$ , orthogonale à  $\hat{u}$  ( $\hat{u} \cdot \vec{E}_0 = 0$ ), définit l'état de polarisation de l'onde lumineuse (cf. § II-A).

La première nouveauté d'un milieu anisotrope, par ailleurs linéaire et homogène, est qu'il est caractérisé par une relation constitutive plus subtile que la précédente:

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 [\chi] \vec{E}(\vec{r}, t),$$

soit  $P_i(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} E_j(\vec{r}, t)$  dans un repère cartésien  $xyz$  donné (les indices 1, 2 et 3 se réfèrent aux composantes suivant  $x$ ,  $y$  et  $z$ , respectivement).

Dans la relation ci-dessus, chaque composante  $i=1, 2$  ou  $3$  de la densité de polarisation  $\vec{P}$  est une combinaison linéaire des composantes du champ électrique  $\vec{E}$ ; les constantes  $\chi_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 3$ ) sont les neuf composantes du tenseur de susceptibilité électrique  $[\chi]$  dans le repère cartésien  $xyz$ . En général,  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  ne sont pas parallèles dans un milieu anisotrope; comme on va le voir dans ce chapitre,  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  ne sont alignés que si le champ électrique est suivant l'un des trois

axes principaux attachés au milieu, ces axes principaux étant orthogonaux deux à deux.

Dans un milieu linéaire, homogène et anisotrope, par exemple dans un cristal transparent, la propagation d'une onde plane monochromatique est délicate à analyser dans le cas général; aussi cette analyse est-elle reportée au chapitre IV suivant. Dans le présent chapitre, après une introduction aux milieux anisotropes (§A), est présenté le cas particulier où la propagation de la lumière se fait dans la direction d'un axe principal du milieu (§B). C'est dans cette configuration que se propage la lumière à l'intérieur d'une lame optique, qui est une tranche à faces parallèles d'un cristal anisotrope taillé orthogonalement à l'un de ses axes principaux. On verra que la polarisation de la lumière traversant une lame, évolue continûment au cours de la propagation. C'est pourquoi le contrôle précis de l'épaisseur des lames optiques, permet d'obtenir des outils de manipulation de la polarisation d'une lumière se propageant dans l'espace libre; des exemples de telles manipulations sont exposés au §C.

## A) Axes et indices de réfraction principaux

### 1) Tenseur diélectrique

a) Dans un milieu diélectrique linéaire, homogène et anisotrope, chaque composante cartésienne  $P_i(\vec{r}, t)$  ( $i=1, 2, 3$ ) de la densité de polarisation du milieu, est une combinaison linéaire des composantes cartésiennes du champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ :

$$P_i(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} E_j(\vec{r}, t),$$

où  $i, j = 1, 2, 3$  désignent les composantes suivant  $x, y, z$ , respectivement; les  $\chi_{ij}$  sont les composantes du tenseur de susceptibilité électrique du milieu. Les relations précédentes expriment la linéarité du milieu, son caractère homogène étant inclus dans le fait que les constantes  $\chi_{ij}$  sont indépendantes de l'espace.

La relation constitutive du milieu est souvent notée, de manière condensée,  $\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 [\chi] \vec{E}(\vec{r}, t)$  — ou encore  $\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \underline{\chi} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$ . Elle est valable sur une fenêtre de transparence du milieu, c'est-à-dire sur un intervalle de fréquences optiques pour lesquelles le milieu n'absorbe pas.

b) Dans un tel milieu, le vecteur  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  s'exerime en fonction du champ électrique sous la forme :

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 [\epsilon_r] \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \text{où } [\epsilon_r] = \mathbf{1} + [\chi]$$

est le tenseur de permittivité diélectrique relative, dit aussi plus brièvement tenseur diélectrique. Dans un repère cartésien donné, ses composantes sont  $\epsilon_{rij} = \delta_{ij} + \chi_{ij}$  ( $\delta_{ij} = 1$  si  $i=j$ ,  $= 0$  sinon) et il est représenté par la matrice  $3 \times 3$  suivante :

$$[\epsilon_r] = \begin{bmatrix} \epsilon_{r11} & \epsilon_{r12} & \epsilon_{r13} \\ \epsilon_{r21} & \epsilon_{r22} & \epsilon_{r23} \\ \epsilon_{r31} & \epsilon_{r32} & \epsilon_{r33} \end{bmatrix}.$$

Sur des bases énergétiques, on peut montrer<sup>(\*)</sup> — on l'admettra dans ce cours — que le tenseur diélectrique est symétrique dans tout repère cartésien :

$$\epsilon_{rij} = \epsilon_{rji}.$$

Dans tout repère cartésien, le tenseur diélectrique  $[\epsilon_r]$  est donc représenté par une matrice  $3 \times 3$  symétrique. Une conséquence mathématique immédiate de cette propriété est qu'il existe un repère cartésien  $xyz$  dans lequel le tenseur diélectrique est diagonal :

$$[\epsilon_r] = \begin{bmatrix} \epsilon_{r1} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{r2} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{r3} \end{bmatrix}.$$

(\*) Voir, par exemple : Juretschke Cystal Physics (Benjamin, 1974)

ou Yariv, Yeh Optical Waves in Crystals (Wiley, 1984).



Ces axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  particuliers sont les axes principaux du milieu, et les constantes ( $> 1$ )  $\epsilon_{r1}$ ,  $\epsilon_{r2}$  et  $\epsilon_{r3}$  qui leur sont associées sont les constantes diélectriques principales. Dans les axes principaux, le vecteur  $\vec{D}$  est relié au champ électrique par :

$$D_1(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon_{r1} E_1(\vec{r}, t), \quad D_2(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon_{r2} E_2(\vec{r}, t), \quad D_3(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon_{r3} E_3(\vec{r}, t).$$

On définit également les indices de réfraction principaux du milieu, par :

$$n_j = \sqrt{\epsilon_{rj}}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Ainsi, dans les axes principaux  $x$ ,  $y$  et  $z$ , liés au milieu considéré, le tenseur diélectrique  $[\epsilon_r]$  de ce milieu est caractérisé par trois nombres réels, qui sont les trois indices de réfraction principaux  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n_3$ , respectivement. Les axes principaux dénotent les directions du milieu pour lesquelles le vecteur  $\vec{D}$  et le champ électrique sont parallèles ; par exemple, si  $\vec{E}$  est suivant l'axe principal  $x$ , alors  $\vec{D}$  l'est aussi (ainsi que  $\vec{P}$ ). La simplicité de la description des propriétés optiques d'un milieu dans le repère cartésien des axes principaux, conduit à utiliser systématiquement ces axes pour étudier la propagation de la lumière dans un milieu diélectrique anisotrope. Les axes principaux seront toujours notés  $x$ ,  $y$  et  $z$  dans la suite de ce cours.

## 2) Milieux isotropes, uniaxiaux ou biaxiaux

a) Dans un milieu optiquement isotrope, les trois indices de réfraction principaux sont égaux :  $n_1 = n_2 = n_3 = n$ , et le tenseur diélectrique d'un tel milieu est scalaire :

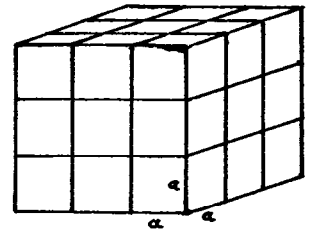
$$[\epsilon_r] = n^2 \mathbb{1},$$

c'est-à-dire qu'il prend la forme

$$[\epsilon_r] = \begin{bmatrix} n^2 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 \end{bmatrix}$$

dans tout repère cartésien. Un tel milieu possède les propriétés optiques présentées aux §§ I-B-1 et I-C-2, et brièvement rappelés dans l'introduction de ce chapitre (cf p. III-1).

Les milieux optiquement isotropes sont les gaz, les liquides et les solides amorphes, dans lesquels les molécules constitutives sont à des positions aléatoires dans l'espace, et sont elles-mêmes isotropes ou orientées dans des directions aléatoires. Sont également optiquement isotropes les solides cristallins appartenant au système cubique, c'est-à-dire ceux dont le squelette de la structure cristalline est fait des arêtes de cubes empilés les uns sur les autres.



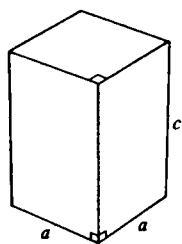
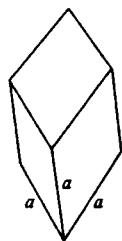
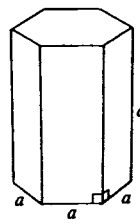
système cubique

b) Dans les milieux optiquement uniaxiaux, deux indices de réfraction principaux sont égaux et différents du troisième :  $n_1 = n_2 \neq n_3$ . L'axe principal ainsi distingué est l'axe optique  $z$ , et est repéré sur les schémas par le symbole  $\longleftrightarrow$ . L'indice de réfraction associé à l'axe optique est appelé indice de réfraction principal extraordinaire, et est noté  $n_3 = n_e$ . Les indices de réfraction associés aux axes principaux  $x$  et  $y$ , correspondent à l'indice de réfraction principal ordinaire, et sont notés  $n_1 = n_2 = n_o$ . Le tenseur diélectrique d'un milieu uniaxial s'écrit donc

$$[\epsilon_r] = \begin{bmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{bmatrix}$$

dans le repère cartésien de ses axes principaux  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Le milieu est dit positif si  $n_e > n_o$ , et négatif si  $n_e < n_o$ .

Les milieux cristallins appartenant aux systèmes tétragonal, trigonal ou hexagonal, sont optiquement uniaxiaux; leur structure cristalline possède un squelette formé de l'empilement jointif des formes représentées ci-après. Les cristaux liquides forment également des milieux uniaxiaux: leurs molécules allongées,

système  
tétragonalsystème  
trigonalsystème  
hexagonalcristal  
liquide

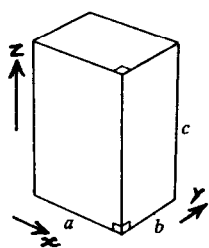
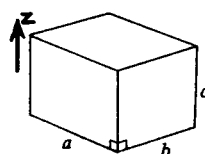
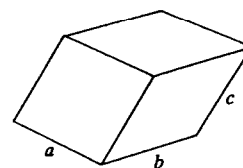
tout en ayant des positions aléatoires, sont orientées dans la même direction (celle de l'axe optique).

c) Dans les milieux optiquement biaxiaux, le tenseur diélectrique s'écrit, dans le repère des axes principaux, sous la forme générale énoncée au §1-b :

$$[\epsilon_r] = \begin{bmatrix} n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^2 \end{bmatrix},$$

où les trois indices de réfraction principaux  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n_3$  sont différents deux à deux. L'origine du qualificatif "biaxial" pour un tel milieu, apparaîtra au chapitre IV.

Les cristaux optiquement biaxiaux sont ceux appartenant aux systèmes orthorhombique, monoclinique et triclinique, qui sont schématisés ci-dessous.

système  
orthorhombiquesystème  
monocliniquesystème  
triclinique

d) Les sept systèmes cristallins qui ont été cités épuisent les possibilités. Il est à noter qu'aucune compétence concernant les symétries structurales<sup>(\*)</sup> et leurs liens avec

(\*) Pour cette question, voir par exemple : Ashcroft, Mermin Solid State Physics (Saunders, 1976).

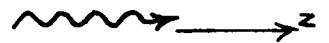
la symétrie optique<sup>(\*)</sup>, n'est requise pour ce cours. Les quelques éléments qui ont été donnés sur ces thèmes, sans démonstration, sont à considérer à titre d'information documentaire. On remarquera simplement ici que la constante diélectrique d'un milieu transparent possède d'autant moins de valeurs principales indépendantes que sa structure microscopique est plus symétrique (c'est-à-dire, possède plus de régularité dans l'espace).

## B) Propagation le long d'un axe principal

### 1) Modes propres de propagation

a) Dans un milieu diélectrique anisotrope, d'axes principaux  $x$ ,  $y$  et  $z$ , on s'intéresse à la propagation d'une onde plane monochromatique (pulsation optique  $\omega$ ) suivant un axe principal. Une onde se propageant suivant l'axe principal  $z$ , possède le champ électrique

$$\vec{E}(z,t) = \Re e \left\{ \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - kz)] \right\},$$



où le nombre d'onde  $k$  et l'enveloppe complexe  $\vec{E}_0$  sont à trouver.

Les équations de Maxwell dans le milieu donnent (cf. § I-C-2):

$$(i) \quad k \hat{u}_z \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0$$

$$(ii) \quad k \hat{u}_z \cdot \vec{D}_0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$[(iii) \quad k \hat{u}_z \cdot \vec{B}_0 = 0]$$

$$(iv) \quad k \hat{u}_z \times \vec{B}_0 = -\mu_0 \omega \vec{D}_0,$$

équations auxquelles il faut adjoindre la relation du milieu:  $\vec{D}_0 = \epsilon_0 [\epsilon_r] \vec{E}_0$ .

L'équation (ii) s'écrit  $D_{0z} = 0$ , soit, puisque l'axe  $z$  est principal:

$$\epsilon_{0z} = 0.$$

Le champ électrique de l'onde est donc transverse à la direction de

(\*) Pour cette question, voir par exemple: Nye Physical Properties of Crystals (Oxford U.P., 1985).

propagation de l'onde; comme il en est de même pour le champ magnétique,  $B_{0z} = 0$  — comme le montre l'équation (i), confirmée par (iii) —, l'onde optique se propageant suivant un axe principal est TEM.

L'équation de Maxwell (i) permet d'exprimer le champ magnétique de l'onde en fonction du champ électrique :  $\vec{B}_0 = \frac{k}{\omega} \hat{u}_z \times \vec{E}_0$ . L'équation (iv) s'écrit ainsi :  $\frac{k^2}{\omega} \hat{u}_z \times (\hat{u}_z \times \vec{E}_0) = -\mu_0 \omega \epsilon_0 [\epsilon_r] \vec{E}_0$ , soit :

$$[\epsilon_r] \vec{E}_0 = \frac{k^2}{k_0^2} \vec{E}_0,$$

avec  $k_0 = \frac{\omega}{c}$  le nombre d'onde dans l'espace libre. Ce problème aux valeurs propres se résout immédiatement dans les axes principaux du milieu; il vient :

$$\begin{cases} n_1^2 \epsilon_{0x} = \frac{k^2}{k_0^2} \epsilon_{0x} \\ n_2^2 \epsilon_{0y} = \frac{k^2}{k_0^2} \epsilon_{0y} \end{cases},$$

où  $n_1$  et  $n_2$  sont les indices de réfraction principaux associés aux axes principaux  $x$  et  $y$ , respectivement, d'où les deux modes propres de propagation :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad k_a &= n_1 k_0, \quad \vec{E}_{0(a)} = \epsilon_0 \hat{u}_x \quad \begin{array}{c} \uparrow x \\ \odot y \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \quad \rightarrow z; \\ \text{(b)} \quad k_b &= n_2 k_0, \quad \vec{E}_{0(b)} = \epsilon_0 \hat{u}_y \quad \begin{array}{c} \uparrow x \\ \odot y \end{array} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} \quad \rightarrow z. \end{aligned}$$

On a choisi ci-dessus les déterminations positives des nombres d'onde propres, ce qui correspond à des modes propres de propagation se propageant vers les  $z$  croissants; pour une propagation suivant les  $z$  décroissants, il faut prendre  $k_a = -n_1 k_0$  et  $k_b = -n_2 k_0$ .

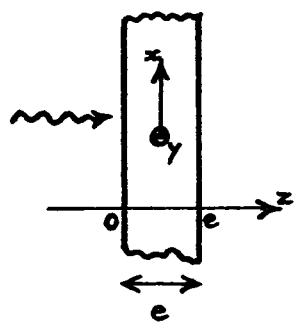
b) Ainsi, pour une propagation le long de l'axe principal  $z$  d'un milieu anisotrope, il existe deux ondes planes à la même pulsation, polarisées linéairement le long des deux autres axes principaux  $x$  et  $y$ ; les indices de réfraction propres associés à ces deux ondes sont les indices de réfraction principaux  $n_1$  et  $n_2$ ,

respectivement, associés à  $x$  et  $y$ . On dit que le milieu présente de la biréfringence linéaire.

A posteriori, cette situation n'est pas surprenante : pour une onde optique se propageant suivant  $z$  et polarisée le long de  $x$ , on a  $\vec{D} = \epsilon_0 n_1^2 \vec{E}$  dans le milieu anisotrope, et tout se passe donc comme si l'onde était dans un milieu isotrope d'indice de réfraction  $n_1$ ; le même argument tient pour une polarisation le long de  $y$ , en faisant intervenir l'indice de réfraction  $n_2$ .

### 2) Lames optiques

a) On considère une lame d'épaisseur  $e$  d'un milieu cristallin anisotrope. L'axe principal  $z$  de ce cristal est orthogonal aux faces de la lame. Une onde optique plane, de champ électrique



$$\vec{E}(z < 0, t) = \Re e \{ \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_0 z)} \}$$

( $k_0 = \frac{\omega}{c}$ ) est envoyée en incidence normale sur la lame; sa polarisation est quelconque, c'est-à-dire que son

enveloppe s'écrit :

$$\vec{E}_0 = \epsilon_{0xz} \hat{u}_x + \epsilon_{0y} \hat{u}_y.$$

Que devient l'onde lumineuse à l'intérieur de la lame ( $0 < z < e$ ), alors quelle ne correspond pas à un mode propre de propagation (cf. § 1 précédent) ? Quelle est l'onde dans l'espace libre après la lame ? Ces questions se résolvent en étudiant séparément les composantes  $x$  et  $y$  de l'onde lumineuse, et en utilisant le principe de superposition (cf. § I-A-1), valable dans un milieu linéaire, pour obtenir l'onde en tout lieu et à tout temps.

b) La composante  $x$  de l'onde lumineuse incidente étant une polarisation propre du milieu, associée à l'indice de réfraction propre  $n_1$ , elle produit le champ électrique d'amplitude  $\epsilon_{0xz} \exp(-in_1 k_0 z) \hat{u}_x$  à l'intérieur de la lame.

De même, la composante  $y$  de l'onde incidente crée le champ électrique d'amplitude complexe  $\tilde{E}_{0y} \exp(-in_2 k_0 z) \hat{u}_y$  dans la lame. Les expressions précédentes supposent l'absence de réflexion de l'onde lumineuse sur les faces de la lame; cette hypothèse est approximativement vérifiée, car les lames optiques ont usuellement leurs faces traitées anti-reflets<sup>(\*)</sup>.

À l'intérieur de la lame ( $0 < z < e$ ), le champ électrique de l'onde possède donc l'amplitude complexe

$$\tilde{E}_{0x} e^{-in_2 k_0 z} \hat{u}_x + \tilde{E}_{0y} e^{-in_2 k_0 z} \hat{u}_y.$$

Cette expression montre que la différence de phase optique entre les composantes  $x$  et  $y$  du champ électrique de l'onde, évolue continûment avec la cote  $z$  à l'intérieur de la lame (dans le cas général où  $n_1 \neq n_2$ ): la polarisation de la lumière change au cours de la propagation dans la lame (cf. § II-A).

c) L'évolution de la polarisation cesse en  $z = e$ , et l'amplitude complexe de l'onde lumineuse après la lame ( $z > e$ ) vaut:

$$\left( \tilde{E}_{0x} e^{-in_2 k_0 e} \hat{u}_x + \tilde{E}_{0y} e^{-in_2 k_0 e} \hat{u}_y \right) e^{-ik_0(z-e)}.$$

Il s'agit d'une onde plane, dont la polarisation (indépendante de  $z$ ) est fixée par l'enveloppe entre parenthèses dans l'expression ci-dessus. Le déphasage entre les composantes  $x$  et  $y$  de la lumière, qui vaut  $\varphi = \text{Arg} \tilde{E}_{0y} - \text{Arg} \tilde{E}_{0x}$  avant la lame, est devenu  $\varphi - \Delta\varphi$  après la lame, où le déphasage supplémentaire  $\Delta\varphi$  est

$$\Delta\varphi = (n_2 - n_1) k_0 e.$$

La différence des indices de réfraction propres  $\Delta n = n_2 - n_1$  est appelée la birefringence de la lame. Si  $n_2 > n_1$ , alors  $\Delta\varphi > 0$ ; dans ce cas, la vitesse de phase  $\frac{c}{n_2}$  dans la lame d'une onde polarisée suivant  $y$ , est plus faible que celle,  $\frac{c}{n_1}$ , d'une onde polarisée suivant  $x$ : l'axe  $y$  est dit axe lent de la

(\*) Ce traitement consiste en le dépôt de couches diélectriques, d'épaisseurs micrométriques.

lame, et  $x$  axe rapide. Évidemment, les dénominations des axes<sup>(\*)</sup>  $x$  et  $y$  sont inversées si  $n_2 < n_1$ .

Ainsi donc la polarisation d'une onde lumineuse en incidence normale sur la lame, se trouve-t-elle modifiée après la traversée de celle-ci, les composantes linéaires du champ électrique de l'onde, suivant les directions propres de la lame, ayant subi un déphasage  $\Delta\varphi = k_0 e \Delta n = 2\pi \frac{e}{\lambda_0} \Delta n$ . Ce déphasage  $\Delta\varphi$  dû à la présence de la lame, dépend à la fois de la lame (biréfringence  $\Delta n$ ; épaisseur  $e$ ) et de la lumière incidente (longueur d'onde  $\lambda_0$  dans l'espace libre;  $\Delta n(\lambda_0)$  à cause de la dispersion du milieu). Bien que la biréfringence  $\Delta n$  soit faible — typiquement,  $|\Delta n| \sim 10^{-2}$  —, le déphasage  $\Delta\varphi$  est notable grâce à une épaisseur de la lame  $e$  grande devant  $\lambda_0$  :  $e > \lambda_0 / |\Delta n|$  permet d'avoir  $|\Delta\varphi| > 2\pi$ .

Les lames optiques sont très employées pour manipuler à volonté la polarisation des faisceaux lumineux, ou pour la mesurer. Le § C suivant donne quelques exemples, parmi les plus courants, de manipulations de la polarisation lumineuse.

### © Quelques manipulations de la polarisation lumineuse

Ce paragraphe décrit quelques manipulations simples de la polarisation d'un faisceau lumineux monochromatique. Sont présentées d'abord les façons d'obtenir une polarisation linéaire (§1), et ensuite quelques possibilités de transformations d'une polarisation en une autre, grâce à des lames optiques (§2). Enfin, des détails pratiques sur l'utilisation des lames optiques sont fournis au §3.

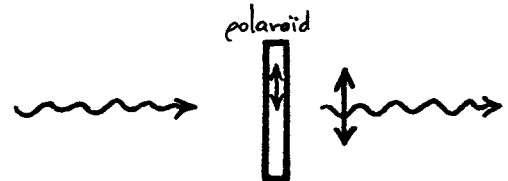
#### 1) Polarisation linéaire

Un faisceau lumineux est polarisé linéairement à l'aide d'un polariseur. À la sortie du polariseur, le champ électrique du faisceau oscille suivant une direction caractéristique du polariseur — la composante orthogonale étant nulle ou négligeable.

(\*) De manière générale, les axes  $x$  et  $y$  sont couramment appelés axes neutres de la lame, car une polarisation linéaire alignée avec l'un d'eux est inchangée à la traversée de la lame.

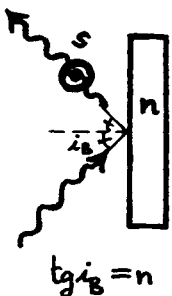


a) La façon la plus simple de polariser linéairement un faisceau lumineux est de lui faire traverser un film possédant du dichroïsme linéaire, un tel film étant communément appelé polaroid. La composante linéaire de la lumière alignée avec une direction spécifique du polaroid, est bien moins absorbée que la composante suivant la direction orthogonale; le rapport des taux de transmission<sup>(\*)</sup> pour ces composantes, appelé coefficient d'extinction, est de l'ordre de  $10^4$ . À la sortie du polaroid, le faisceau lumineux se retrouve polarisé linéairement, dans une direction imposée par le polaroid; tourner le polaroid dans son plan fait tourner du même angle la direction de polarisation émergente.



Un inconvénient du polaroid est qu'il est inutilisable avec un faisceau laser de forte puissance: fonctionnant par absorption (sélective en polarisation), le film polaroid s'échauffe sous l'effet de la lumière qui le traverse, et se détériore irréversiblement si sa température est trop élevée.

b) Une autre méthode pour polariser linéairement un faisceau lumineux, est de l'envoyer sous l'incidence de Brewster (cf. § II-C-4) sur une lame d'un milieu isotrope. La composante linéaire dans le plan d'incidence (polarisation p) est alors intégralement transmise dans la lame (puis intégralement transmise dans l'air au second dioptre lame/air); le faisceau réfléchi par l'interface air/lame, se retrouve donc polarisé orthogonalement au plan d'incidence (polarisation s).



$$\operatorname{tg} \theta_B = n$$

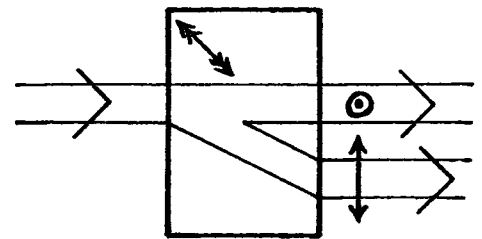
Cependant, ce polariseur a l'inconvénient de posséder un coefficient de réflexion faible; par exemple, seulement 15% de la puissance lumineuse en polarisation s est réfléchi par une lame de verre ( $n \approx 1,5$ ). Ce problème disparaît si l'on utilise un empilement de lames identiques, qui permet

(\*) en puissance

d'obtenir une polarisation  $\checkmark$  en transmission. En effet, à chaque dioptre air/lame ou lame/air, la composante  $s$  de la lumière est partiellement réfléchiée, alors que la composante  $p$  est intégralement réfractée : plus le nombre de lames traversées est grand, plus la polarisation du faisceau émergent est proche d'une polarisation  $p$ .

c) Un dernier moyen peut être utilisé pour obtenir un faisceau linéairement polarisé. Lorsqu'un milieu optique anisotrope n'a pas ses faces orthogonales à un axe principal, un faisceau en incidence normale sur ce milieu se sépare spatialement en deux faisceaux de polarisations linéaires orthogonales (cf. § IV).

On obtient ainsi un séparateur polarisant, et donc un polariseur en ne considérant qu'un



seul des deux faisceaux émergents. Ce type de composant optique, ne fonctionnant pas en absorption, peut être employé avec des faisceaux laser intenses.

## 2) Lames optiques particulières

a) On considère une lame optique (cf. § B-2) qui crée, entre les deux composantes propres  $x$  et  $y$  de la lumière qui la traverse, un déphasage

$$\Delta\varphi = \pi + 2p\pi,$$

où  $p$  est un entier positif<sup>(\*)</sup> ( $\Delta\varphi > 0$ ). Puisque  $\Delta\varphi = k_0 e \Delta n = 2\pi \frac{e}{\lambda_0} \Delta n$ , où  $e$  est l'épaisseur de la lame,  $\Delta n = n_2 - n_1$  sa biréfringence et  $\lambda_0$  la longueur d'onde du faisceau dans l'espace libre, le déphasage précédent est assuré, à  $\lambda_0$  fixée, en taillant la lame à la bonne épaisseur — il y a plusieurs possibilités, correspondant aux différentes valeurs de  $p$ . La lame optique provoque alors le même déphasage entre les composantes linéaires propres, que celui créé par une

(\*)  $p$  est l'ordre de cette lame.

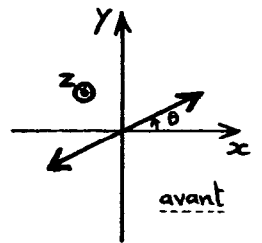
différence de marche entre elles de

$$e \Delta n = \frac{\lambda_0}{2} + p \lambda_0$$

dans l'espace libre. C'est pourquoi une telle lame est appelée lame demi-onde pour la longueur d'onde du faisceau.

L'intérêt essentiel d'une lame demi-onde est qu'elle permet de changer le plan de polarisation d'une lumière linéaire, de manière réglable. En effet, si le faisceau avant la lame a pour amplitude complexe

$$\vec{E}(z < 0) = E_0 (\cos \theta \hat{u}_x + \sin \theta \hat{u}_y) e^{-ik_0 z},$$

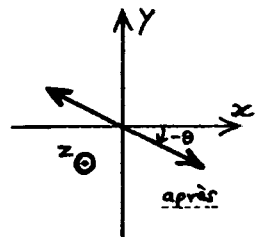


où  $x$  et  $y$  sont les axes propres, alors elle prend, après la lame, l'expression

$$\vec{E}(z > e) = E_0 (\cos \theta e^{-ik_0 n_2 e} \hat{u}_x + \sin \theta e^{-ik_0 n_2 e} \hat{u}_y) e^{-ik_0(z-e)},$$

soit:

$$\vec{E}(z > e) = E_0 e^{-ik_0 n_2 e} (\cos \theta \hat{u}_x - \sin \theta \hat{u}_y) e^{-ik_0(z-e)}$$



puisque  $e^{-i\Delta\psi} = e^{-i\pi} = -1$ . La polarisation du faisceau émergent est donc linéaire, sa direction de polarisation étant la symétrique de la direction de polarisation incidente par rapport aux axes propres de la lame optique. La polarisation de la lumière à la sortie de la lame est tournée de  $-2\theta$  par rapport à la polarisation à l'entrée : la rotation de la lame demi-onde dans son plan, permet donc de choisir continûment la direction de la polarisation émergente. (\*)

b) On considère maintenant une lame dont l'épaisseur est ajustée pour créer un déphasage

$$\Delta\psi = \frac{\pi}{2} + 2p\pi \quad (p \text{ entier positif})$$

entre les deux composantes linéaires propres de la lumière, de longueur d'onde

(\*) D'autres moyens existent pour tourner une polarisation linéaire, cf. § I.

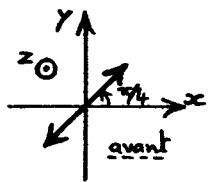
$\lambda_0$ , qui la traverse. Ce déphasage correspond à une différence de marche

$$e \Delta n = \frac{\lambda_0}{4} + p \lambda_0.$$

Pour cette raison, la lame optique en question est appelée lame quart d'onde pour la longueur d'onde utilisée.

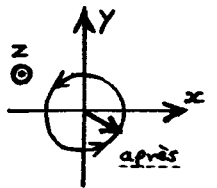
La propriété remarquable d'une lame quart d'onde est qu'elle permet de fabriquer un faisceau lumineux polarisé circulairement, à partir d'un faisceau polarisé linéairement. En effet, si le faisceau lumineux avant la lame est polarisé linéairement à  $+45^\circ$  de l'axe propre  $x$ , son champ électrique ayant l'amplitude complexe

$$\mathcal{E}_0 (\hat{u}_x + \hat{u}_y) e^{-ik_0 z},$$



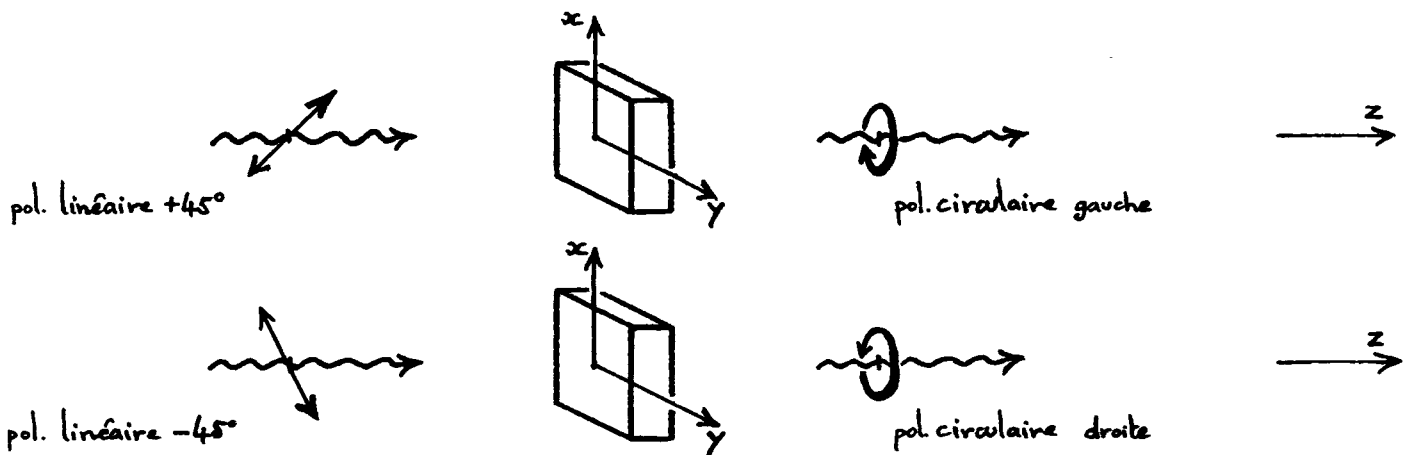
alors la lumière est décrite, après la lame, par l'amplitude

$$\mathcal{E}_0 e^{-in_2 k_0 e} (\hat{u}_x + e^{-i\Delta\varphi} \hat{u}_y) e^{-ik_0(z-e)},$$



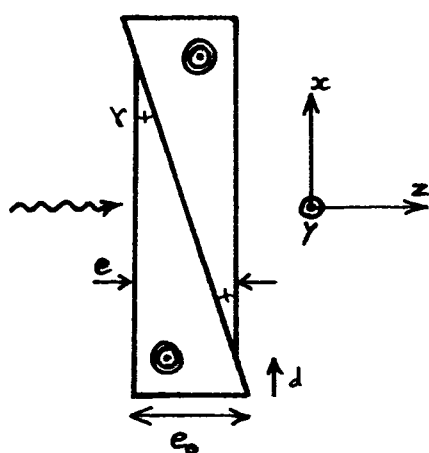
soit: 
$$\mathcal{E}_0 e^{-in_2 k_0 e} (\hat{u}_x - i \hat{u}_y) e^{-ik_0(z-e)}$$

car  $e^{-i\Delta\varphi} = e^{-i\pi/2} = -i$ . On a donc la relation  $\mathcal{E}_y(z) = -i \mathcal{E}_x(z)$  entre les composantes  $x$  et  $y$  de l'amplitude complexe du champ électrique après la lame : la polarisation obtenue est circulaire gauche (cf. § II-A-2). Si la lumière linéaire incidente est à  $-45^\circ$  de  $x$ , alors il est facile de vérifier que le faisceau émergent est polarisé circulaire droit.



Une lame quart d'onde réalise également l'opération inverse, c'est-à-dire qu'elle transforme une polarisation circulaire en polarisation linéaire: un faisceau arrivant sur la lame en étant polarisé circulaire gauche (resp. droit), en sort polarisé linéairement à  $-45^\circ$  (resp.  $+45^\circ$ ) de  $x$ .<sup>(\*)</sup>

c) Une lame quart d'onde, ou une lame demi-onde, ne fait son office, on l'a vu, qu'à une longueur d'onde donnée du faisceau lumineux qui la traverse. Or il existe un dispositif réglable qui permet, pour toute longueur d'onde, de réaliser n'importe quel déphasage  $\Delta\varphi$  (modulo  $2\pi$ ) entre deux composantes propres  $x$  et  $y$ , orthogonales à l'axe de propagation  $z$  du faisceau. Ce dispositif est le compensateur de Babinet-Soleil<sup>(o)</sup>, qui est constitué d'une lame optique d'épaisseur variable: deux cristaux taillés en coins, de même orientation cristalline, coulissent l'un sur l'autre, et l'on a  $\Delta\varphi = 2\pi \frac{e}{\lambda_0} \Delta n$  comme



d'habitude, avec maintenant une épaisseur de lame valant

$$e = e_0 - d \operatorname{tg} \gamma ;$$

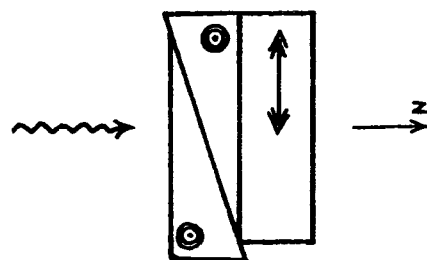
cette épaisseur varie continûment avec le décalage  $d$ .

En fait, plus précisément, une seconde lame d'épaisseur constante  $e_0$  est accolée à la première,

avec une orientation cristalline tournée de  $90^\circ$ . Le

déphasage créé par l'ensemble des deux lames vaut

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{e - e_0}{\lambda_0} \Delta n :$$



le compensateur de Babinet-Soleil est une lame optique d'ordre zéro, réglable.

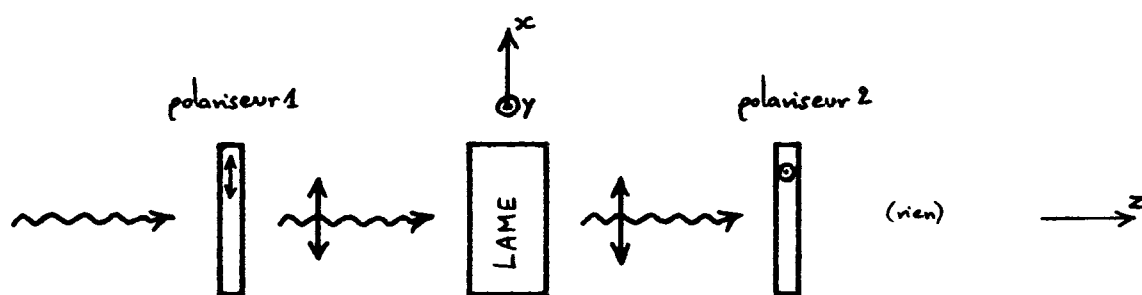
(L'intérêt pour une lame d'être d'ordre zéro, est que le déphasage qu'elle imprime dépend le plus faiblement possible de la longueur d'onde.)

(o) Jacques Babinet (1794 - 1872); compensateur de Babinet-Soleil: 1845.

(\*) Dans le cas où  $e\Delta n = \frac{3\lambda_0}{4} + p\lambda_0$  ( $p$  entier  $> 0$ ), toutes les conclusions précédentes sont inversées: une polarisation linéaire à  $+45^\circ$  est transformée en circulaire droite, etc.

### 3) Mise en oeuvre d'une lame optique

Au moment d'utiliser une lame optique, le premier souci qui s'impose est de repérer ses axes propres. Cette opération s'effectue de la manière suivante. Sur le faisceau lumineux monochromatique avec lequel on travaille, sont installés deux polariseurs l'un à la suite de l'autre<sup>(\*)</sup>, avec leurs directions passantes positionnées à angle droit.<sup>(\*\*)</sup> Aucune lumière n'émerge<sup>donc</sup> du second polariseur, puisqu'il arrête la polarisation linéaire fabriquée par le premier.



La lame optique est alors introduite entre les deux polariseurs ; comme elle modifie la polarisation linéaire construite par le premier polariseur, de la lumière sort du second polariseur. Ensuite, la lame est tournée (elle est en général fixée sur une monture rotative graduée) dans son plan, jusqu'à réobtenir une extinction de la lumière émergente ; cette position de la lame correspond à l'alignement de l'un de ses deux axes propres avec la direction de la polarisation linéaire créée par le premier polariseur (cf. figure ci-dessus). À ce stade, les opérations sont différentes suivant la lame optique utilisée :

a) Si l'on utilise une lame demi-onde (cf. § 2-a), il suffit alors d'ôter le second polariseur. On peut enfin contrôler la direction de la polarisation linéaire sortant de la lame, qui tourne deux fois plus vite qu'on ne tourne la lame demi-onde dans son plan (cf. § 2-a).

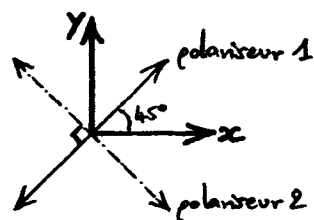
(\*) Le second polariseur, suivant le faisceau, est couramment appelé analyseur.

(\*\*) Polariseur et analyseur sont alors dits croisés.

b) Si l'on utilise une lame quart d'onde (cf. § 2-b) pour fabriquer un faisceau polarisé circulairement, il suffit alors de tourner la lame de  $45^\circ$  et d'ôter le second polariseur. L'hélicité de la polarisation circulaire obtenue est changée par une rotation supplémentaire de la lame de  $90^\circ$  (cf. § 2-b).

c) Si l'on dispose d'un compensateur de Babinet-Soleil que l'on cherche à régler (cf. § 2-c), on commence par le tourner de  $45^\circ$  - en maintenant en place le second polariseur. La puissance du faisceau lumineux après le second polariseur est alors (\*)

$$P(\Delta\varphi) = P_{\text{MAX}} \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right);$$



elle oscille sinusoidalement en fonction du déphasage  $\Delta\varphi$ ,

avec une période de  $2\pi$ . Comme attendu,  $P(\Delta\varphi)$  est

nulle lorsque  $\Delta\varphi = 0$  (modulo  $2\pi$ ): la lame n'agissant pas sur la polarisation,

tout se passe comme si elle était absente. Lorsque  $P(\Delta\varphi) = P_{\text{MAX}}$ , c'est que

$\Delta\varphi = \pi$  (modulo  $2\pi$ ): le compensateur est réglé en lame demi-onde; la

polarisation linéaire issue du polariseur 1, sort <sup>alignée</sup> du compensateur en position

alignée avec la direction passante du polariseur 2. Pour régler le compensateur

en lame quart d'onde, il faut veiller à obtenir  $P(\Delta\varphi) = \frac{1}{2} P_{\text{MAX}}$ .

On peut remarquer que l'expérience ci-dessus, utile au réglage du compensateur de

Babinet-Soleil, est une expérience d'interférence à deux ondes: le premier polariseur

sert à fabriquer deux vibrations optiques synchrones (les composantes  $x$  et  $y$  de la

lumière), et le second polariseur les recombine après qu'elles se sont déphasées de

$\Delta\varphi$  à cause de la différence de chemin optique  $e\Delta n$ .

$$= 2\pi \frac{e\Delta n}{\lambda}$$

(\*) Ce calcul est détaillé au § VI-A-4-b.

Les figures non manuscrites de la page III-6 sont  
extraites de

Ashcroft, Mermin Solid State Physics (Saunders, 1976)

[ traduction française :

Ashcroft, Mermin Physique des Solides (EDP, 2002) ]



# INTRODUCTION À LA PHOTONIQUE

## Exercices III

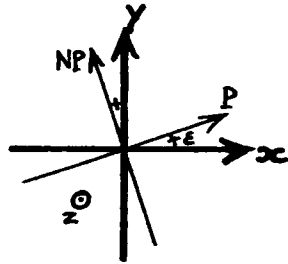
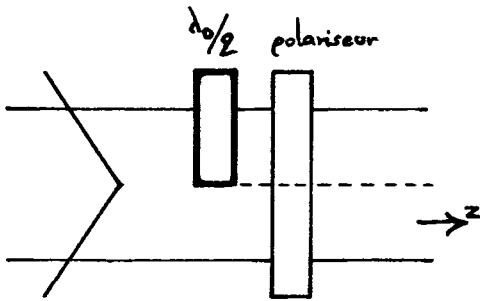
- 1) Polariseurs, loi de Malus. Un faisceau lumineux monochromatique dans l'espace libre, traverse un polariseur. S'il est polarisé linéairement suivant la direction passante du polariseur, il passe sans modification; au contraire, s'il est polarisé linéairement dans la direction orthogonale à la précédente, il ne passe pas du tout.
- a) Un faisceau incident sur le polariseur a une polarisation quelconque (elliptique); écrire l'amplitude complexe de son champ électrique avant et après le polariseur.
- b) Particulier au cas où la polarisation incidente est rectiligne; montrer alors que la puissance lumineuse après le polariseur varie comme  $\cos^2 \theta$ , où  $\theta$  est l'angle entre la polarisation linéaire incidente et la direction passante (loi de Malus<sup>(\*)</sup>).
- 2) Lame demi-onde. Quel est l'effet d'une lame demi-onde sur une polarisation linéaire? sur une polarisation circulaire?
- 3) Lame quart d'onde. Quel est l'effet d'une lame quart d'onde sur une polarisation linéaire à  $\pm 45^\circ$  des axes propres? sur une polarisation circulaire gauche ou droite? sur une polarisation elliptique dont les axes principaux sont alignés avec les axes propres?
- 4) Deux lames  $\lambda/4$  en cascade. Montrer que deux lames quart d'onde placées l'une à la suite de l'autre sur un faisceau, sont équivalentes à une lame demi-onde si les axes rapides sont alignés. Et si les axes rapides sont orthogonaux?
- 5) Lame optique d'ordre zéro. Les indices de réfraction principaux du quartz sont  $n_e = 1,553$  et  $n_o = 1,544$ , à la longueur d'onde  $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$ . À cette longueur d'onde, quelle est l'épaisseur d'une lame demi-onde d'ordre zéro? Pour des raisons mécaniques, il est hors de question de pouvoir fabriquer et manipuler une

---

(\*) Étienne Louis Malus (1775-1812) a énoncé cette loi en 1811.

lame d'épaisseur si faible; comment parvient-on à réaliser une lame optique d'ordre zéro, en accolant deux lames raisonnablement épaisses (cf. ex. 4)?

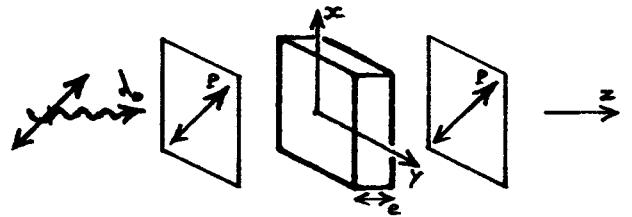
6) Analyseur à pénombre. Un analyseur à pénombre est composé d'une lame demi-onde et d'un polariseur solidaires. La lame demi-onde ne couvre que la moitié du champ éclairé par le faisceau monochromatique incident, et



l'un de ses axes propres fait un petit angle  $\epsilon$  (quelques  $^\circ$ ) avec la direction passante (P) du polariseur. Quelle polarisation linéaire du faisceau

incident est éteinte par le polariseur seul? par la lame demi-onde suivie du polariseur? b) Quelle direction de polarisation linéaire donne, après le dispositif, une puissance faible et uniforme du faisceau? c) Comment cette puissance varie-t-elle avec l'angle  $\epsilon$ ?

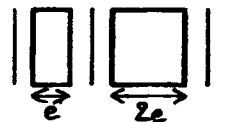
7) Filtre de Lyot. On place une lame optique (épaisseur  $e$ , biréfringence  $\Delta n$ ) entre deux



polariseurs de directions passantes parallèles et à  $45^\circ$  des axes propres de la lame.

a) Montrer qu'un faisceau lumineux polarisé parallèlement aux polariseurs, possède le facteur de transmission en puissance  $T = \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$ , où  $\Delta\varphi = 2\pi \frac{e}{\lambda_0} \Delta n$ . Tracer T en fonction de la fréquence optique  $\nu = \frac{c}{\lambda_0}$  du faisceau.

b) Montrer que T devient  $\cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cos^2\left(2 \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$  si une lame d'épaisseur  $2e$  est placée après le second polariseur, et un troisième polariseur après elle. Tracer l'allure de T; quel est l'effet de l'ajout de la seconde lame?



c) Généralisation: montrer que l'on a  $T = \left(\frac{\sin 2^N u}{2^N \sin u}\right)^2$ ,  $u = \frac{\Delta\varphi}{2}$ , lorsque le système est fait avec N lames d'épaisseurs  $e, 2e, 4e, \dots, 2^{N-1}e$ , et  $N+1$  polariseurs.

[On a:  $\cos u \cos 2u \dots \cos 2^{N-1}u = \frac{\sin 2^N u}{2^N \sin u}$ .] Vérifier que la largeur des pics de transmission, à

$\nu_p = p \frac{c}{2e\Delta n}$ , vaut  $\delta\nu \approx \frac{c}{2^N e \Delta n}$ . Ce filtre a été inventé en 1933 par Bernard Lyot (1897-1952).

# INTRODUCTION À LA PHOTONIQUE

## IV - Milieux anisotropes II : séparateurs polarisants

Le chapitre précédent a examiné la propagation d'un faisceau lumineux monochromatique dans un milieu diélectrique anisotrope, lorsqu'elle a lieu dans la direction d'un axe principal; c'est dans cette configuration que fonctionnent les lames optiques, qui sont des outils couramment utilisés pour manipuler à volonté la polarisation des faisceaux lumineux (cf. §§ III-B et III-C-2).

Ici, on étudie maintenant les propriétés d'une onde lumineuse quelle que soit sa direction de propagation par rapport aux axes principaux du milieu. D'abord (§ A) sont recherchés, dans un point de vue général, les modes propres de propagation lumineuse dans un milieu anisotrope; on verra notamment qu'ils sont déterminés utilement par une construction géométrique simple.  <sup>polarisés linéairement et</sup> Ensuite, les résultats généraux obtenus sont appliqués au cas particulier des milieux anisotropes uniaxiaux (§ B); non seulement ces milieux uniaxiaux ont l'intérêt de présenter de la biréfringence <sup>linéaire</sup> de façon minimale, en permettant des représentations des phénomènes optiques à l'aide de schémas simples, mais ils sont également très employés dans des dispositifs usuels. Ces dispositifs <sup>(\*)</sup>, présentés au § C, sont les séparateurs polarisants; ils permettent de transformer un faisceau lumineux monochromatique en deux faisceaux spatialement disjointes, dont les polarisations linéaires <sup>orthogonales</sup> sont les projections de la polarisation incidente sur les polarisations propres du dispositif traversé. Ainsi, de la même manière qu'il est possible de disperser les composantes spectrales d'un faisceau lumineux polychromatique à l'aide d'un prisme ou d'un réseau de diffraction, l'Optique expérimentale dispose également de moyens pour séparer spatialement un faisceau monochromatique en <sup>ses</sup> composantes linéaires de polarisation.

(\*) Outre les lames optiques vues au chapitre précédent.

## ④ Faisceau monochromatique en milieu anisotrope : généralités

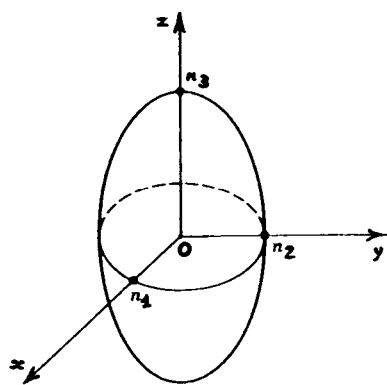
### 1) Ellipsoïde des indices

Un milieu diélectrique anisotrope est caractérisé, on l'a vu (cf. § III-A), par ses trois axes principaux  $x$ ,  $y$  et  $z$ , orthogonaux deux à deux, et par les trois indices de réfraction principaux  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n_3$  qui leur sont associés, respectivement. Dans le repère cartésien de ses axes principaux, le milieu anisotrope possède un tenseur diélectrique diagonal :

$$[\epsilon_r] = \begin{bmatrix} n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^2 \end{bmatrix}.$$

Si les indices de réfraction principaux sont différents deux à deux, le milieu est appelé biaxial — pour une raison qui apparaîtra au § 3 suivant; si  $n_1 = n_2 \neq n_3$ , il est dit uniaxial; lorsque  $n_1 = n_2 = n_3$ , le milieu est optiquement isotrope.

Une représentation géométrique utile du tenseur diélectrique est l'ellipsoïde des indices; il s'agit de l'ellipsoïde d'axes principaux  $x$ ,  $y$  et  $z$ , identiques à



ellipsoïde des indices

ceux du tenseur diélectrique, et de dimensions principales  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n_3$ , respectivement. Dans le repère des axes principaux, l'ellipsoïde des indices a pour équation :

$$\frac{x^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} + \frac{z^2}{n_3^2} = 1.$$

Il est clair qu'à un tenseur diélectrique correspond un unique ellipsoïde des indices, et inversement. Les propriétés optiques d'un milieu anisotrope (directions des axes principaux et valeurs des indices de réfraction principaux) sont donc décrites entièrement par l'ellipsoïde des indices<sup>(\*)</sup>. Celui d'un milieu uniaxial est un ellipsoïde de révolution; celui d'un milieu isotrope est une sphère.

(\*) L'ellipsoïde des indices est aussi appelé indicatrice optique.

## 2) Imperméabilité électrique

a) Par définition, l'impérmeabilité électrique  $[\eta]$  d'un milieu diélectrique anisotrope est le tenseur inverse de son tenseur diélectrique :

$$[\eta] = [\epsilon_r]^{-1}$$

La relation entre le vecteur  $\vec{D}(\vec{r}, t)$  et le champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , à l'intérieur du milieu, peut donc s'écrire indifféremment  $\vec{D} = \epsilon_0 [\epsilon_r] \vec{E}$  (cf. § III-A-1) ou  $\epsilon_0 \vec{E} = [\eta] \vec{D}$ . Puisque  $[\epsilon_r]$  est symétrique,  $[\eta]$  est également symétrique. L'un ou l'autre des tenseurs  $[\epsilon_r]$  ou  $[\eta]$  décrit intégralement les propriétés optiques du milieu.

Ces deux tenseurs partagent les mêmes axes principaux  $x, y, z$ . Dans ces axes,  $[\eta]$  possède les valeurs principales  $\eta_1 = 1/n_1^2$ ,  $\eta_2 = 1/n_2^2$  et  $\eta_3 = 1/n_3^2$ , respectivement :

$$[\eta] = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_3^2} \end{bmatrix},$$

où  $n_1^2, n_2^2$  et  $n_3^2$  sont les valeurs principales de  $[\epsilon_r]$ .

b) Dans le repère des axes principaux  $xyz$ , l'ellipsoïde des indices (cf. § 1) a pour équation  $\sum_{i=1}^3 \eta_i x_i^2 = 1$ . Dans tout autre repère cartésien  $x'y'z'$ , l'équation de l'ellipsoïde des indices prend la forme  $\sum_{i,j} \eta'_{ij} x'_i x'_j = 1$ , où les  $\eta'_{ij}$  sont les composantes de  $[\eta]$  dans ce repère ; ce résultat se montre (\*) en utilisant la matrice de passage (P) entre la base  $(\hat{O}_x, \hat{O}_y, \hat{O}_z)$  d'un repère et celle  $(\hat{O}'_x, \hat{O}'_y, \hat{O}'_z)$  de l'autre :  $\hat{O}'_j = \sum_i P_{ij} \hat{O}_i$ . Ainsi, l'équation  $\sum_{i,j} \eta_{ij} x_i x_j = 1$  construit le même ellipsoïde des indices, quel que soit le repère cartésien où elle est écrite.

---

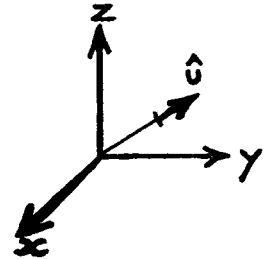
(\*)  $\epsilon_0 \vec{E} = [\eta] \vec{D}$  étant indépendante du repère, on a  $\eta'_{ij} = \sum_{k,l} \eta_{kl} P_{ki} P_{lj}$ . Il vient alors :  $\sum_{i,j} \eta'_{ij} x'_i x'_j = \sum_{i,j} \eta_{ij} (\sum_k P_{ik} x'_k) (\sum_l P_{jl} x'_l) = \sum_{k,l} \eta_{kl} x'_k x'_l$ .

### 3) Modes propres de propagation

a) À l'intérieur d'un milieu anisotrope, on cherche une onde plane à la pulsation  $\omega$ , qui se propage suivant le vecteur unitaire  $\hat{u}$  orienté de manière quelconque par rapport aux axes principaux  $xyz$  du milieu.

Le champ électrique de cette onde est écrit :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re e \left\{ \vec{\Sigma}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})] \right\}, \quad \vec{k} = nk_0 \hat{u}$$

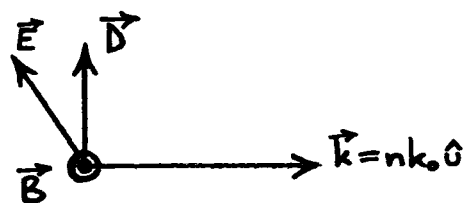


( $k_0 = \frac{\omega}{c}$ ), où les inconnues sont l'enveloppe complexe  $\vec{\Sigma}_0$  et l'indice de réfraction propre  $n$ .

Les quatre équations de Maxwell dans le milieu (cf. § I-C-2) se résument, pour l'onde en question, aux deux formules suivantes :

$$\begin{cases} \vec{k} \times \vec{\Sigma}_0 = \omega \vec{\mathcal{B}}_0 \\ \vec{k} \times \vec{\mathcal{B}}_0 = -\mu_0 \omega \vec{\mathcal{D}}_0, \end{cases}$$

qui relient les enveloppes complexes  $\vec{\Sigma}_0$ ,  $\vec{\mathcal{B}}_0$  et  $\vec{\mathcal{D}}_0$  du champ électrique, du champ magnétique et du vecteur  $\vec{\mathcal{D}}$ , respectivement. Les deux équations ci-dessus fournissent la structure de l'onde plane progressive. Le champ magnétique  $\vec{B}(\vec{r}, t)$



et le vecteur  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  sont orthogonaux au vecteur d'onde  $\vec{k}$ , ( $\vec{k}, \vec{\mathcal{D}}, \vec{B}$ ) formant un trièdre direct; le champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , non aligné

avec  $\vec{\mathcal{D}}$  en général, se trouve dans le plan contenant  $\vec{k}$  et  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ . Ainsi, l'onde n'est pas transverse électrique,  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  ayant une composante non nulle suivant la direction de propagation (en général).

b) Puisque c'est le vecteur  $\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t)$  qui est transverse au vecteur d'onde, on continue naturellement à l'utiliser comme moyen de décrire l'onde, l'évaluation de  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  à partir de  $\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t)$  se faisant avec la relation  $\epsilon_0 \vec{E} = [\eta] \vec{\mathcal{D}}$ . En

éliminant  $\vec{D}_0$  entre les deux équations du § a, et avec  $\epsilon_0 \vec{E}_0 = [\eta] \vec{D}_0$ , on obtient une équation sur  $\vec{D}_0$  seul:

$$[\eta] \vec{D}_0 - (\hat{v} \cdot [\eta] \vec{D}_0) \hat{v} = \frac{1}{n^2} \vec{D}_0.$$

Le membre de gauche de cette équation est la projection du vecteur  $[\eta] \vec{D}_0$  sur un plan orthogonal à  $\hat{v}$ . En notant  $P_{\perp \hat{v}}$  cette opération de projection, l'équation ci-dessus prend la forme

$$P_{\perp \hat{v}} [\eta] \vec{D}_0 = \frac{1}{n^2} \vec{D}_0.$$

Il s'agit d'une équation aux valeurs propres pour l'opérateur  $P_{\perp \hat{v}} [\eta]$ , avec  $1/n^2$  pour valeur propre et  $\vec{D}_0$  pour vecteur propre. Sa résolution fournit deux polarisations linéaires propres  $\vec{D}_{0(a)}$  et  $\vec{D}_{0(b)}$ , associées à deux indices de réfraction propres  $n_a$  et  $n_b$  — ie à deux vecteurs d'onde propres  $\vec{k}_a = n_a k_0 \hat{v}$  et  $\vec{k}_b = n_b k_0 \hat{v}$ .

Les indices de réfraction propres et les directions de polarisation propres associés (pour le vecteur  $\vec{D}$ ), peuvent être déterminés en utilisant la procédure géométrique suivante, qui fait intervenir l'ellipsoïde des indices (cf. § 1):

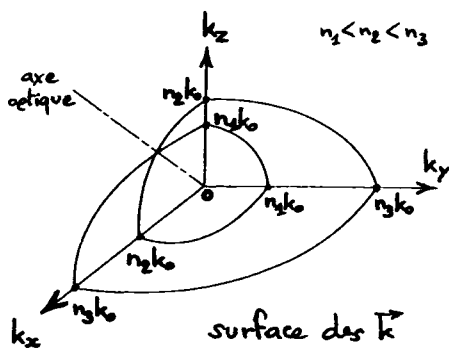
- Dessiner le plan orthogonal à  $\hat{v}$  passant par le centre de l'ellipsoïde des indices; l'intersection de ce plan avec l'ellipsoïde est une ellipse<sup>(\*)</sup>.
- Les dimensions principales de cette ellipse sont les indices de réfraction propres  $n_a$  et  $n_b$ .
- Les directions principales de l'ellipse sont les directions des vecteurs  $\vec{D}_a(\vec{r}, t)$  et  $\vec{D}_b(\vec{r}, t)$  pour les modes propres de propagation ( $\vec{D}_a \cdot \vec{D}_b = 0$ ).

Cette détermination géométrique simple des modes propres de propagation se

(\*) Cette ellipse est appelée ellipse des indices; elle dépend de  $\hat{v}$ .

comprend aisément.<sup>(\*)</sup> En effet, de la même façon que l'imperméabilité électrique  $[\eta]$  est diagonalisée en considérant les éléments principaux (directions et dimensions principales) de l'ellipsoïde des indices qui la représente<sup>(cf. § 2)</sup>, l'opérateur  $P_{10}[\eta]$  est naturellement représenté par l'ellipse des indices, dont les éléments principaux correspondent à sa diagonalisation.

c) On vient de voir que l'ellipsoïde des indices joue un rôle central dans la description des propriétés optiques d'un milieu anisotrope. Une autre construction géométrique, secondaire mais très utile pour la suite, est la surface des  $\vec{k}$ . C'est la surface décrite par les extrémités des vecteurs d'onde propres  $\vec{k}_a = n_a(\hat{u}) k_0 \hat{u}$  et  $\vec{k}_b = n_b(\hat{u}) k_0 \hat{u}$ , lorsque  $\hat{u}$  balaye toutes les directions possibles de l'espace<sup>(o)</sup>; la



surface obtenue est à deux nappes, par construction.

La figure ci-contre représente la surface des  $\vec{k}$  lorsque  $n_1 < n_2 < n_3$ ;  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_z$  sont les composantes de  $\vec{k}$  sur les axes principaux  $x$ ,  $y$  et  $z$  du milieu. Seul un huitième de cette surface est montré, le restant s'obtenant par symétries par

rapport aux plans  $xy$ ,  $yz$  et  $zx$ . Son allure se déduit aisément de la construction géométrique précédente (cf. § b) qui fournit les indices de réfraction propres  $n_a$  et  $n_b$ . On peut remarquer que les vecteurs d'onde propres alignés avec les axes principaux du milieu, sont bien ceux attendus (cf. § III-B-1).

Les deux nappes de la surface des  $\vec{k}$  se rencontrent pour deux directions de propagation contenues dans le plan  $zox$ , symétriques par rapport à l'axe principal  $z$ , et pour ces deux directions seulement. Ces deux directions définissent les deux axes optiques du milieu anisotrope, qualifié alors de biaxial. Les modes propres de

(o) La surface des  $\vec{k}$  est aussi appelée surface normale. Si  $n_a$  et  $n_b$  sont portés suivant  $\hat{u}$  (au lieu de  $n_a k_0$  et  $n_b k_0$ ), la surface obtenue, homothétique à la surface des  $\vec{k}$ , est dénommée surface des indices.

(\*) Une justification analytique de cette construction géométrique des modes propres de propagation peut être trouvée dans Born, Wolf Principles of Optics (Cambridge U.P., 1998), par exemple.



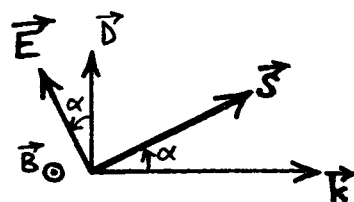
propagation dans la direction d'un axe optique sont dégénérés:  $n_a = n_b (= n_2$  en raisonnant toujours avec  $n_1 < n_2 < n_3$ ). Dans un milieu uniaxial, les deux nappes de la surface des  $k$  deviennent une sphère et un ellipsoïde de révolution autour de l'axe optique unique (l'axe  $z$  si  $n_1 = n_2 < n_3$ , l'axe  $x$  si  $n_1 < n_2 = n_3$ ); ces deux nappes sont tangentes pour une propagation alignée avec l'axe optique. Le cas des milieux uniaxiaux est revisité au § B. Dans un milieu optiquement isotrope,  $n = n_1 = n_2 = n_3$  et les deux nappes de la surface des  $k$  se fondent en une sphère de rayon  $nk_0$ .

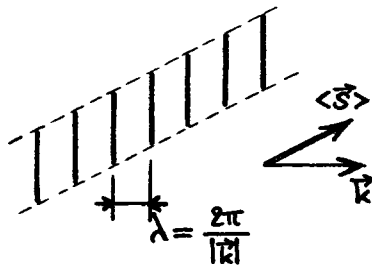
On notera que la surface des  $k$  est construite à une pulsation optique  $\omega$  donnée. Pour une autre pulsation optique  $\omega'$ , c'est une autre surface des  $k$  qui est tracée. Les deux surfaces des  $k$ , à  $\omega$  et à  $\omega'$ , ne sont pas exactement homothétiques dans le rapport  $\omega'/\omega$  à cause de la dispersion affectant les indices de réfraction principaux. On peut voir la surface des  $k$  comme la représentation, à  $\omega$  fixée, de la relation de dispersion  $\omega = f(k)$  du milieu anisotrope.

#### 4) Direction des faisceaux lumineux

a) Dans un milieu diélectrique, l'énergie associée à une onde électromagnétique est transportée suivant le vecteur de Poynting  $\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)$  (cf. § I-A-2). Pour une onde plane progressive de la forme  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}\}$ , le vecteur de Poynting moyenné sur le temps vaut (cf. § I-C-2):  $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E}_0^* \times \vec{B}_0)$ . Le vecteur de Poynting est donc orthogonal à la fois aux champs électrique et magnétique de l'onde.

Or on a vu (cf. § 3-a) que le champ électrique d'une onde plane progressive dans un milieu diélectrique anisotrope n'est pas transverse à son vecteur d'onde  $\vec{k}$  (son champ magnétique l'est): le vecteur de Poynting  $\vec{S}(\vec{r}, t)$  n'est pas parallèle à  $\vec{k}$  dans un milieu anisotrope (en général), l'angle  $\alpha$  entre eux étant égal à celui entre  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  (ces quatre vecteurs sont dans le même plan). Ainsi, l'énergie lumineuse n'est pas transportée dans la direction de progression de l'onde optique.

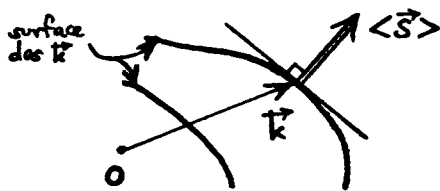




La figure ci-contre montre, à  $t = Ct_0$ , un faisceau lumineux monochromatique, dont la taille transverse est suffisamment grande pour qu'il possède un vecteur d'onde bien déterminé ( $\vec{k} = \vec{k}_a$  ou  $\vec{k} = \vec{k}_b$ , cf. § 3-b). La

direction du faisceau est suivant le vecteur de Poynting moyen  $\langle \vec{S} \rangle$ , tandis que les plans d'onde, orthogonaux à  $\vec{k}$ , sont en biais par rapport au faisceau lumineux.<sup>(\*)</sup>

b) La direction du vecteur de Poynting moyen, c'est-à-dire la direction du faisceau, se trouve à l'aide d'une construction géométrique utilisant la surface des  $\vec{k}$  (cf. § 3-c) : le vecteur d'onde  $\vec{k}$  ( $= \vec{k}_a$  ou  $\vec{k}_b$ ) du faisceau étant connu,  $\langle \vec{S} \rangle$



est normal au plan tangent à la surface des  $\vec{k}$ , en  $\vec{k}$  (cf. figure ci-contre).

Cette propriété se montre en considérant deux vecteurs d'onde  $\vec{k}$  et  $\vec{k} + \delta\vec{k}$  voisins sur la surface des  $\vec{k}$ . La différentiation des deux équations du § 3-a fournit :  $\delta\vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k} \times \delta\vec{E}_0 = \omega \delta\vec{B}_0$  et  $\delta\vec{k} \times \vec{B}_0 + \vec{k} \times \delta\vec{B}_0 = -\mu_0 \omega \delta\vec{D}_0$  ( $\omega = Ct_0$ ). En prenant le produit scalaire par  $\vec{B}_0$  de la première équation conjuguée et le produit scalaire par  $\vec{E}_0^*$  de la seconde équation, puis en faisant la différence, il vient<sup>(\*)</sup>  $\text{Re}\{\delta\vec{k} \cdot (\vec{E}_0^* \times \vec{B}_0)\}$ , soit  $\delta\vec{k} \cdot \langle \vec{S} \rangle = 0$ . Comme  $\delta\vec{k}$  est dans le plan tangent à la surface des  $\vec{k}$  en  $\vec{k}$ , cette dernière équation prouve la propriété annoncée.

En pratique, les différences entre les indices de réfraction principaux  $n_1, n_2$  et  $n_3$  sont le plus souvent faibles, et l'angle entre  $\langle \vec{S} \rangle$  et  $\vec{k}$  reste petit. Dans un milieu isotrope, la surface des  $\vec{k}$  est une sphère et on retrouve (cf. § I-C-2) que  $\langle \vec{S} \rangle$  et  $\vec{k}$  sont alors parallèles.

c) Si l'on décrit un faisceau lumineux par un paquet d'ondes de champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}\left\{ \int d^3k \vec{g}(\vec{k}) \exp[i(\omega(\vec{k})t - \vec{k} \cdot \vec{r})] \right\}$ , où  $|\vec{g}(\vec{k})|$  ne prend des valeurs

(\*) Les plans d'onde progressent à la vitesse de phase  $\vec{v}_p = \frac{\omega}{|\vec{k}|} \hat{u}$ , parallèlement à  $\vec{k}$ .

(\*) On utilise aussi  $\vec{E}_0 \cdot [\epsilon_r] \delta\vec{E}_0^* = \sum_{ij} \epsilon_{0i} \epsilon_{rj} \delta E_{0j}^* = ([\epsilon_r] \vec{E}_0) \cdot \delta\vec{E}_0^*$ ,  $[\epsilon_r]$  étant symétrique.

non négligeables qu'au voisinage d'un vecteur d'onde  $\vec{k}_1$ , alors l'énergie du faisceau se transporte à la vitesse de groupe  $\vec{v}_g = \vec{\text{grad}}_{\vec{k}} \omega |_{\vec{k}=\vec{k}_1}$  (cf. § I-C-3). Comme la surface des  $\vec{k}$  représente la dispersion du milieu à  $\omega = Ck$ , la vitesse de groupe est normale à cette surface en  $\vec{k}_1$  : la vitesse de groupe du faisceau et son vecteur de Poynting sont parallèles, comme il se doit.

B) Cas des milieux anisotropes uniaxiaux

1) Modes propres de propagation

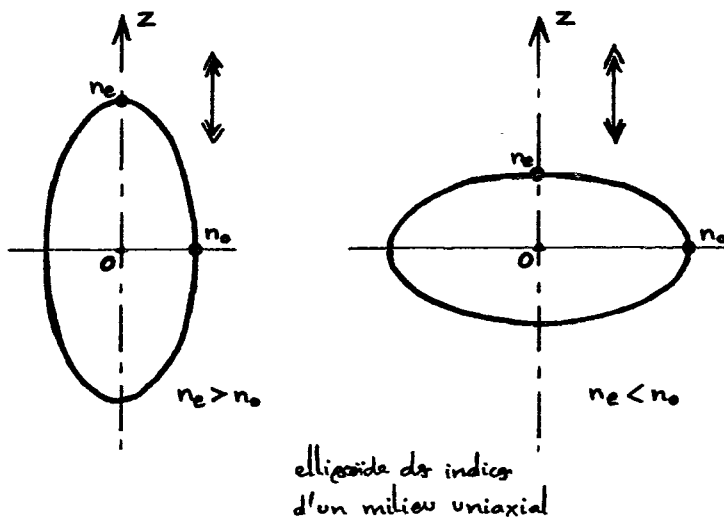
a) Un milieu anisotrope uniaxial possède deux indices de réfraction principaux égaux, et différents du troisième (cf. § III-A-2). Par convention, l'axe principal associé à cet indice de réfraction principal singulier, est dénommé l'axe z du milieu; les deux autres axes principaux sont les axes x et y. L'axe z est appelé axe optique du milieu. Dans les axes principaux xyz, les tenseurs diélectrique  $[\epsilon_r]$  et d'imperméabilité électrique  $[\eta] = [\epsilon_r]^{-1}$  s'écrivent

$$[\epsilon_r] = \begin{bmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\eta] = \begin{bmatrix} n_o^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & n_o^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & n_e^{-2} \end{bmatrix}.$$

Suivant le vocabulaire en usage,  $n_o$  est l'indice de réfraction principal ordinaire et  $n_e$  l'indice de réfraction principal extraordinaire. L'ellipsoïde des indices d'un milieu uniaxial, d'équation

$$\frac{x^2 + y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} = 1$$

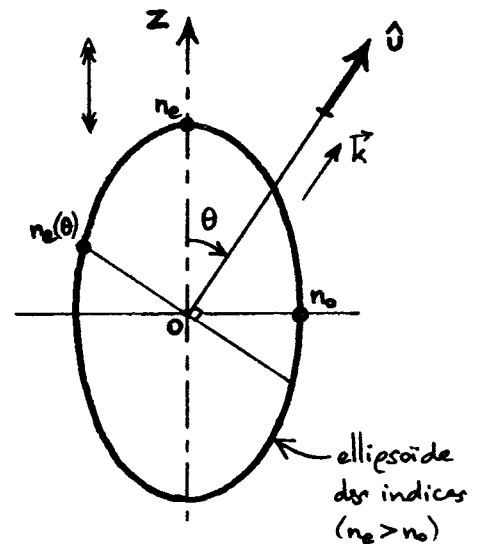
dans les axes principaux, est un ellipsoïde de révolution autour de l'axe optique z. Si le milieu est uniaxial positif



( $n_e > n_o$ ), cet ellipsoïde est allongé suivant l'axe optique  $z$ ; s'il est négatif ( $n_e < n_o$ ), l'ellipsoïde est aplati suivant  $z$ .

b) Les deux modes propres de propagation dans un milieu uniaxial étant déterminés à l'aide de la construction géométrique du § A-3-b, on les trouve de la forme suivante :

— Le mode propre ordinaire possède l'indice de réfraction propre  $n_a = n_o$  égal à l'indice de réfraction principal ordinaire, c'est-à-dire un vecteur d'onde  $\vec{k}_{(o)} = n_o k_o \hat{u} = n_o \frac{\omega}{c} \hat{u}$ . Le vecteur  $\vec{D}_{(o)}(\vec{r}, t)$  de ce mode est orthogonal au plan de la figure ci-contre, ie orthogonal au plan contenant l'axe optique et  $\vec{k}_{(o)}$ . Comme  $\vec{D}_{(o)}(\vec{r}, t)$  appartient au plan  $xy$ ,

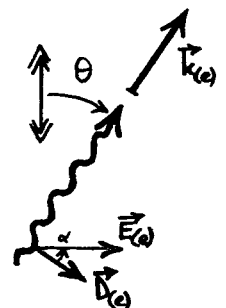


le champ électrique  $\vec{E}_{(o)}(\vec{r}, t)$  du mode de propagation ordinaire est colinéaire à  $\vec{D}_{(o)}(\vec{r}, t)$  :  $\vec{D}_{(o)} = \epsilon_o n_o^2 \vec{E}_{(o)}$ .

— De son côté, le mode propre extraordinaire possède l'indice de réfraction propre  $n_b = n_e(\theta)$  dépendant de l'angle  $\theta$  entre  $\hat{u}$  et l'axe optique  $z$ . Il vient  $[n_e(\theta) \cos \theta]^2 / n_o^2 + [n_e(\theta) \sin \theta]^2 / n_e^2 = 1$ , c'est-à-dire que l'indice de réfraction propre extraordinaire<sup>(\*)</sup>  $n_e(\theta)$  est donné par

$$\frac{1}{n_e(\theta)^2} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}.$$

Le vecteur d'onde propre de ce mode est  $\vec{k}_{(e)} = n_e(\theta) k_o \hat{u}$ . Le vecteur  $\vec{D}_{(e)}(\vec{r}, t)$  et le champ électrique  $\vec{E}_{(e)}(\vec{r}, t)$  du mode extraordinaire sont dans le plan contenant l'axe optique et  $\vec{k}_{(e)}$ .  $\vec{D}_{(e)}$  est orthogonal à  $\vec{k}_{(e)}$ .  $\vec{E}_{(e)}$  se déduit de  $\vec{D}_{(e)}$  à l'aide de

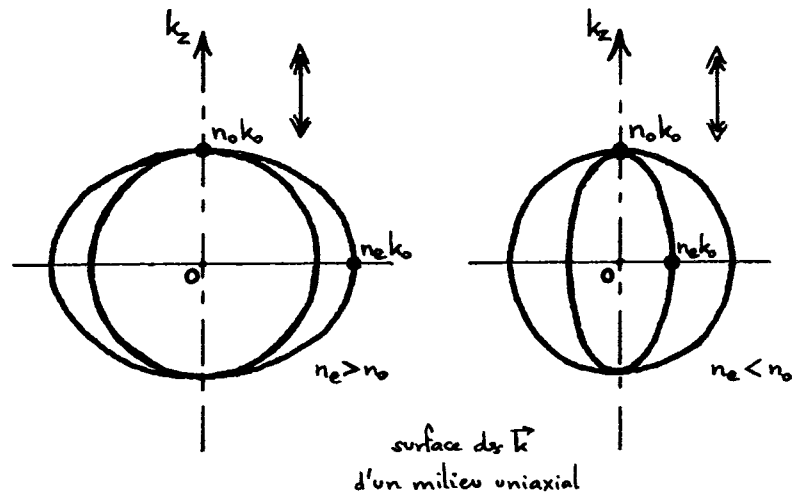


(\*) On veillera à ne pas faire de confusion entre l'indice de réfraction principal extraordinaire  $n_e$  et l'indice de réfraction propre extraordinaire  $n_e(\theta)$ .

$\epsilon_0 \vec{E}_{(e)} = [\eta] \vec{D}_{(e)}$  ; l'angle  $\alpha$  entre  $\vec{E}_{(e)}$  et  $\vec{D}_{(e)}$  dépend de  $\theta$ , et n'est nul que pour  $\theta = 0$  ou  $\frac{\pi}{2}$  (ou  $\pi$ ). Dans la majorité des cas, les indices de réfraction principaux ordinaire  $n_o$  et extraordinaire  $n_e$  sont très proches l'un de l'autre, et l'angle  $\alpha$  reste très faible.

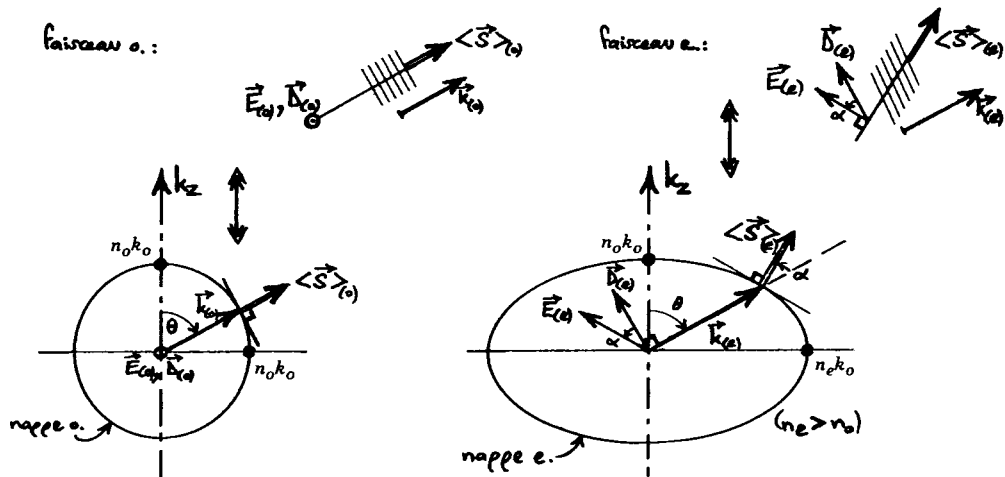
c) La surface des  $\vec{k}$  (cf. § A-3-c) d'un milieu anisotrope uniaxial est formée de l'ensemble des extrémités des vecteurs d'onde propres ordinaire  $\vec{k}_{(o)} = n_o k_0 \hat{u}$  et extraordinaire  $\vec{k}_{(e)} = n_e(\theta) k_0 \hat{u}$ , lorsque toutes les directions de propagation repérées par  $\hat{u}$  sont prises

dans l'espace. D'après la détermination des modes propres vue au § b, la nappe ordinaire de la surface des  $\vec{k}$  est une sphère de rayon  $n_o k_0$ , tandis que la nappe



extraordinaire est un ellipsoïde de révolution autour de l'axe optique, de dimensions principales  $n_o k_0$  suivant l'axe optique et  $n_e k_0$  orthogonalement. Les deux nappes ne sont en contact que pour une propagation suivant l'axe optique ; pour une propagation dans cette direction, une onde lumineuse monochromatique se propage comme si elle se trouvait dans un milieu isotrope, d'indice de réfraction  $n_o$ .

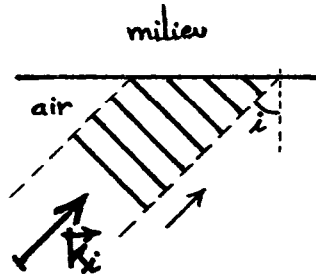
d) Dans un milieu anisotrope uniaxial, la direction d'un faisceau lumineux (ie: une onde plane progressive monochromatique de taille transverse finie) est donnée par la construction précisée au § A-4-b, qui utilise la surface des  $\vec{k}$ . La nappe ordinaire de la surface des  $\vec{k}$  étant une sphère, un faisceau ordinaire, de vecteur d'onde  $\vec{k}_{(o)}$  et de polarisation orthogonale au plan  $(z, \vec{k}_{(o)})$ , possède un vecteur de Poynting moyen  $\langle \vec{S} \rangle_{(o)}$  parallèle à  $\vec{k}_{(o)}$  : l'énergie lumineuse est transportée dans la direction de progression de l'onde optique, comme dans



un milieu isotrope (cf. § I-C-2). Cela n'est pas le cas pour un faisceau extraordinaire, de vecteur d'onde  $\vec{k}_{(e)}$  et de polarisation dans le plan  $(z, \vec{k}_{(e)})$  : la nappe extraordinaire de la surface des  $k$  étant un ellipsoïde, le vecteur de Poynting moyen  $\langle \vec{S} \rangle_{(e)}$  du faisceau n'est pas parallèle à son vecteur d'onde  $\vec{k}_{(e)}$  et l'énergie lumineuse est transportée dans une direction différente de celle de progression des plans d'onde.

## 2) Double réfraction

a) On considère un faisceau lumineux monochromatique incident sur un dioptré plan séparant l'espace libre, où il se propage, et un milieu diélectrique anisotrope. Le vecteur d'onde incident  $\vec{k}_i$  ( $|\vec{k}_i| = k_0 = \frac{\omega}{c}$ ) et la normale au dioptré définissent le plan d'incidence, qui est le plan de la figure ci-contre. La réflexion et la réfraction du faisceau incident se déterminent comme au § II-C-1 :



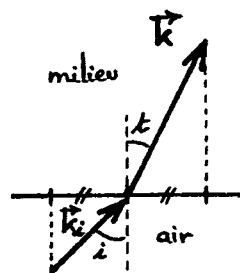
l'existence de conditions aux limites pour le champ électromagnétique impose un ajustement, sur le dioptré, des phases des ondes incidente, réfléchie et réfractée, les projections de leur vecteur d'onde sur le dioptré se retrouvant ainsi égales. Les vecteurs d'onde sont alors tous dans le plan d'incidence, et l'onde réfléchie est l'image spéculaire de l'onde incidente. La nouveauté concerne la réfraction : puisque le milieu anisotrope admet deux modes propres de propagation, de vecteurs d'onde différents, on s'attend que l'onde incidente

électromagnétique impose un ajustement, sur le dioptré, des phases des ondes incidente, réfléchie et réfractée, les projections de leur vecteur d'onde sur le dioptré se retrouvant ainsi égales. Les vecteurs d'onde sont alors tous dans le plan d'incidence, et l'onde réfléchie est l'image spéculaire de l'onde incidente. La nouveauté concerne la réfraction : puisque le milieu anisotrope admet deux modes propres de propagation, de vecteurs d'onde différents, on s'attend que l'onde incidente

donne naissance à deux ondes réfractées se propageant dans le milieu suivant des directions différentes. Cet effet est appelé double réfraction (ou biréfringence).

Notant  $\vec{k}$  le vecteur d'onde d'un des deux modes de propagation dans le milieu ( $\vec{k} = \vec{k}_a$  ou  $\vec{k}_b$ , cf. §A-3-b), l'égalité de sa projection sur le dioptre avec celle du vecteur d'onde incident  $\vec{k}_i$ , s'écrit :

$$k_0 \sin i = |\vec{k}| \sin t,$$



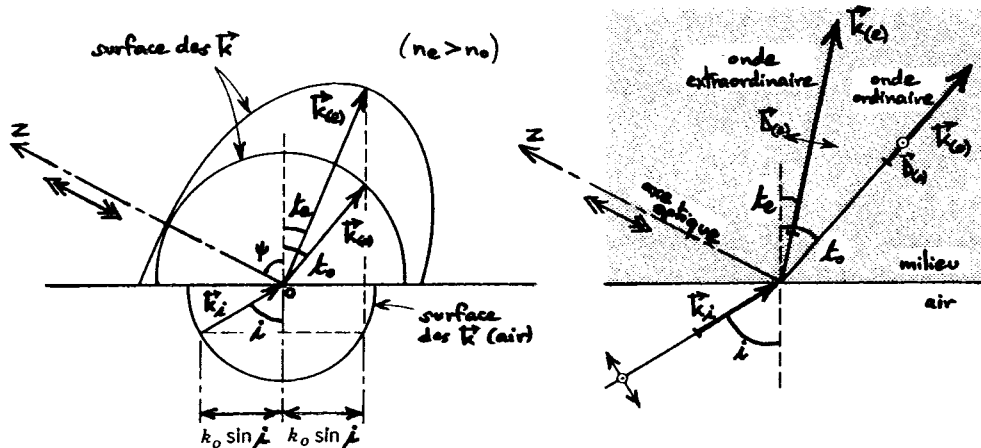
où  $t$  est l'angle de réfraction. Dans cette équation,  $|\vec{k}|$  dépend de  $t$ . Pour la résoudre, il suffit de tracer l'intersection de la surface des  $\vec{k}$  avec le plan d'incidence, et de trouver un angle  $t$  pour lequel  $\vec{k}$  possède la bonne longueur. Deux solutions sont possibles, qui correspondent aux deux modes de propagation propres. Les amplitudes de ces deux ondes réfractées dépendent de l'état de polarisation de l'onde incidente. On peut remarquer qu'avec  $|\vec{k}| = n k_0$  ( $n = n_a$  ou  $n_b$ , cf. §A-3-b), la loi précédente se met sous la forme  $\sin i = n \sin t$ ; il s'agit de la seconde loi de Snell-Descartes pour la réfraction, avec ici  $n(t)$ .

b) À titre d'exemple, on considère le cas où le milieu est uniaxial et où le plan d'incidence contient l'axe optique du milieu. La surface des  $\vec{k}$  coupe le plan d'incidence en un cercle de rayon  $n_o k_0$ , et en une ellipse de dimensions principales  $n_o k_0$  selon l'axe optique et  $n_e k_0$  orthogonalement. Les deux ondes réfractées, satisfaisant  $k_0 \sin i = |\vec{k}| \sin t$ , sont :

- une onde ordinaire, polarisée orthogonalement au plan d'incidence, avec l'angle de réfraction  $t_o$  donné

par  $\sin i = n_o \sin t_o$ ;

- une onde extraordinaire, polarisée dans le plan d'incidence, avec l'angle de réfraction  $t_e$



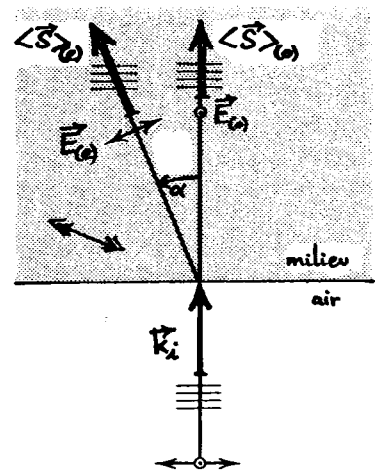
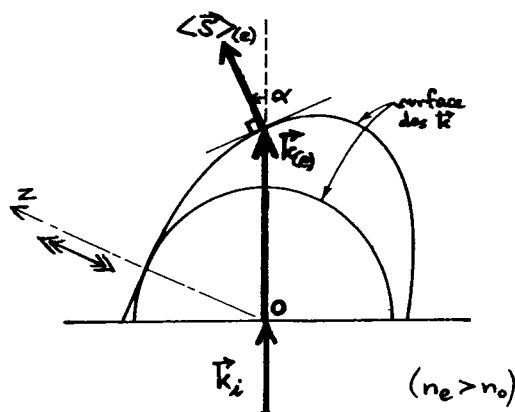
donné par  $\sin i = n_e(\psi + \theta_e) \sin \theta_e$ , où l'indice de réfraction propre extraordinaire  $n_e(\theta)$  a été déterminé au § 1-b ( $\theta = \psi + \theta_e$  est l'angle entre  $\vec{k}_{(e)}$  et l'axe z).

Si l'onde lumineuse incidente est polarisée orthogonalement (s) (resp. parallèlement (p)) au plan d'incidence, alors seule l'onde ordinaire (resp. extraordinaire) est créée dans le milieu uniaxial. Si l'onde incidente porte les deux polarisations s et p, alors les deux ondes ordinaire et extraordinaire sont réfractées dans le milieu.

Bref, parmi tous les modes propres possibles dans le milieu ayant diverses directions de propagation, seuls sont excités les deux qui possèdent un vecteur d'onde propre situé dans le plan d'incidence et obéissant à la seconde loi de Snell-Descartes pour la réfraction. L'un de ces deux modes propres peut être éteint, si la projection de sa polarisation sur le dioptre est orthogonale à celle de l'onde lumineuse incidente.

c) Lors de la réfraction air/milieu, ce sont les directions des vecteurs d'onde incident et réfractés qui suivent la loi de Snell-Descartes (cf. § a). Il est clair que les directions des faisceaux lumineux, elles, ne lui obéissent pas, car la direction d'un faisceau ne coïncide pas, en général, avec celle de son vecteur d'onde (cf. § A-4 et § 1-d).

Pour illustrer ce point, on prend l'exemple simple (et frappant) d'un faisceau lumineux dans l'air en incidence normale sur un milieu anisotrope uniaxial, dont l'axe optique n'est ni parallèle ni orthogonal au dioptre. Le vecteur d'onde incident  $\vec{k}_i$  étant normal au dioptre, le sont aussi les vecteurs d'onde  $\vec{k}_{(o)}$  et  $\vec{k}_{(e)}$  des ondes



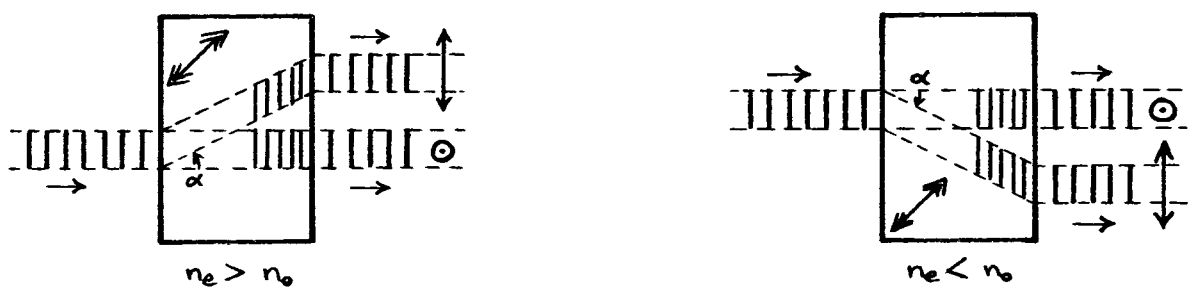


réfractés ordinaire et extraordinaire. Suivant le § 1-d, le vecteur de Poynting de l'onde ordinaire est parallèle à  $\vec{k}_o$ , tandis que celui de l'onde extraordinaire fait l'angle  $\alpha$  avec  $\vec{k}_o$ : dans le milieu, les faisceaux ordinaire et extraordinaire se séparent spatialement.

© Séparateurs polarisants

1) Déplaceurs polarisants

La configuration expérimentale qui vient d'être décrite (cf. § B-2-c) permet de réaliser un séparateur de faisceaux polarisant. En effet, on a vu qu'un

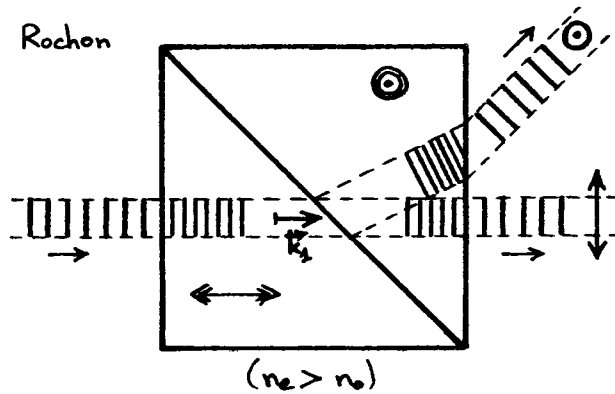


faisceau monochromatique dans l'air, en incidence normale sur un milieu anisotrope uniaxial dont l'axe optique n'est ni parallèle ni orthogonal au dioptre air/milieu, se sépare en deux faisceaux à l'intérieur du milieu. Ces deux faisceaux se réfractent sur le dioptre milieu/air, en créant deux faisceaux à la sortie du dispositif, qui sont parallèles, latéralement séparés et de polarisations orthogonales. Les faisceaux émergents étant parallèles, le dispositif est dénommé déplaceur de faisceaux polarisant.

Les deux faisceaux émergents ne sont effectivement distincts, à la sortie du dispositif, que si le diamètre du faisceau incident est plus faible que le décalage qui est créé par le milieu de longueur finie. Lorsque le faisceau incident possède une polarisation linéaire alignée avec la polarisation ordinaire (resp. extraordinaire) dans le milieu, seul le faisceau correspondant sort du dispositif, c'est-à-dire celui avec la polarisation orthogonale au (resp. dans le) plan des figures ci-dessus.

## 2) Séparateurs d'états de polarisation

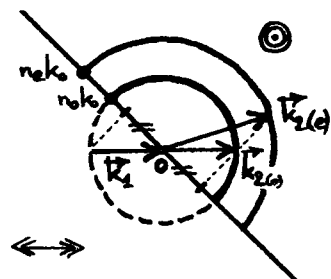
a) Il est possible de mieux séparer spatialement deux composantes linéaires de polarisation d'un faisceau, en les faisant porter par deux faisceaux non parallèles. Le prisme<sup>(\*)</sup> de Rochon, par exemple, réalise cette opération. Il est constitué de deux demi-prismes taillés dans un même milieu



uniaxial. L'axe optique n'a pas la même orientation d'une partie à l'autre. Dans le premier demi-prisme, il est orthogonal au dioptre d'entrée; le faisceau en incidence normale dans l'air, qui se réfracte normalement (cf. § B-2-a),

donne donc le vecteur d'onde normal  $\vec{k}_1$ ,  $|\vec{k}_1| = n_o k_o$ , indépendamment de la polarisation (cf. § B-1-d, ou § III-B-1).

Le second demi-prisme a son axe optique orthogonal au plan de section principale du dispositif (ie le plan de la figure ci-dessus). La composante de polarisation parallèle à ce plan est réfractée sous forme d'une onde ordinaire dans ce second demi-prisme, sans déviation du vecteur d'onde:  $\vec{k}_{2(o)} = \vec{k}_1$ .



En sortant du dispositif, de nouveau sans déviation du vecteur d'onde, cette polarisation linéaire est portée par un faisceau aligné avec le faisceau incident.

De son côté, la composante de polarisation orthogonale au plan de section principale, est réfractée dans le second demi-prisme sous forme d'une onde extraordinaire de vecteur d'onde  $\vec{k}_{2(e)}$ ,  $|\vec{k}_{2(e)}| = n_e k_o$ . Sur le dioptre de sortie vers l'air, cette dernière onde est de nouveau réfractée, avec une déviation qui accentue son inclinaison par rapport à la

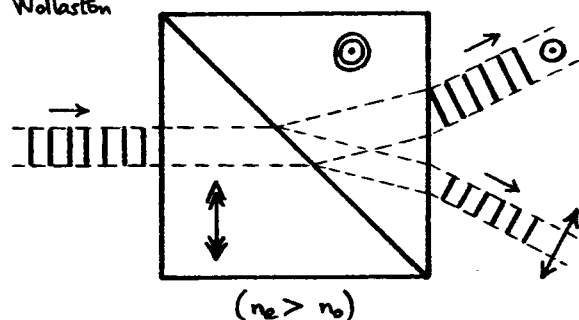
(\*) Prisme: polyèdre ayant deux bases égales et parallèles, et dont les faces latérales sont des parallélogrammes (définition du Petit Robert).

direction du faisceau incident.

Les schémas précédents correspondent à un prisme de Rochon fabriqué avec un milieu uniaxial positif ( $n_e > n_o$ ); pour un milieu négatif, la déviation de la polarisation orthogonale au plan de section principale est dans l'autre sens, c'est-à-dire vers le sommet du second demi-prisme. Par ailleurs, on aura noté que, dans le second demi-prisme, la direction du faisceau extraordinaire est alignée avec le vecteur d'onde  $\vec{k}_{2(e)}$ .

b) Un prisme de Wollaston<sup>(\*)</sup> ne présente dans sa constitution qu'une seule différence par rapport au prisme précédent: l'axe optique du premier demi-prisme, toujours dans le plan de section principale, est maintenant parallèle à la face d'entrée. Ce simple changement permet de séparer un peu plus,

Wollaston



à la sortie du dispositif, les composants de polarisation orthogonale et parallèle au plan de section principale. En effet, la polarisation incidente orthogonale au plan de section principale se trouve déviée comme au §a, tandis que la polarisation incidente

dans ce plan est maintenant déviée, symétriquement<sup>(\*)</sup> à la précédente par rapport à la direction du faisceau incident.

Le schéma ci-dessus concerne un prisme de Wollaston taillé dans un milieu uniaxial positif; pour un milieu uniaxial négatif, les polarisations des deux faisceaux émergents sont échangées.

Si le prisme de Wollaston est tourné autour de la direction du faisceau incident, les deux faisceaux émergents décrivent un cône. Au contraire, la même opération sur le prisme de Rochon laisse invariante la direction de l'un des deux faisceaux sortants.

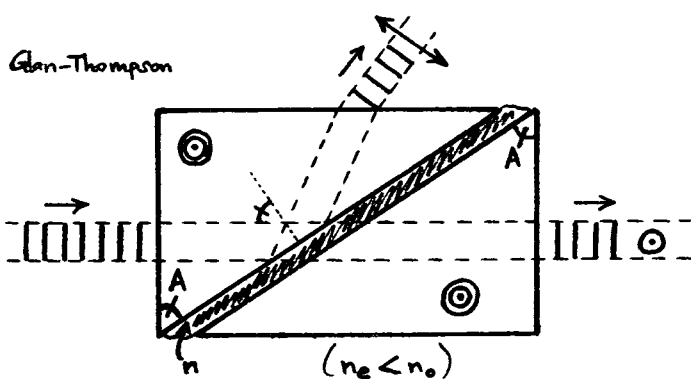
(\*) Lorsque  $|n_e - n_o| \ll n_o$ .

(\*) William Hyde Wollaston (1766 - 1828)

### 3) Polarisateurs à réflexion totale

Une façon de séparer encore plus nettement, dans l'espace, deux composantes linéaires de polarisation d'un faisceau lumineux, est d'utiliser un polariseur à réflexion totale. Ces dispositifs sont taillés, le plus couramment, dans la calcite (appelée également spat d'Iblande); ce milieu est uniaxial négatif. Les exemples présentés ci-dessous sont supposés réalisés en calcite.

a) Le prisme de Glan-Thompson (\*) est un polariseur à réflexion totale. Il est formé de deux demi-prismes ayant leur axe optique orthogonal au plan de



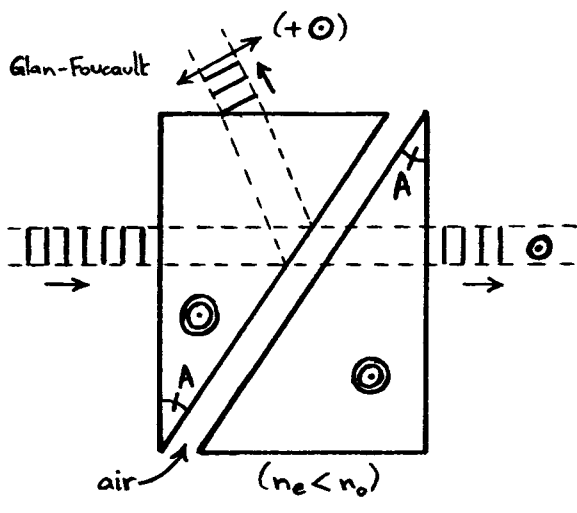
section principale. Un milieu isotrope, d'indice de réfraction  $n$ , les sépare.

La première réfraction du faisceau incident, sans déviation, donne une onde extraordinaire polarisée parallèlement à l'axe optique,

de vecteur d'onde  $\vec{k}_{e(o)}$ ,  $|\vec{k}_{e(o)}| = n_e k_0$ , et une onde ordinaire polarisée orthogonalement à la précédente, de vecteur d'onde  $\vec{k}_{o(o)}$ ,  $|\vec{k}_{o(o)}| = n_o k_0$ . Dans le cas de la calcite, milieu uniaxial négatif, le milieu isotrope est choisi avec un indice de réfraction  $n \approx n_e$ , et l'angle au sommet A de chaque demi-prisme est pris assez grand pour que l'onde ordinaire subisse une réflexion totale:  $n_o \sin A > n$ . La composante parallèle à l'axe optique, du faisceau incident, traverse donc le dispositif, et en émerge avec un déplacement latéral d'autant plus faible que la couche de milieu isotrope est mince et que son indice de réfraction  $n$  est proche de  $n_e$ ; la composante orthogonale à l'axe optique, elle, sort intégralement sur le côté du dispositif. Utilisé en polariseur, le prisme de Glan-Thompson est monté de sorte que cette dernière composante soit absorbée.

(\*) Également appelé prisme de Glazebrook.

b) L'inconvénient du dispositif précédent est qu'il ne peut être utilisé avec un faisceau incident intense, à cause de l'absorption dans la couche de matériau isotrope. Dans le prisme de Glan-Foucault, cette couche est remplacée par l'air.

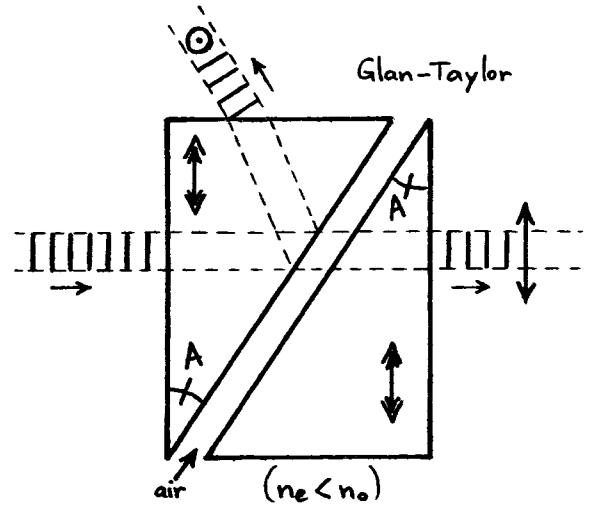


L'avantage de ce prisme est que la condition de réflexion totale, qui s'écrit maintenant  $n_o \sin A > 1$ , est remplie avec un angle au sommet A plus petit qu'au § a: moins de matière est nécessaire à la fabrication de l'objet.

Le faisceau émergent dans l'alignement du faisceau incident, est totalement polarisé dans la direction orthogonale au plan de section principale. Le prisme de Glan-Foucault fait donc parfaitement office de polariseur, avec <sup>en pratique</sup> un coefficient d'extinction d'au moins  $10^5$ , valeur typique <sup>pour</sup> les séparateurs polarisants.

Cependant, si le faisceau qui sort sur le côté est essentiellement polarisé dans le plan de section principale, il possède aussi une composante dans la direction orthogonale, à cause de sa réflexion sur le dioptré entre le premier demi-prisme et l'air. Se pose également le problème des réflexions multiples de cette composante de polarisation dans la couche d'air. Bref, ce prisme n'est pas un très bon séparateur de polarisations linéaires.

c) C'est afin de pallier ce dernier problème que le prisme de Glan-Taylor a été inventé. Il est constitué de deux demi-prismes séparés par une couche d'air, dont les axes optiques alignés sont dans le plan de section principale et parallèles aux faces



(\*) Avec un décalage latéral négligeable, si la couche d'air est suffisamment mince. (⊙) En 1948.

d'entrée et de sortie. L'angle au sommet A des demi-prismes est choisi tel que  $\operatorname{tg} A = 1/n_e$  : la polarisation dans le plan de section principale rencontre les dioptries demi-prisme/air et air/demi-prisme avec l'angle d'incidence de Brewster (cf. § II-C-4), et les traverse donc sans réflexion.

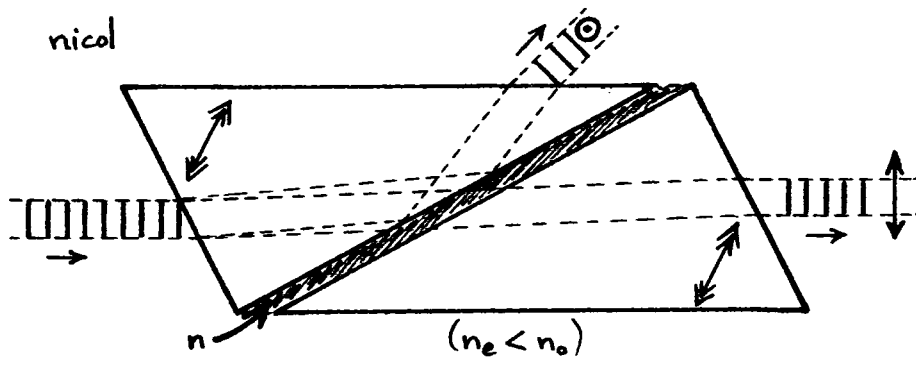
En outre, avec l'angle A ainsi fixé, on <sup>peut</sup> vérifier la condition  $\frac{1}{n_o} < \sin A$  de réflexion totale de la composante de polarisation orthogonale au plan de section principale, si  $n_o$  et  $n_e$  sont suffisamment séparés. Or, avec la calcite, l'angle  $A = \operatorname{Arctg} \frac{1}{n_e}$  ne réalise pas  $\sin A > \frac{1}{n_o}$ ,  $n_o$  et  $n_e$  étant trop proches encore malgré la forte biréfringence de ce milieu<sup>(\*)</sup>. En fait, dans un prisme de Glan-Taylor en calcite, l'angle au sommet A des demi-prismes est un légèrement plus grand que  $\operatorname{Arctg} \frac{1}{n_e}$ , afin que  $n_o \sin A > 1$  soit vérifiée : la polarisation orthogonale au plan de section principale subit une réflexion totale sur le dioptrie demi-prisme/air, tandis que la polarisation dans ce plan est très peu réfléchiée sur les dioptries demi-prisme/air et air/demi-prisme, la valeur de A lui permettant d'avoir, à chaque dioptrie, un angle d'incidence proche de l'angle d'incidence de Brewster. Ainsi le prisme de Glan-Taylor est-il un bien meilleur séparateur de polarisations linéaires que le prisme de Glan-Foucault.

Par ailleurs, un prisme de Glan-Taylor fabriqué avec de la calcite particulièrement transparente, contenant le minimum d'inclusions absorbantes ou diffusantes et de défauts, est adapté pour une utilisation avec des faisceaux laser de très fortes intensités ; un tel composant optique est dénommé prisme de Glan-Laser.

d) On mentionnera pour finir le prisme de Nicol, ou nicol, qui fut le premier polariseur<sup>(c)</sup>. Les faces des deux demi-prismes qui le constituent, sont des plans de divage de la calcite. Le faisceau incident n'est pas normal à la face d'entrée. L'axe

(c) William Nicol (1768? - 1851) ; prisme de Nicol : 1828 ; "nicol" : 1867.

(\*) Pour la calcite,  $n_e = 1,48491$  et  $n_o = 1,65569$  à  $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$ .



optique est à  $45^\circ$  des bases du prisme. La polarisation orthogonale au plan de section principale subit une

réflexion totale sur la dioptré entre le premier demi-prisme et le milieu isotrope (baume du Canada,  $n=1,55$ , ou huile de lin,  $n=1,485 \approx n_e$ ) situé entre les deux demi-prismes. La polarisation dans le plan de section principale émerge dans un faisceau aligné avec la direction du faisceau incident, en ayant un léger décalage avec lui : lorsque le prisme de Nicol est tourné autour de la direction du faisceau incident, le faisceau émergent décrit un cylindre, ce qui <sup>peut</sup> s'avérer peu pratique pour un polariseur. De ce point de vue, le prisme de Glan-Thompson ou le prisme de Glan-Foucault (cf. §§ a et b) améliorent les choses.

Les figures non manuscrites de ce chapitre sont tirées de :

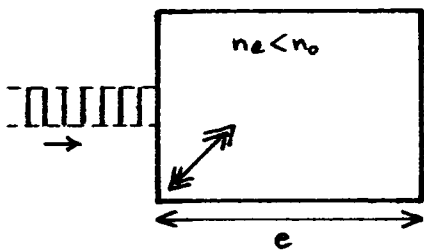
Saleh, Teich Fundamentals of Photonics (Wiley, 1991)

# INTRODUCTION À LA PHOTONIQUE

## Exercices IV

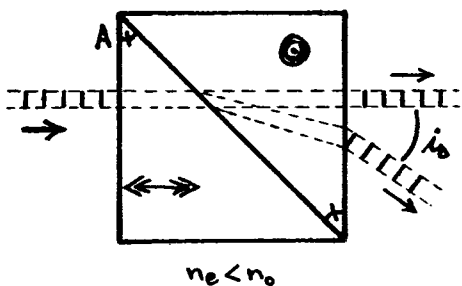
- 1) Vecteur d'onde et direction d'un faisceau. Un faisceau lumineux se propage dans un milieu anisotrope uniaxial. a) S'il est polarisé ordinairement (resp. extraordinairement), préciser sa direction de polarisation, son vecteur d'onde  $\vec{k}_{(o)}$  (resp.  $\vec{k}_{(e)}$ ) et la direction du faisceau. b) Dans le cas de la polarisation extraordinaire, montrer que l'angle  $\alpha$  entre la direction du faisceau et le vecteur d'onde  $\vec{k}_{(e)}$ , est donné par  $\text{tg} \alpha = (n_e^2 - n_o^2) \sin \theta \cos \theta / (n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta)$  avec  $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ , où  $\theta$  est l'angle entre  $\vec{k}_{(e)}$  et l'axe optique [Indication: utiliser  $\vec{B} \cdot \varepsilon_0 \vec{E}$  et  $\vec{D} \times \varepsilon_0 \vec{E}$ ]. c) Exprimer  $\alpha$  lorsque  $|n_e - n_o| \ll n_o$ ; quelle est la valeur maximale de  $|\alpha|$ ? pour quel angle  $\theta$  est-elle atteinte? Estimer  $|\alpha|_{\text{MAX}}$  dans la calcite ( $n_e = 1,49$  et  $n_o = 1,66$ ).

- 2) Déplaceur polarisant. Un faisceau lumineux dans l'air est en incidence normale sur un cristal uniaxial, dont l'axe optique fait un angle de  $45^\circ$  avec la face d'entrée. a) Le cristal étant négatif ( $n_e < n_o$ ), tracer les faisceaux réfractés en précisant leur polarisation.



- b) La face de sortie du cristal est parallèle à la face d'entrée; utilisant la déviation du faisceau extraordinaire calculée à l'exercice précédent pour la calcite, trouver le décalage des faisceaux émergents si le cristal a l'épaisseur  $e = 3 \text{ cm}$ .

- 3) Prisme de Rochon. Un prisme de Rochon est fabriqué en calcite ( $n_e < n_o$ ).



- a) Identifier les polarisations linéaires des faisceaux émergents, sur le schéma ci-contre.
- b) Montrer que la séparation angulaire des faisceaux émergents est  $i_0 \approx (n_o - n_e) \text{tg} A$ , en supposant  $n_o - n_e \ll n_e$ .  $i_0 = ?$  si  $A = 45^\circ$  ?



4) Vitesse de groupe et vecteur de Poynting. Montrer que si le vecteur d'onde  $\vec{k}$  d'un mode propre de propagation dans un milieu anisotrope, varie de  $d\vec{k}$ , alors la variation  $d\omega$  de la pulsation  $\omega$  de ce mode vérifie  $\langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{k} = \langle v \rangle d\omega$ , où  $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \{ \vec{E}_0^* \times \vec{D}_0 \}$  est le vecteur de Poynting moyen (dans le temps) associé au mode, et  $\langle v \rangle = \frac{1}{4} \vec{E}_0^* \cdot \vec{D}_0 + \frac{1}{4\mu_0} |\vec{D}_0|^2$  est la densité volumique moyenne (dans le temps) d'énergie<sup>(\*)</sup> associée au passage du mode dans le milieu. (Ce résultat généralise la discussion du § IX-A-4-b du cours.) En déduire que la vitesse de groupe  $\vec{v}_g$  du mode en question est reliée au vecteur de Poynting moyen par  $\langle \vec{S} \rangle = \langle v \rangle \vec{v}_g$ .

Interpréter cette relation.

5) Équation de Fresnel. On a vu que dans un milieu anisotrope, les modes propres de propagation étaient déterminés par l'équation aux valeurs propres  $P_{\perp 0}[\eta] \vec{D}_0 = \frac{1}{n^2} \vec{D}_0$ , où  $n$  est l'indice de réfraction propre :  $\vec{k} = nk_0 \hat{u}$  ( $k_0 = \frac{\omega}{c}$ ), et  $P_{\perp 0}$  la projection orthogonalement à  $\hat{u}$  (cf. cours, § IX-A-3). En écrivant l'équation aux valeurs propres dans le repère des axes principaux du milieu, montrer que l'on a  $(n_i^2 - n^2) D_{0i} = \left( \sum_j \frac{D_{0j}}{n_j^2} v_j \right) v_i$ ,  $i=1,2,3$ , où  $n_1, n_2, n_3$  sont les indices de réfraction principaux. En déduire que l'indice de réfraction propre est solution de l'équation de Fresnel<sup>(6)</sup> : 
$$\sum_i \frac{n_i^2 v_i^2}{n^2 - n_i^2} = 0.$$

↳ Dans le cas d'un milieu uniaxial, retrouver les équations des deux nappes de la surface des  $\vec{k}$ .

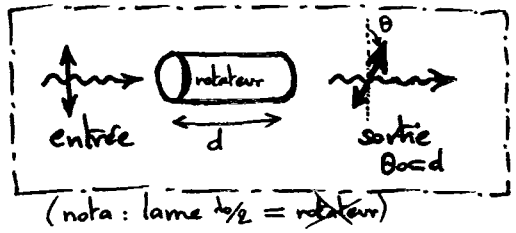
6) Compensateur de Berek (1913). Dans un milieu uniaxial, on taille une lame à faces parallèles, d'épaisseur  $e$ , avec l'axe optique normal aux faces. Un faisceau est à l'incidence  $i$  sur cette lame. Exprimer la différence  $\Delta\varphi$  des déphasages subis par l'onde à la traversée de la lame, suivant qu'elle est s ou p.  $\Delta\varphi = ?$  si  $|i| \ll 1$  ?

(6) Augustin Fresnel (1788-1827); équation de Fresnel :  $\approx 1820$ .

(\*) On vérifiera que le premier terme de l'expression de  $\langle v \rangle$  est bien réel (et positif).

# V - Rotateurs de polarisation

definition:



## A) Activite optique

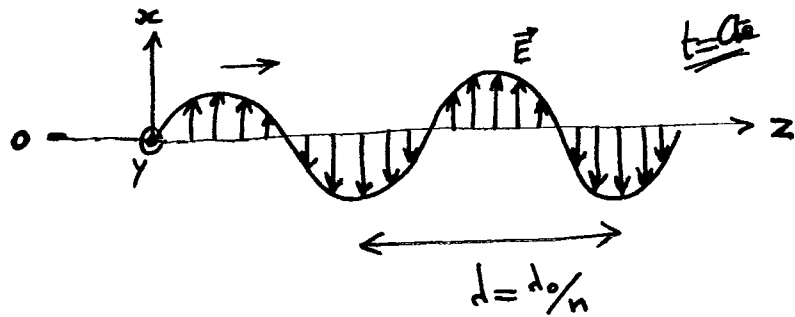
### 1) Introduction (l.h.i. : linéaire, homogène et isotrope)

a) • Onde polarisée linéairement dans un milieu l.h.i. classique:

$$\vec{E}(z, t) = \text{Re} \left\{ \sum_{\hat{e}_x} \hat{e}_x e^{i(\omega t - nk_0 z)} \right\}$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c}$$

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$$

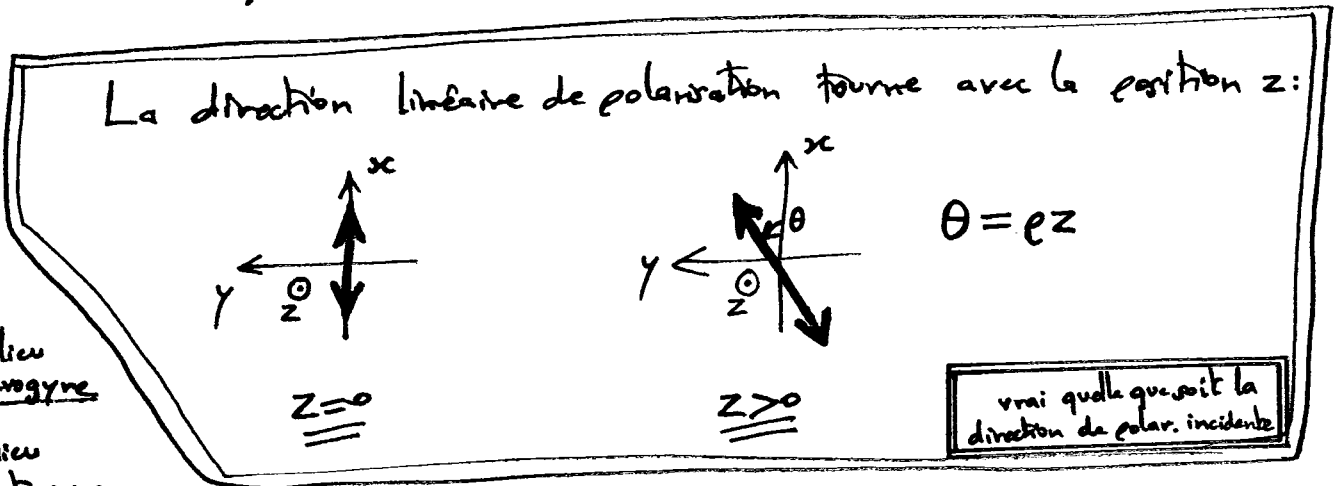


$n$ : indice de refraction du milieu

À tout temps, en tout lieu, le champ  $\vec{E}(z, t)$  est suivant  $\hat{e}_x$  (cf. § II-A-1).

• Dans un milieu l.h.i. présentant de l'activite optique:

$$\vec{E}(z, t) = \text{Re} \left\{ \hat{e}_0 (\hat{e}_x \cos e z + \hat{e}_y \sin e z) e^{i(\omega t - nk_0 z)} \right\}$$



$e > 0$ : milieu levogyre  
 $e < 0$ : milieu dextrogyre

vrai quelle que soit la direction de polar. incidente

$e$ : pouvoir rotatoire ( $\omega$ : rotation spécifique)  $\left( \frac{1}{|e|} \gg d, \text{ en pratique} \right)$

b) • Découverte de l'activité optique en 1811 par François Arago (1786-1853) dans le quartz ( $\text{SiO}_2$  cristallin), pour une propagation suivant l'axe optique. (Le verre ( $\text{SiO}_2$  amorphe) ne présente pas d'activité optique.)

• En 1812, Jean-Baptiste Biot (1774-1862) identifie l'activité optique comme une rotation dans le milieu de la polarisation linéaire de la lumière. En 1815, il découvre le pouvoir rotatoire de certains liquides et gazeux en solution.

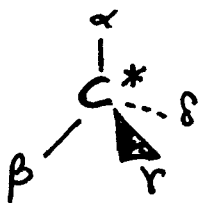
Lois de Biot : 
$$\begin{cases} \alpha \propto \text{épaisseur traversée} \\ \alpha \propto \text{concentration du soluté} \end{cases}$$

→ invention du saccharimètre (pour mesurer des concentrations en sucre)

J.-B. Biot découvre qu'il existe le quartz lévogyre (L) et le quartz dextrogyre (D).

• En 1848, Louis Pasteur (1822-1895) fait le lien entre le caractère L ou D du quartz et sa structure cristalline.

• En 1874, Jacobus Henricus van't Hoff (1852-1911) et Achille Le Bel (1847-1930) expliquent l'activité optique des composés organiques par la présence d'un carbone tétraédrique asymétrique dans les molécules (chiralité) :



$\alpha, \beta, \gamma, \delta$  : groupements différents deux à deux

chiralité  $\Leftrightarrow$  activité optique

( $\alpha$  change de signe avec l'énantiomère) (vu par L. Pasteur)

2) Modes propres de propagation (o.p.p.m.: onde plane progressive monochromatique)

a) Dans un milieu l.h.i. optiquement actif, on cherche à faire se propager une o.p.p.m. polarisée. La polarisation propre, caractérisée par l'enveloppe  $\sum_{ox} \hat{u}_x + \sum_{oy} \hat{u}_y$ , et l'indice de réfraction propre  $n$  sont à déterminer; l'onde recherchée possède ainsi

le champ électrique:  $\vec{E}(z,t) = \text{Re} \left\{ (\sum_{ox} \hat{u}_x + \sum_{oy} \hat{u}_y) e^{i(\omega t - nk_0 z)} \right\}$ .

~~~~~  $\rightarrow z$

En  $z=0$ : amplitude complexe  $\sum_{ox} \hat{u}_x + \sum_{oy} \hat{u}_y$ .

En  $z > 0$ : l'amplitude complexe devient (cf. § 1-a)

$$\left[ \sum_{ox} (\hat{u}_x \cos \rho z + \hat{u}_y \sin \rho z) + \sum_{oy} (\hat{u}_y \cos \rho z + (-\hat{u}_x) \sin \rho z) \right] e^{-ink_0 z}$$

$$= \left[ (\cos \rho z \sum_{ox} - \sin \rho z \sum_{oy}) \hat{u}_x + (\sin \rho z \sum_{ox} + \cos \rho z \sum_{oy}) \hat{u}_y \right] e^{-ink_0 z};$$

mode propre (\*):  $\begin{bmatrix} \cos \rho z & -\sin \rho z \\ \sin \rho z & \cos \rho z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{ox} \\ \sum_{oy} \end{bmatrix} = e^{-i\delta} \begin{bmatrix} \sum_{ox} \\ \sum_{oy} \end{bmatrix}$

(équation aux valeurs propres)

Les polarisations circulaires <sup>(cf. § II-1-2)</sup> gauche:  $\sum \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ , et

droite:  $\sum \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ , résolvent le problème. En effet, on a:

---

(\*) Cette façon de représenter le champ électrique par un vecteur colonne, et l'effet du milieu par une matrice, est appelée formalisme de Jones (inventé en 1941 par Robert Clark Jones).


V-4

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi z & -\sin \varphi z \\ \sin \varphi z & \cos \varphi z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix} = e^{\mp i \varphi z} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix} ,$$

d'où  $\delta_{\pm} = \pm \varphi z$  et  $k_0 m_{\pm} = k_0 n \pm \varphi$ , soit:  $m_{\pm} = n \pm \frac{\varphi}{k_0}$ .

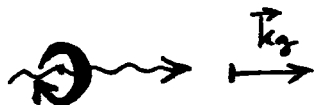
Les modes propres de propagation dans le milieu sont donc les suivants :

⊕ mode polarisé circulaire droit :



$$|\vec{k}_d| = m_d k_0, \quad m_d = n + \frac{\varphi \lambda_0}{2\pi} (= m_+)$$

⊖ mode polarisé circulaire gauche :



$$|\vec{k}_g| = m_g k_0, \quad m_g = n - \frac{\varphi \lambda_0}{2\pi} (= m_-)$$

Un milieu présentant de l'activité optique est donc un milieu qui possède de la birefringence circulaire.<sup>(\*)</sup>

b) Le pouvoir rotatoire  $\rho$  est ainsi lié à la birefringence  $\Delta m = m_d - m_g$ ,

par 
$$\rho = \frac{\pi}{\lambda_0} \Delta m,$$

ou par 
$$\rho = \frac{\omega}{2c} \Delta m, \quad \text{puisque } \lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} = \frac{2\pi c}{\omega}.$$

(\*) Ce point a été découvert par Augustin Fresnel (1788-1827), en 1825.

exemple du quartz <sup>(\*)</sup> :  $\rho = 18,8 \text{ }^\circ/\text{mm}$  à  $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$ ,

d'où :  $\Delta m = 0,661 \cdot 10^{-4}$ .

Pour comparaison, on estime la biréfringence linéaire :  $\Delta n = n_e - n_o = 1,553 - 1,544 = 0,9 \cdot 10^{-2}$ .

Donc  $\Delta m \ll \Delta n$  : la biréfringence linéaire domine la biréfringence circulaire, sauf pour une direction de propagation suivant l'axe optique (ou très proche de l'axe optique).<sup>(\*)</sup>

nota :  $\frac{1}{\rho} = 3,05 \cdot 10^3 \mu\text{m}$   
 $\lambda = \frac{\lambda_0}{n_o} = 0,411 \mu\text{m}$  }  $\frac{1}{\rho} \gg \lambda$  : torsion spatialement lente du plan de polarisation

- autres exemples :
- sélénium (Se)
  - tellure (Te)
  - oxyde de tellure (TeO<sub>2</sub>)
  - thiogallate d'argent (AgGaS<sub>2</sub>)
  - chlorate de sodium (NaClO<sub>3</sub>)
  - ⋮

---

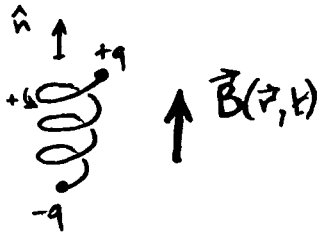
(\*) La propagation lumineuse dans un milieu à la fois anisotrope et optiquement actif, sort du cadre de ce cours (cf., par ex. : Yariv, Yeh Optical Waves in Crystals (Wiley, 1984)).

(\*) L'origine de l'activité optique du quartz est sa structure atomique en hélice.  
(Voir <http://www.uwgb.edu/dutchs/PETROLOGY/QuartzStruc.HTM>  
ou [http://www.crystallmaker.com/video/quartz\\_tutorial\\_video.html](http://www.crystallmaker.com/video/quartz_tutorial_video.html), par exemple.)

### 3) Un modèle de milieu optiquement actif

a) HYPOTHÈSE:

Il existe dans le milieu des molécules hélicoïdales, ou des arrangements hélicoïdaux, qui sont parfaitement conducteurs.



f.é.m. induite:  $\mathbf{e} = -\frac{\partial}{\partial t} (\int \mathbf{A} B(\vec{r}, t)) = -\mu \frac{\partial B}{\partial t}$   
 $(\vec{B} = B \hat{n})$

Si  $\omega \ll \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , alors  $q = C e$  (régime quasi statique),

(C: capacité;  
L: auto-inductance)

donc un dipôle proportionnel à  $\frac{\partial B}{\partial t}$   
pour chaque molécule.

On écrit donc, pour un tel milieu :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} + \epsilon_0 \underbrace{\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{\text{(nouveau)}}$$

ie:

$$\vec{D} = \epsilon_0 n^2 \vec{E} - \epsilon_0 \int \text{rot} \vec{E}$$

(relation constitutive du milieu l.h.i. optiquement actif)

$\int$ , homogène à une longueur, change de signe avec l'hélicité des molécules hélicoïdales.

$\vec{D}$  s'exprime de façon non locale en fonction de  $\vec{E}$ , du fait de la présence du terme en  $\text{rot} \vec{E}$  où intérieurement les dérivées spatiales de  $\vec{E}$ :  $\vec{D}(\vec{r}, t)$  dépend des valeurs de  $\vec{E}$  au voisinage de  $\vec{r}$ .

b) Recherche des modes propres de propagation

Se propage dans le milieu une onde p.p.m. polarisée, de vecteur champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right\}$ .

La relation du milieu s'écrit alors

$$\vec{D}_0 = \epsilon_0 n^2 \vec{E}_0 + i \epsilon_0 \vec{G} \times \vec{E}_0,$$

où  $\vec{G} = \xi \vec{k}$  est le vecteur de giration.  
( $\vec{G}$  est sans dimension.)

Equations de Maxwell:

$$\otimes \vec{B}_0 = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}_0$$

$$\otimes -i\vec{k} \cdot \vec{D}_0 = 0, \text{ i.e. } \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\otimes -i\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$$

$$\otimes -i\vec{k} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \epsilon_0 i\omega (n^2 \vec{E}_0 + i\vec{G} \times \vec{E}_0)$$

Les modes propres de propagation sont donc TEM<sup>(\*)</sup>, et ils sont fixés par l'équation:

$$-i\vec{k} \times \left( \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}_0 \right) = \frac{i\omega}{c^2} (n^2 \vec{E}_0 + i\vec{G} \times \vec{E}_0),$$

c'est-à-dire l'équation aux valeurs propres:

$$i\vec{G} \times \vec{E}_0 = (m^2 - n^2) \vec{E}_0,$$

où  $m = \frac{|\vec{k}|}{k_0}$  est l'indice de réfraction propre recherché.

(\*) Cf. § I-C-2.



V-8

On note  $z$  l'axe suivant la direction et le sens de la propagation:

$$\vec{k} = k \hat{z} = n k_0 \hat{z}.$$


Le vecteur <sup>de</sup> rotation est  $\vec{G} = \xi k \hat{z} = \xi n k_0 \hat{z}$ ,

$$\text{soit } \vec{G} \approx \xi n k_0 \hat{z}$$

à l'ordre le plus bas en  $\xi$ .

L'équation aux valeurs propres prend la forme:

$$i G \begin{bmatrix} -\xi_{oy} \\ \xi_{ox} \end{bmatrix} = (n^2 - n^2) \begin{bmatrix} \xi_{ox} \\ \xi_{oy} \end{bmatrix}, \quad \vec{G} = G \hat{z}.$$

Les solutions sont les polarisations circulaires  $\xi_{oy} = \pm i \xi_{ox}$ . En

$$\text{effet, } i G \begin{bmatrix} \mp i \\ 1 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \pm 1 \\ i \end{bmatrix} = \pm G \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix},$$

$$\text{et l'on a } n_{\pm}^2 - n^2 = \pm G \quad (n_+ = n_d, n_- = n_g),$$

$$\text{soit } \boxed{n_{\pm} = n \pm \frac{G}{2n}} \quad \text{à l'ordre le plus bas en } \xi.$$

Le pouvoir rotatoire vaut alors (cf §2-b):

$$\boxed{e = \frac{\pi}{d_0} (n_+ - n_-) = \frac{\pi}{d_0} \frac{G}{n}}; \quad e \text{ est du signe de } G, \text{ ie: du signe de } \xi.$$

$$\text{Comme } G = \xi n k_0, \text{ on a finalement: } \underline{e = 2\pi^2 \frac{\xi}{d_0^2}}.$$

POUVOIR ROTATOIRE DU QUARTZ (SiO<sub>2</sub>)

|                          |        |        |        |        |        |        |
|--------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\lambda_0(\mu\text{m})$ | 0,4000 | 0,4500 | 0,5000 | 0,5500 | 0,6000 | 0,6500 |
| $e(^{\circ}/\text{mm})$  | 49     | 37     | 31     | 26     | 22     | 17     |

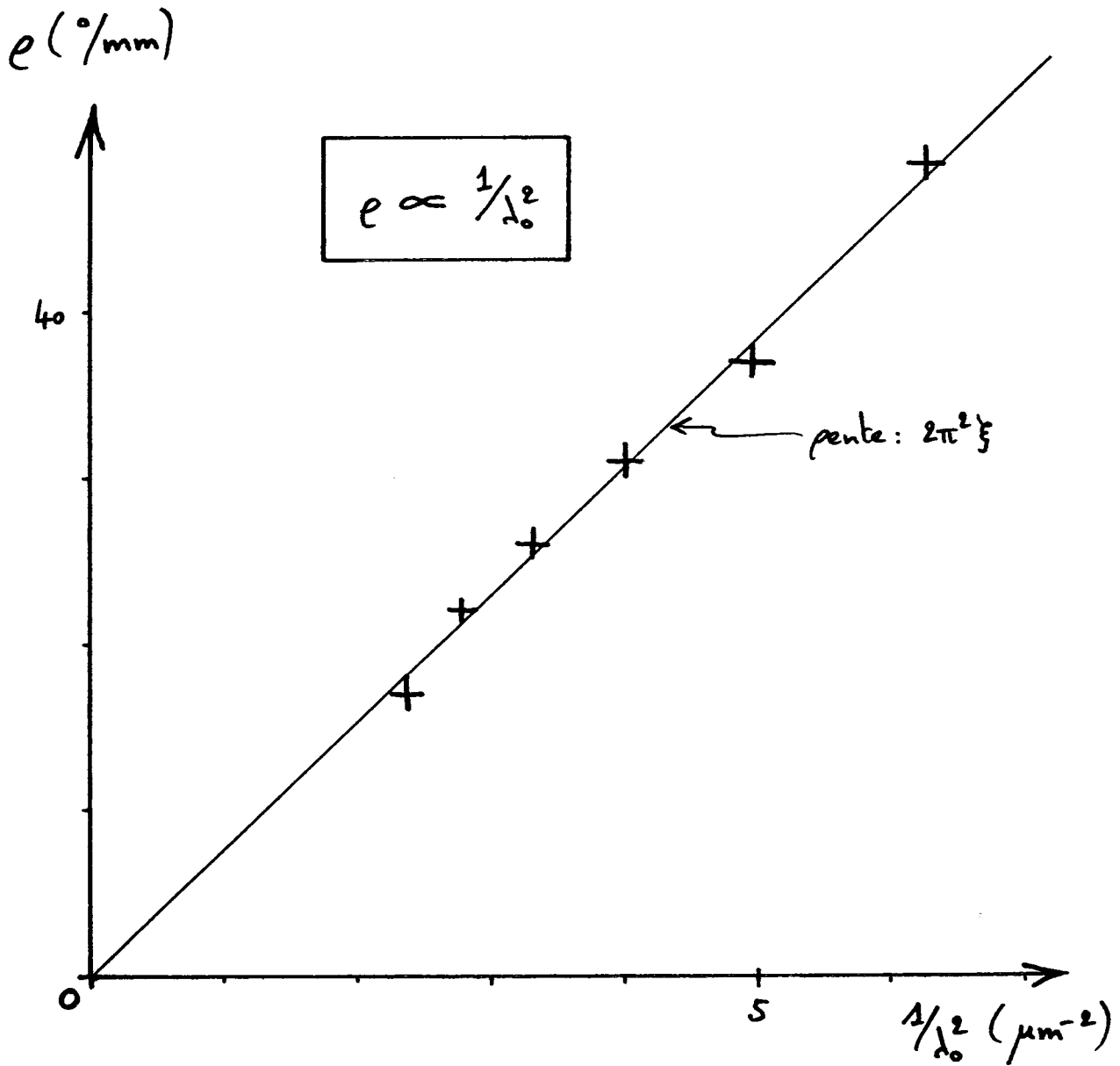


Figure 1

c) discussion

La dépendance du pouvoir rotatoire  $\rho$  en  $1/\lambda_0^2$  est bien vérifiée dans le quartz<sup>(\*)</sup> (cf. Figure 1), pour lequel on tire  $\xi = 6,8 \cdot 10^{-6} \mu\text{m}$  ( $\xi/\lambda \sim 10^5$ ).

Cependant, cette loi  $\rho \propto 1/\lambda_0^2$  n'est pas vérifiée dans l'oxyde de tellure<sup>(\*)</sup> (cf. Figure 2a), pour lequel une dépendance de  $\rho$  en  $\frac{1}{\lambda_0^2 - B^2}$  est plus adaptée (cf. Figure 2b).

Dans ce composé, le pouvoir rotatoire a un comportement résonnant à l'approche de la longueur d'onde  $B = 0,300 \mu\text{m}$ . Située dans le proche UV, cette résonance se fait plus ressentir pour les longueurs d'onde du visible les plus courtes.

D'autres composés suivent une loi du même type (par ex.  $\text{AgGaSe}_2$ ), ou plus généralement une loi de la forme  $\rho = \sum_i \frac{A_i}{\lambda_0^2 - B_i^2}$ .

On ne discutera par <sup>ici</sup> des modèles permettant d'aboutir à cette loi, ni de ceux qui fournissent d'autres lois encore.

---

(\*) Les valeurs de  $\rho$  pour  $\text{SiO}_2$  et  $\text{TeO}_2$ , utilisées dans les Figures 1 et 2, sont tirées de : Yaniv, Yeh Optical Waves in Crystals (Wiley, 1984).

POUVOIR ROTATOIRE DE TeO<sub>2</sub>

|                           |        |        |        |        |        |
|---------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\lambda_0 (\mu\text{m})$ | 0,3698 | 0,4382 | 0,5300 | 0,6328 | 1,0000 |
| $e (\%/\text{mm})$        | 587    | 271    | 143    | 87     | 30     |

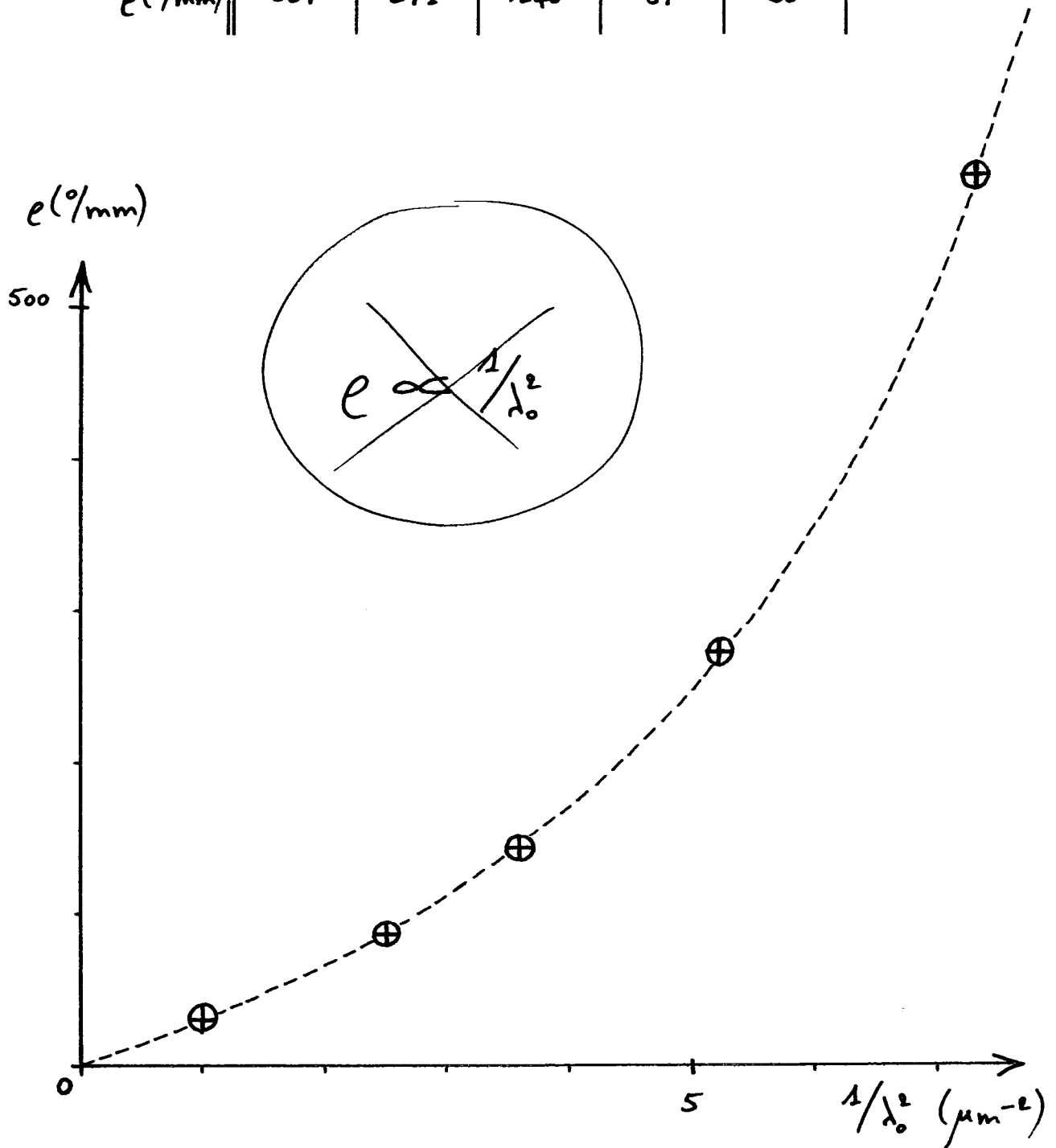


Figure 2a

POUVOIR ROTATOIRE DE  $\text{TeO}_2$  (suite)

$$e = \frac{A}{\lambda_0^2 - B^2}$$

où  $\begin{cases} A = 27,28 \text{ } ^\circ \mu\text{m}^2 / \text{mm} \\ B = 0,29974 \mu\text{m} \end{cases}$

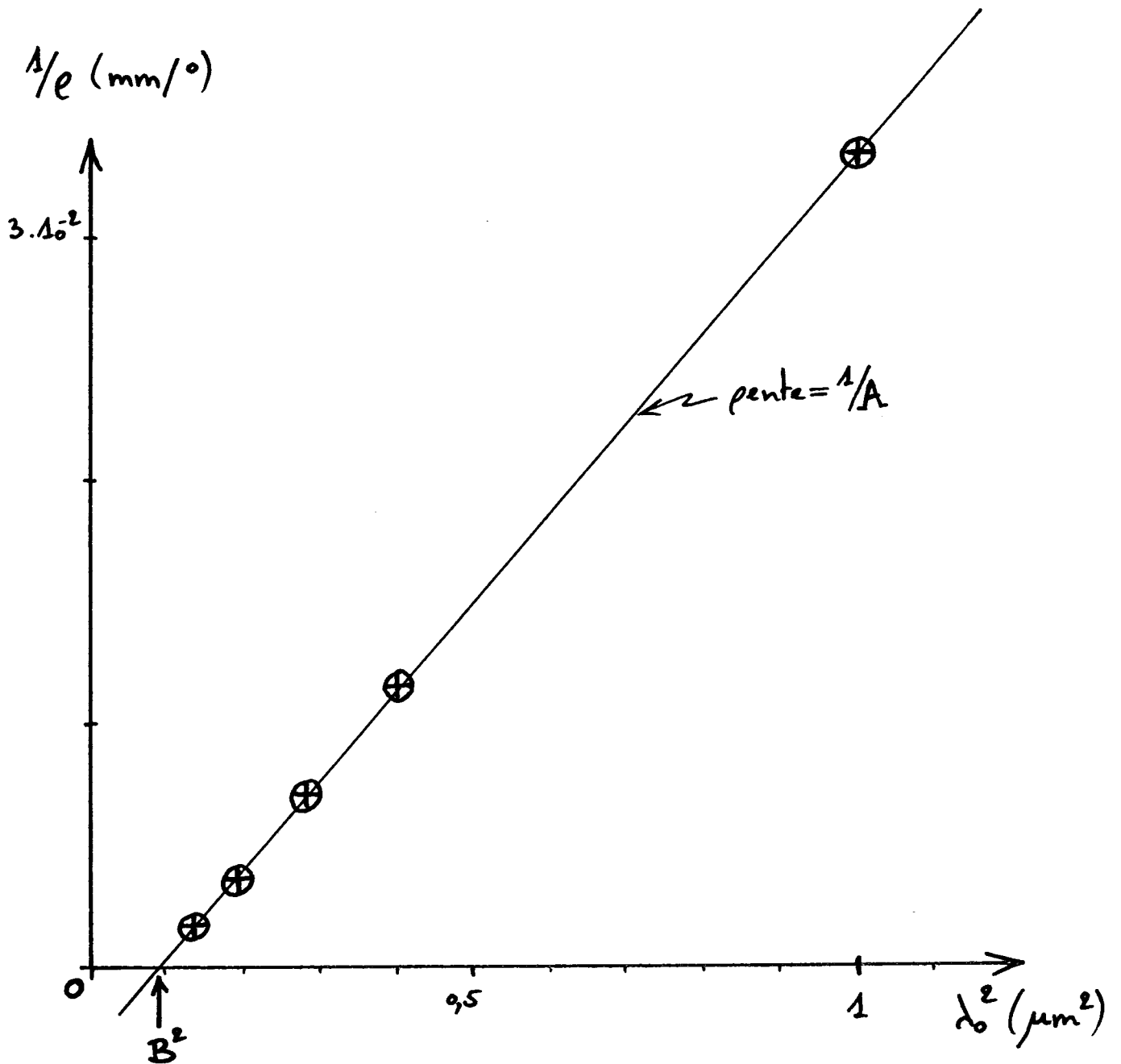
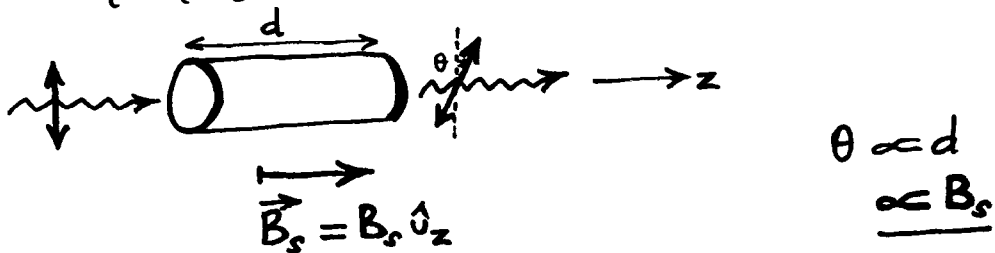


Figure 2b

# Ⓑ Effet Faraday

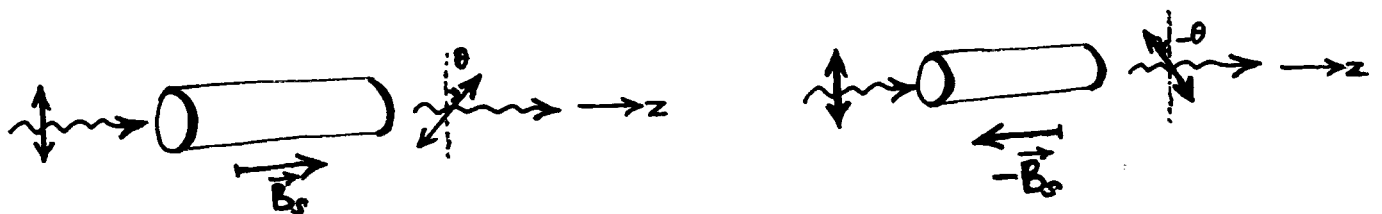
## 1) Présentation

g) Effet Faraday: apparition de pouvoir rotatoire dans un milieu lorsqu'est appliqué un champ magnétique statique  $\vec{B}_s$  parallèlement à la direction de propagation de la lumière<sup>(\*)</sup>



pouvoir rotatoire :  $\rho = V B_s$   
(V: constante de Verdet<sup>(o)</sup>)

Le sens de la rotation de la polarisation est imageé par le signe de  $B_s$ , c'est-à-dire par le sens de  $\vec{B}_s$  par rapport à l'axe z suivant la propagation:



(sur ces figures,  $V > 0$ )

(\*) Michael Faraday (1791-1867) découvre ce phénomène en 1845.

(o) Émile Verdet (1824-1866)

b) exemples :  $V$  à température ambiante ( $1G = 1 \text{ gauss} = 10^{-4} T$ )

eau ( $H_2O$ ) :  $V = 2,182 \cdot 10^{-5} \text{ \%/G.mm}$  ( $\lambda_0 = 589,3 \text{ nm}$ )  
 $20^\circ C$

verre (crown) :  $V = 2,68 \cdot 10^{-5} \text{ \%/G.mm}$  ( $\lambda_0 = 589,3 \text{ nm}$ )  
 $18^\circ C$

calcite ( $CaCO_3$ ) :  $V = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ \%/G.mm}$  ( $\lambda_0 = 589,3 \text{ nm}$ )  
 $300K$

quartz ( $SiO_2$ ) :  $V = 3,25 \cdot 10^{-5} \text{ \%/G.mm}$  ( $\lambda_0 = 546,1 \text{ nm}$ )  
 $300K$

C (diamant) :  $V = 3,88 \cdot 10^{-5} \text{ \%/G.mm}$  ( $\lambda_0 = 589,3 \text{ nm}$ )  
 $300K$

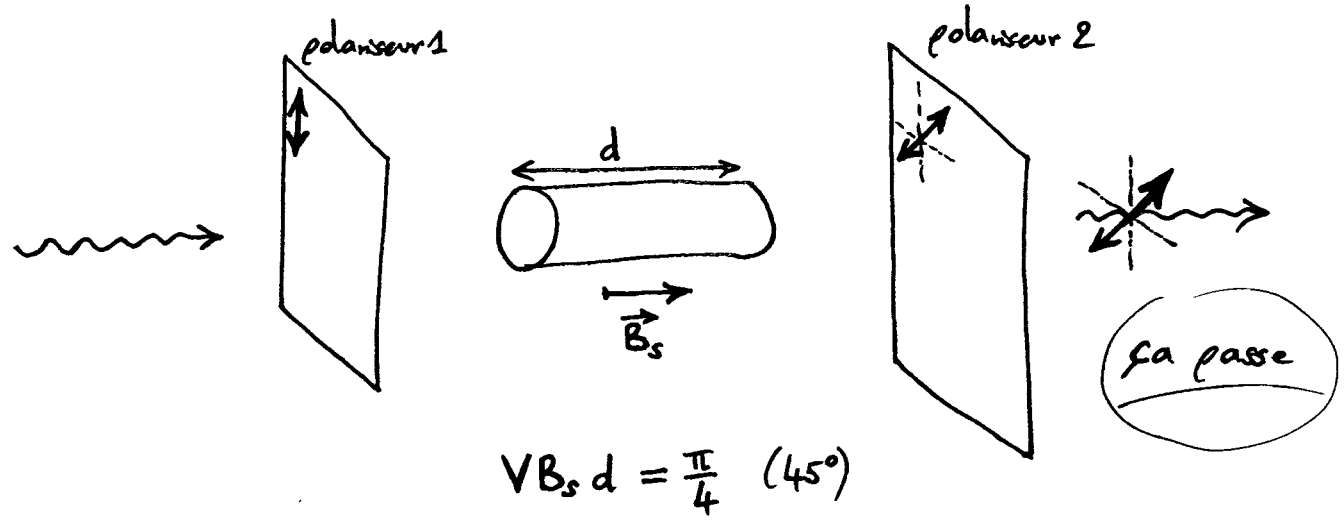
alumine ( $Al_2O_3$ ) :  $V = 4,00 \cdot 10^{-5} \text{ \%/G.mm}$  ( $\lambda_0 = 546,1 \text{ nm}$ )  
 $300K$

verre (flint (Pb)) :  $V = 5,28 \cdot 10^{-5} \text{ \%/G.mm}$  ( $\lambda_0 = 589,3 \text{ nm}$ )

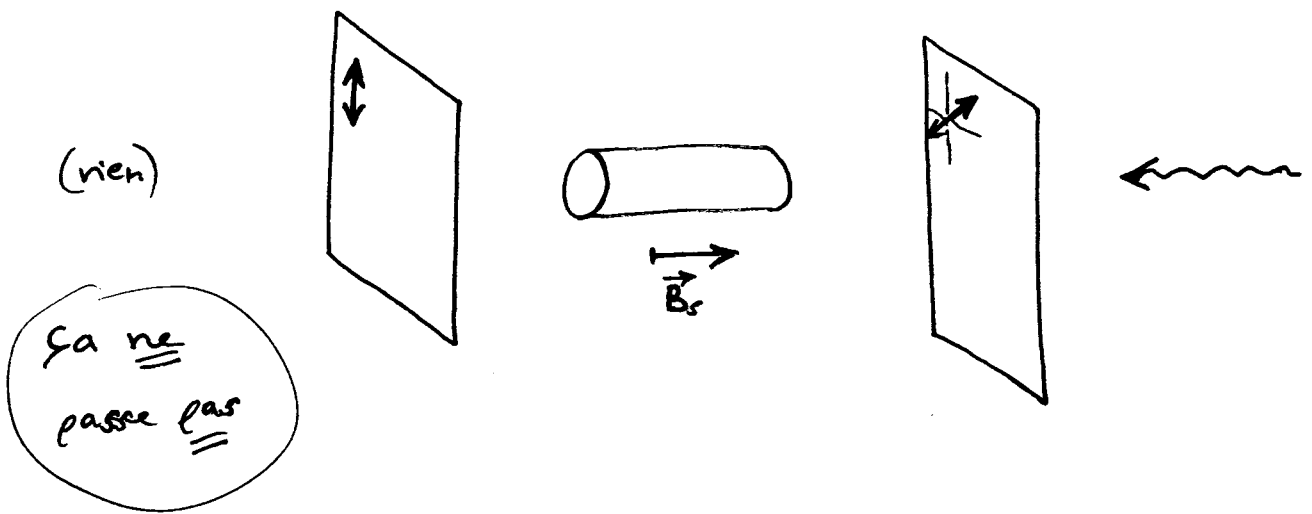
$V_{\text{grand}} \rightarrow$   $Cd_{9,55} Mn_{9,45} Te$  :  $V = 1,15 \cdot 10^{-2} \text{ \%/G.mm}$  ( $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$ )  
 $300K$

$V_{\text{co}} \rightarrow$  grenat de terbium-aluminium :  $V = -1,03 \cdot 10^{-3} \text{ \%/G.mm}$  ( $\lambda_0 = 635 \text{ nm}$ )  
 $(Tb_2Al_5O_{12})$ ,  $300K$

d) application : isolateur optique



En sens inverse :



intérêt : <sup>dans les</sup> montages optiques à diodes laser<sup>(\*)</sup>, pour éviter que de la lumière réfléchie (centres des lentilles, diffusion sur les miroirs, ...) ne revienne vers la source.

---

(\*) ou à lasers impulsionnels.



## 2) Modèle classique de l'effet Faraday

a) Le barycentre du nuage électronique entourant un certain type d'ion, est repéré par son écart  $\vec{\delta}$  à sa position d'équilibre (cf. § I-Δ-4-a). En présence du champ  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  d'une onde lumineuse, le déplacement  $\vec{\delta}_{\vec{r}}(t)$  des nuages situés en  $\vec{r}$  suit l'équation :

$$m \ddot{\vec{\delta}}_{\vec{r}}(t) = \underbrace{-\kappa \vec{\delta}_{\vec{r}}(t)}_{\text{rappel élastique}} - \underbrace{\Gamma \dot{\vec{\delta}}_{\vec{r}}(t)}_{\text{frottement fluide}} + \underbrace{q \vec{E}(\vec{r}, t) + q \dot{\vec{\delta}}_{\vec{r}}(t) \times \vec{B}_0}_{\text{force de Lorentz}},$$

(nouveau)

où  $m$  et  $q$  sont la masse et la charge totales d'un nuage.

(On néglige le champ magnétique de l'onde dans la force de Lorentz.)

On en déduit l'équation dynamique pour la densité de polarisation

$$\vec{P}_1(\vec{r}, t) = N_1 q \vec{\delta}_{\vec{r}}(t) \quad (N_1: \text{nombre des nuages } \overset{\text{en question}}{\text{v. de volume}}):$$

$$\frac{\partial^2 \vec{P}_1}{\partial t^2} + \Gamma \frac{\partial \vec{P}_1}{\partial t} + \omega_0^2 \vec{P}_1 = \omega_0^2 \epsilon_0 \chi_{1s} \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{(-e)}{m_e} \frac{\partial \vec{P}_1}{\partial t} \times \vec{B}_0,$$

où  $\Gamma = \frac{\Gamma}{m}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$  et  $\chi_{1s} = \frac{N_1 q^2}{\epsilon_0 m \omega_0^2}$ . (On suppose  $\Gamma \ll \omega_0$ .)

Des équations semblables sont vérifiées par les densités de polarisation dues aux autres types de nuages électroniques.

b) Se propage l'onde p.p.m.  $\vec{E}(\vec{r},t) = \text{Re} \left\{ \vec{\Sigma} e^{i(\omega t - kz)} \right\}$ .

L'équation précédente s'écrit  $\rightsquigarrow \longrightarrow z$

$$\vec{D}_{\omega_0} = \epsilon_0 \chi_{rs} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{\Sigma}_0 + \frac{(-e)}{me} \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{D}_{\omega_0} \times \vec{B}_s,$$

en supposant que  $\omega$  soit éloignée de la pulsation de résonance  $\omega_0$  ( $|\omega - \omega_0| \gg \Gamma$ ). D'où l'on tire, à l'ordre le plus bas

en  $\vec{B}_s$  :

$$\vec{D}_{\omega_0} = \epsilon_0 \chi_{rs} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{\Sigma}_0 + \frac{(-e)}{me} \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \left( \epsilon_0 \chi_{rs} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{\Sigma}_0 \right) \times \vec{B}_s.$$

L'effet du champ  $\vec{B}_s$  ne se fait sentir que des ondes électroniques ayant une pulsation de résonance  $\omega_0$  proche de la pulsation optique  $\omega$ .

En ne retenant qu'une seule résonance, il vient :

$$\vec{D}_0 = \epsilon_0 n(\omega)^2 \vec{\Sigma}_0 + i \epsilon_0 \vec{G} \times \vec{\Sigma}_0,$$

où  $\vec{G} = \gamma \vec{B}_s$ ,  $\gamma = \chi_{rs} \frac{\omega_0^2 \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \frac{e}{me}$  étant le coefficient de magnétogiration.

On se retrouve dans la même situation qu'au § A-3-b,  $\vec{G} = \gamma \vec{B}_s$  remplaçant le vecteur <sup>de</sup> giration  $\vec{G} = \int \vec{k}$  de l'activité optique.  $\vec{G} = \gamma B_s \hat{z}$  étant suivant la propagation, on a donc un pouvoir rotatoire  $e = \frac{\omega}{2c} \frac{(\gamma B_s)}{n}$ , soit une constante de

Verdet

$$V = \frac{\chi_{rs}}{2n} \frac{e}{m_e c} \frac{\omega_0^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

CONSTANTE DE VERDET DE  $Tb_2Al_5O_{12}$   
(à 300k)

|                                     |                        |                        |                        |                        |                       |                       |                       |                        |
|-------------------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| $\lambda_0 (\mu\text{m})$           | 0,405                  | 0,450                  | 0,480                  | 0,520                  | 0,546                 | 0,578                 | 0,635                 | 0,670                  |
| $V (^\circ/\text{G}\cdot\text{mm})$ | $-3,777 \cdot 10^{-3}$ | $-2,608 \cdot 10^{-3}$ | $-2,150 \cdot 10^{-3}$ | $-1,732 \cdot 10^{-3}$ | $-1,52 \cdot 10^{-3}$ | $-1,31 \cdot 10^{-3}$ | $-1,03 \cdot 10^{-3}$ | $-0,903 \cdot 10^{-3}$ |

$$V = \frac{A \lambda_0^2}{(\lambda_0^2 - B^2)^2} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} A = -3,326 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ \mu\text{m}^2 / \text{G}\cdot\text{mm} \\ B = 0,2064 \mu\text{m} \end{cases}$$

$\lambda_0 / \sqrt{|V|} \text{ (}\mu\text{m} \cdot (^\circ/\text{G}\cdot\text{mm})^{-1/2}\text{)}$

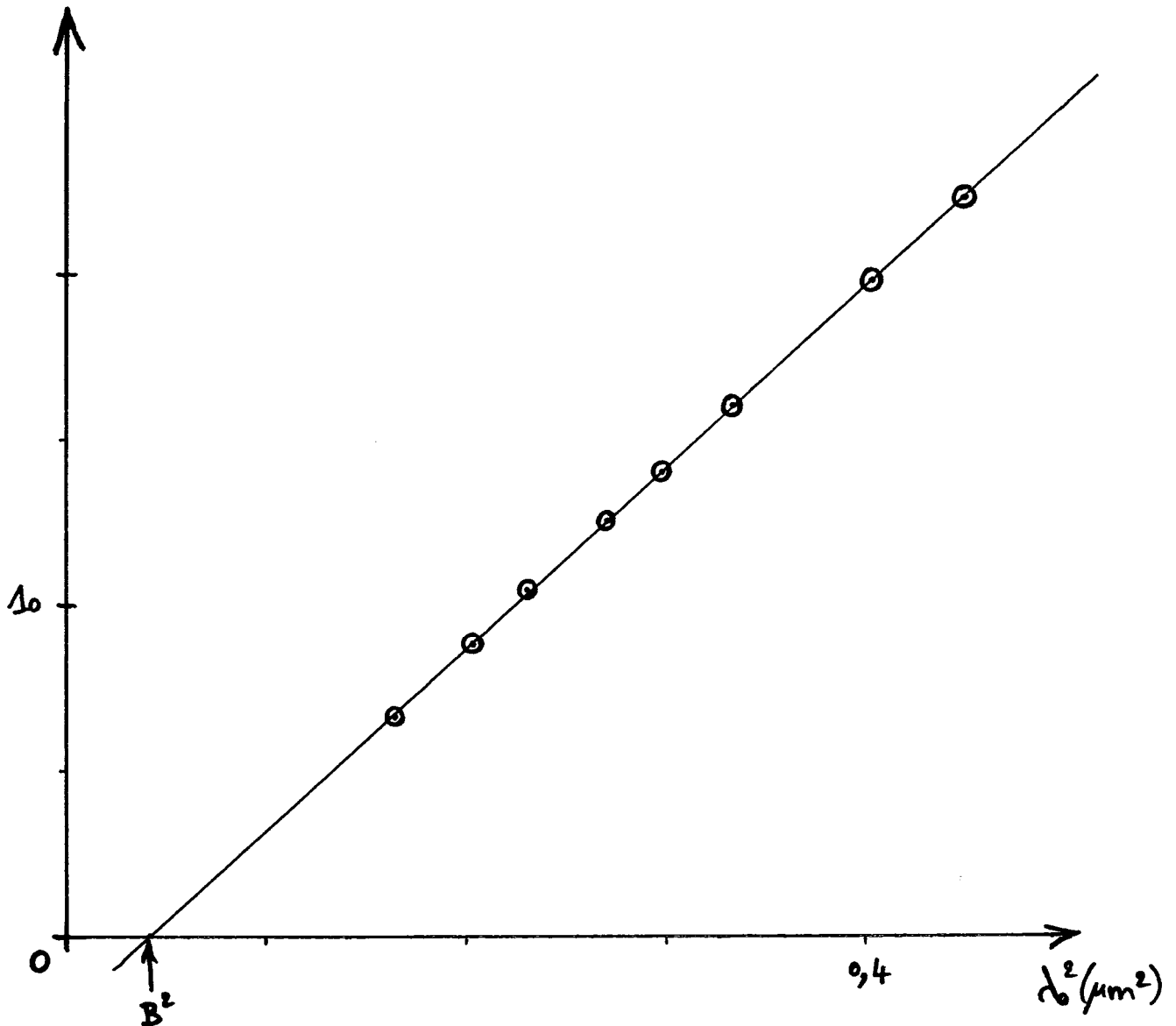


Figure 3

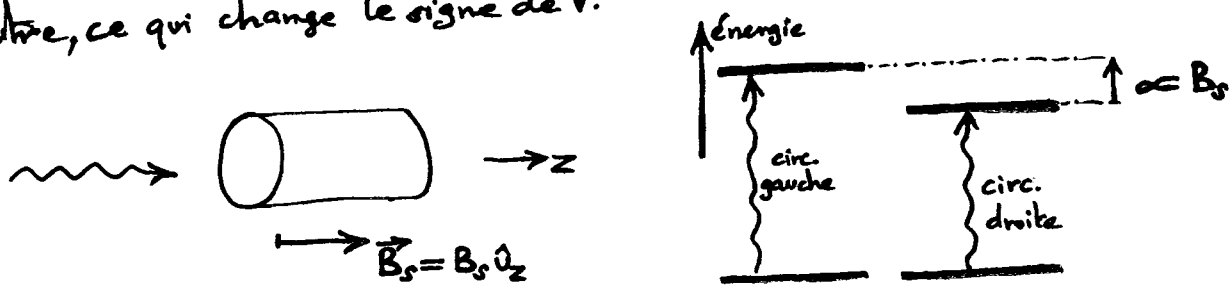
c) discussion

Sur l'exemple du grenat de terbium-aluminium, on constate que la constante de Verdet varie suivant  $\frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$ , c'est-à-dire

$$V \propto \frac{\lambda_0^2}{(\lambda_0^2 - B^2)^2}, \text{ avec } \omega_0 = \frac{2\pi c}{B} \text{ (cf. Figure 3)}^{(*)}. \text{ Cette}$$

dépendance spectrale de  $V$  est donc, au premier abord, en parfait accord avec le modèle classique de l'effet Faraday.

Cependant, ce modèle classique est en défaut sur un point essentiel : il ne prédit que des valeurs positives pour la constante de Verdet. Cette difficulté est levée dans une description quantique : l'effet Faraday provient alors d'une séparation spectrale imposée par le champ  $\vec{B}_s$ , entre deux transitions provoquées par les polarisations circulaires gauche et droite de la lumière se propageant suivant  $\vec{B}_s$  ; cette séparation spectrale<sup>(o)</sup>, linéaire en  $B_s$ , peut changer de signe d'un composé à l'autre, ce qui change le signe de  $V$ .



(o) découverte en 1896 par Pieter Zeeman (1865-1943), prix Nobel 1902.

(\*) Les valeurs de  $V$  sont tirées du Handbook of Chemistry and Physics, 85<sup>th</sup> ed., 2004-2005.

## ③ Rotateur à cristal liquide

### 1) Introduction

a) Un cristal liquide est fait de molécules organiques allongées qui possèdent un ordre d'orientation (comme dans un cristal), mais pas d'ordre de position (comme dans un liquide). C'est un fluide. L'état cristal liquide disparaît avec la température.

La variété d'intérêt ici est celle dite nématique :  
 les molécules s'orientent dans une direction moyenne, tandis que leur position est entièrement aléatoire dans les trois directions de l'espace.\*



Un cristal nématique est un milieu transparent anisotrope uniaxial, l'axe optique étant aligné avec les molécules. Typiquement,  $n_e > n_o$  et la biréfringence est remarquablement élevée :  $n_e - n_o \sim \text{quelques } 10^{-1}$ ,

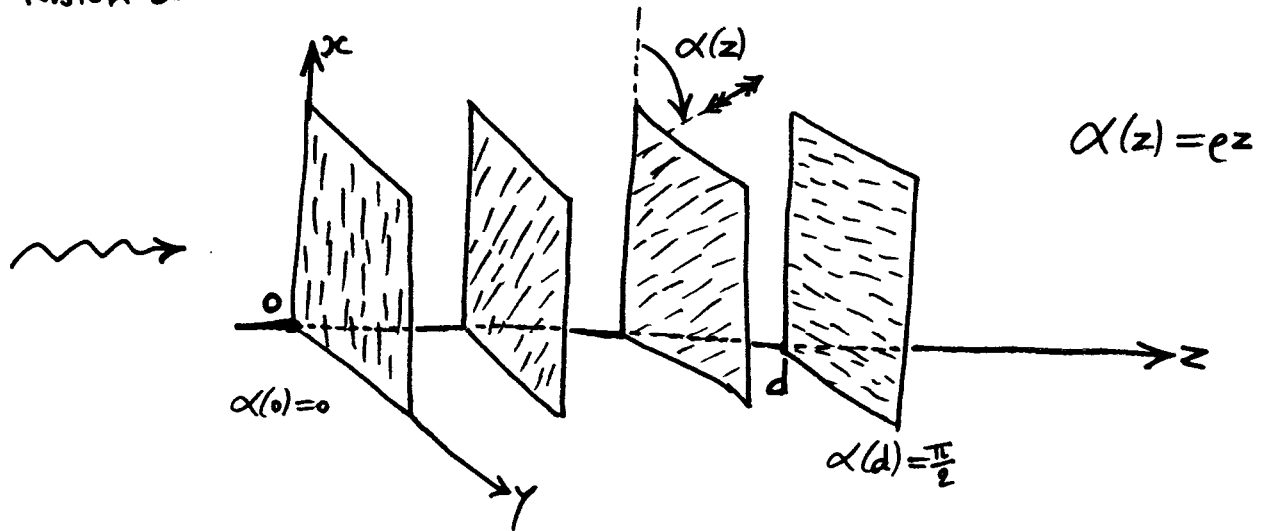
où  $n_o, n_e \sim 1,5$ . (Pour le quartz,  $n_e = 1,55$  et  $n_o = 1,54$  :  $n_e - n_o = 10^{-2}$  ;  
 pour la calcite,  $n_e = 1,48$  et  $n_o = 1,66$  :  $n_o - n_e = 0,16$ .)

b) Lorsqu'une couche de cristal liquide <sup>nématique</sup> est placée entre deux lames de verre parallèles, on peut imposer aux molécules d'être orientées suivant une direction donnée sur ces lames, en les

---

(\* Il existe une variété de cristaux liquides, appelée smectique, où les molécules se répartissent en couches : l'ordre est cristallin à une dimension (sans intérêt ici).

polissant rectilignement suivant cette direction. En plaçant les directions de polissage des deux lames à  $90^\circ$  l'une de l'autre, on obtient un crystal liquide nématique torsadé<sup>(\*)</sup>, d'angle de torsion  $90^\circ$ .



C'est ce type de montage à crystal liquide qui est utilisé dans les afficheurs à cristaux liquides (appelés LCD, pour Liquid Crystal Display).

## 2) Propagation lumineuse dans un nématique torsadé

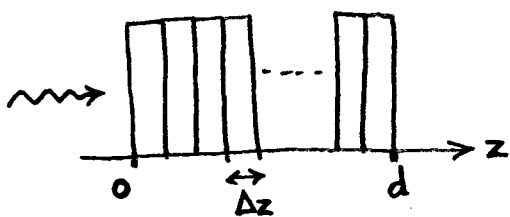
a) Un crystal liquide nématique torsadé est un milieu inhomogène et anisotrope, ayant un axe optique d'orientation  $\alpha(z) \stackrel{=ez}{\text{dans un plan } z}$  orthogonal à l'axe de torsion.

On considère une onde lumineuse envoyée orthogonalement aux lames de verre parallèles (séparées de la distance  $d$ ).

Pour étudier son évolution dans le milieu, on le divise en  $N$  tranches

(\*) Un crystal liquide choléstérique possède naturellement une torsion (sans intérêt ici).

d'épaisseur  $\Delta z = \frac{d}{N}$ , perpendiculaires à l'axe  $z$ , chacune d'elles se comportant comme une lame homogène uniaxiale. Le déphasage entre les composantes propres à la traversée d'une lame vaut:<sup>(\*)</sup>



$$(n_e - n_o) k_0 \Delta z,$$

tandis que l'axe optique tourne

d'un angle (cf. § 1-b):

$$e \Delta z,$$

d'une lame à l'autre. On va montrer que la condition<sup>(\*)</sup>

$$e \ll \Delta n k_0 \quad (\Delta n = n_e - n_o),$$

permet qu'une polarisation linéaire arrivant parallèle aux molécules en  $z=0$ , tourne dans le milieu, au cours de sa propagation, en suivant l'alignement des molécules. Le dispositif sert alors de rotateur de polarisation, de pouvoir rotatoire  $e$ . Imposé par la torsion du cristal liquide,  $e$  ne dépend pas de  $d_0$ .

b) En  $z=0$ , l'amplitude complexe du champ incident est

$$\vec{E}(0) = \sum_{\omega_x} \hat{u}_x + \sum_{\omega_y} \hat{u}_y = \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{bmatrix}_{xy} ;$$

après traversée de la première lame (entre  $z=0$  et  $z=\Delta z$ ), elle est

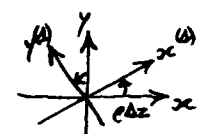
devenue 
$$\vec{E}(\Delta z) = \sum_{\omega_x} e^{-in_e k_0 \Delta z} \hat{u}_x + \sum_{\omega_y} e^{-in_o k_0 \Delta z} \hat{u}_y \quad (k_0 = \frac{\omega}{c}),$$

(\*) réalisée en pratique

(\*) Cf. § III-B-2.

soit  $\vec{E}(\Delta z) = e^{-i\bar{n}k\Delta z} \begin{bmatrix} \vec{E}_x e^{-i\frac{\Delta n}{2}k\Delta z} \\ \vec{E}_y e^{+i\frac{\Delta n}{2}k\Delta z} \end{bmatrix}_{xy}$  où  $\bar{n} = \frac{n_o + n_e}{2}$ .

Pour obtenir l'amplitude complexe  $\vec{E}(2\Delta z)$  après la deuxième lame, il est utile d'exprimer  $\vec{E}(\Delta z)$  dans les axes propres  $x^{(1)}y^{(1)}$  de cette lame (la  $(m+1)^{\text{e}}$  lame est située, en entrée, à  $z = m\Delta z$ ):

$$\begin{bmatrix} \vec{E}_{x^{(1)}}(\Delta z) \\ \vec{E}_{y^{(1)}}(\Delta z) \end{bmatrix}_{x^{(1)}y^{(1)}} = e^{-i\bar{n}k\Delta z} \begin{bmatrix} \cos\varphi\Delta z & \sin\varphi\Delta z \\ -\sin\varphi\Delta z & \cos\varphi\Delta z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\Delta n}{2}k\Delta z} & 0 \\ 0 & e^{+i\frac{\Delta n}{2}k\Delta z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{E}_x \\ \vec{E}_y \end{bmatrix}_{xy}$$


soit, à l'ordre 1 en  $\Delta z$  ( $e\Delta z \ll 1$  et  $\frac{\Delta n}{2}k\Delta z \ll 1$ ):

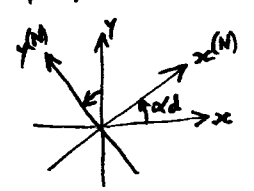
$$\begin{bmatrix} \vec{E}_{x^{(1)}}(\Delta z) \\ \vec{E}_{y^{(1)}}(\Delta z) \end{bmatrix}_{x^{(1)}y^{(1)}} = e^{-i\bar{n}k\Delta z} \begin{bmatrix} 1 - i\frac{\Delta n}{2}k\Delta z & e\Delta z \\ -e\Delta z & 1 + i\frac{\Delta n}{2}k\Delta z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{E}_x \\ \vec{E}_y \end{bmatrix}_{xy}$$

L'obtention de  $\vec{E}(2\Delta z)$ , exprimée dans les axes propres  $x^{(2)}y^{(2)}$  de la 3<sup>e</sup> lame à venir, se fait avec le même raisonnement que précédemment, et

il vient :

$$\begin{bmatrix} \vec{E}_{x^{(2)}}(2\Delta z) \\ \vec{E}_{y^{(2)}}(2\Delta z) \end{bmatrix}_{x^{(2)}y^{(2)}} = e^{-i\bar{n}k2\Delta z} \begin{bmatrix} 1 - i\frac{\Delta n}{2}k\Delta z & e\Delta z \\ -e\Delta z & 1 + i\frac{\Delta n}{2}k\Delta z \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \vec{E}_x \\ \vec{E}_y \end{bmatrix}_{xy}$$

Finalement, après la traversée des N lames, on obtient l'amplitude complexe  $\vec{E}(N\Delta z) = \vec{E}(z=d)$  exprimée dans le repère  $x^{(N)}y^{(N)}$ , tourné de  $N\varphi\Delta z = e\varphi d$  par rapport à  $xy$  :





$$\begin{bmatrix} \tilde{\epsilon}_x^{(N)}(z=d) \\ \tilde{\epsilon}_y^{(N)}(z=d) \end{bmatrix}_{x^{(N)}, y^{(N)}} = e^{-i\bar{n}k_0 N \Delta z} \begin{bmatrix} 1 - i\frac{\Delta n}{2} k_0 \Delta z & e^{\Delta z} \\ -e^{-\Delta z} & 1 + i\frac{\Delta n}{2} k_0 \Delta z \end{bmatrix}^N \begin{bmatrix} \tilde{\epsilon}_x \\ \tilde{\epsilon}_y \end{bmatrix}_{xy}$$

Lorsque  $e \ll \frac{\Delta n}{2} k_0$ , on peut négliger les coefficients non diagonaux de la matrice à élever à la puissance  $N$ . Il vient alors, en utilisant  $(1 \pm i\frac{\Delta n}{2} k_0 \frac{d}{N})^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \exp(\pm i\frac{\Delta n}{2} k_0 d)$  :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\epsilon}_x^{(N)}(z=d) \\ \tilde{\epsilon}_y^{(N)}(z=d) \end{bmatrix}_{x^{(N)}, y^{(N)}} = \begin{bmatrix} e^{-inck_0 d} \tilde{\epsilon}_x \\ e^{-inck_0 d} \tilde{\epsilon}_y \end{bmatrix}_{x^{(N)}, y^{(N)}}$$

Si l'onde incidente est polarisée suivant  $x$ ,  $\tilde{\epsilon}_y = 0$  et la seule composante du champ émergent est  $\tilde{\epsilon}_x^{(N)}(d) = \tilde{\epsilon}_x e^{-inck_0 d}$ .  
Le cristal liquide nématique torradé a servi de guide de la polarisation linéaire incidente, qui a tourné finalement de l'angle  $\rho d$ . Le dispositif se comporte, <sup>donc</sup> dans ces conditions, comme un rotateur de polarisation, de pouvoir rotatoire  $e$ .

c) Il existe <sup>cependant</sup> une différence notable entre ce rotateur et un rotateur à activité optique ou à effet Faraday. Ces deux derniers tournent de la même manière une polarisation linéaire incidente, quelle que soit son orientation <sup>initiale</sup>, alors que le rotateur à cristal liquide

n'agit comme tel que pour une polarisation incidente alignée avec les (ou orthogonale aux) molécules du cristal liquide en entrée. Ce dispositif possède des axes propres, qui tournent avec les molécules du cristal liquide <sup>tout</sup> <sub>en</sub> entraînant avec eux les composantes de l'onde lumineuse; au contraire, un rotateur à activité optique ou à effet Faraday possède des modes propres de propagation circulaires, et n'a donc pas d'axes propres.

### 3) Application : Écrans à cristaux liquides

Au montage expérimental précédemment décrit <sup>(cf § 1-b)</sup> sont ajoutés deux polariseurs linéaires, en  $z=0$  et  $z=d$ , alignés avec l'axe optique. Ces deux polariseurs sont donc passants pour la lumière se propageant suivant l'axe  $z$ .

L'application d'un champ électrostatique permet d'annuler la torsion du cristal liquide nématique, en maintenant les molécules orientées suivant  $x^{(*)}$ : la lumière ne passe plus le polariseur de sortie. C'est ainsi que fonctionnent les écrans à cristaux liquides: les zones où est appliqué un champ électrostatique sont noires. La première commercialisation d'un écran à cristal liquide date de 1973.

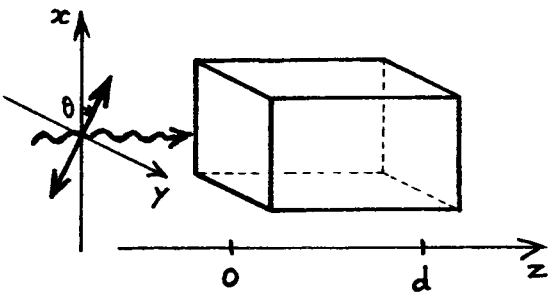
(\*) ou suivant  $z$ , cela dépend des molécules du cristal liquide nématique. (Le champ électrostatique est suivant  $z$ .)

# INTRODUCTION À LA PHOTONIQUE

## Exercices V

1) Birefringence circulaire. Un milieu optiquement actif est un milieu avec de la birefringence circulaire : les modes propres de propagation d'une lumière monochromatique sont polarisés circulairement gauche et droit, par référence à la direction et au sens de propagation ; les indices de réfraction propres associés sont notés  $n_g$  et  $n_d$ , respectivement.

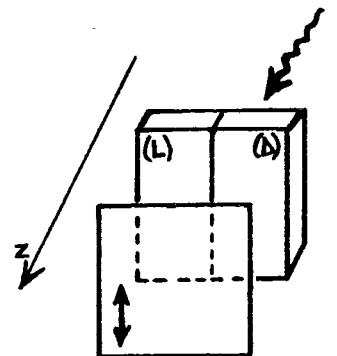
Une onde lumineuse plane monochromatique ( $\omega$ ) arrive en incidence normale sur ce milieu ; sa direction et son sens de propagation définissent l'axe  $z$ . La polarisation linéaire de cette onde est représentée par l'angle  $\theta$  qu'elle fait avec l'axe  $x$  d'un repère  $xy$  arbitrairement fixé,



orthogonalement à l'axe  $z$ . a) Écrire l'amplitude complexe de l'onde incidente  $\vec{E}(z < 0) = E_0 (\cos\theta \hat{u}_x + \sin\theta \hat{u}_y) e^{-ik_0 z}$ ,  $k_0 = \frac{\omega}{c}$ , sur les états de polarisation circulaires gauche et droit,  $\hat{u}_g = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{u}_x - i\hat{u}_y)$  et  $\hat{u}_d = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{u}_x + i\hat{u}_y)$ . b) En déduire l'amplitude complexe  $\vec{E}(z)$  de l'onde à l'intérieur du milieu. Préciser la polarisation de l'onde émergente. Quel est le pouvoir rotatoire du milieu ? (On néglige tout effet de réflexion aux interfaces.)

2) Biquartz de Soleil. Un biquartz de Soleil est formé de deux lames de quartz accolées par la tranche, ayant toutes deux leur axe optique perpendiculaire aux faces. L'une des lames est lévogyre, l'autre dextrogyre.

Leur épaisseur commune est ajustée de façon qu'une polarisation linéaire dans le jaune ( $\lambda_0 = 0,55 \mu\text{m}$ ) soit tournée de  $\pm \frac{\pi}{2}$  après les avoir traversées. Un polariseur est placé après les deux lames, sa direction passante étant alignée



avec leur frontière rectiligne; l'ensemble du dispositif des deux lames accolées et du polariseur, est solidaire.

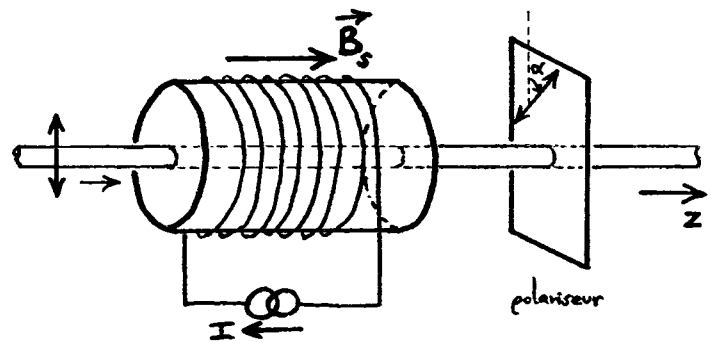
a) Qu'observe-t-on après le dispositif si l'on envoie une lumière jaune polarisée rectilignement suivant la frontière des deux lames? Quel est l'effet d'une petite rotation du dispositif autour de l'axe  $z$  de propagation de la lumière?

b) Mêmes questions si l'on envoie une lumière bleue (le pouvoir rotatoire du quartz varie en  $\frac{1}{\lambda_0^2}$ ). Mêmes questions si l'on envoie une lumière rouge.

c) En déduire que ce dispositif permet de pointer la direction de polarisation linéaire d'un faisceau de lumière blanche.

3) Modulateur à effet Faraday. Un faisceau lumineux monochromatique, polarisé linéairement, passe au travers d'un barreau, de longueur  $d$ , taillé dans un milieu présentant de l'effet Faraday.

Après le barreau, est positionné un polariseur dont la direction passante fait l'angle  $\alpha$  avec la polarisation du faisceau incident. Le champ



magnétique longitudinal  $\vec{B}_z$  qui règne dans le barreau, est créé par un bobinage qui l'entoure et parcouru par un courant d'intensité  $I$ . Lorsque  $I(t)$  varie sinusoidalement, alors  $\vec{B}_z(t) = B_z(t) \hat{0}_z$  aussi :  $B_z(t) = B_0 \cos \Omega t$ .

Montrer que dans ces conditions, la polarisation linéaire à la sortie du barreau a une direction oscillante, et que la puissance lumineuse après le polariseur possède une modulation à  $\Omega$  (on a  $|VB_0 d| \ll 1$ ). Quelles(s) valeur(s) de  $\alpha$  maximise(nt) l'amplitude de cette modulation de puissance du faisceau?

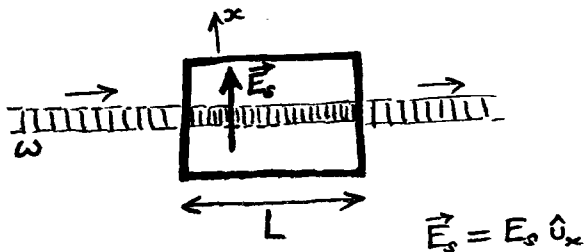
4) Polariseurs en éventail. Un faisceau linéairement polarisé suivant  $z$  est transmis au travers de  $N$  polariseurs dont les directions passantes font  $\theta$ , puis  $2\theta$ , puis  $3\theta$ , ..., enfin  $N\theta$  avec l'axe  $z$ , avec  $\theta = \frac{\pi}{2N}$ . Montrer que le facteur de transmission en amplitude vaut  $\cos^N \theta$ , et qu'il tend vers 1 lorsque  $N \rightarrow \infty$ .

## VI - Electro-Optique

Effet électro-optique : changement de l'indice de réfraction (plus généralement, des indices de réfraction) d'un milieu, provoqué par l'application d'un champ électrostatique.

origine : le champ électrostatique déforme les nuages électroniques à l'intérieur du milieu, ce qui change sa susceptibilité électrique pour une onde lumineuse qui le traverse. Bref, un milieu auquel est appliqué un champ électrostatique, devient un autre milieu optique.

exemple 1: milieu optiquement isotrope



indice de réfraction:

$$n(E_s) = n + \delta n(E_s)$$

Le déphasage à la traversée du milieu est  $\Psi(E_s) = n(E_s) k_0 L$ ,  $k_0 = \frac{\omega}{c}$ ,

$$\text{ie: } \Psi(E_s) = n k_0 L + \delta \Psi(E_s)$$

$$\text{où } \delta \Psi(E_s) = \delta n(E_s) k_0 L = 2\pi \delta n(E_s) \frac{L}{\lambda_0}$$

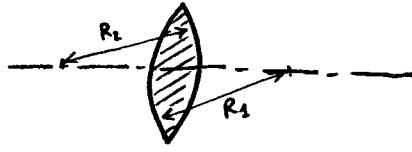
Si  $\delta n(E_s) \approx 10^{-5}$ , alors  $\delta \Psi \approx 1 \text{ rad}$  si  $L = \frac{\lambda_0}{2\pi \delta n(E_s)} \approx 1 \text{ cm}$ :  
( $\approx 60^\circ$ )

La faible valeur de  $\delta n(E_s)$  produit un effet notable du fait qu'en pratique, on a  $L \gg \lambda_0$  avec  $\delta n(E_s) \times \frac{L}{\lambda_0} \sim 1$ .

VI-2 L'indice de réfraction  $n(E_s)$  dépendant de  $\vec{E}_s = E_s \hat{0}_x$ , on peut imaginer des dispositifs optiques contrôlables électriquement :

existence? →

- lentille de distance focale variable :

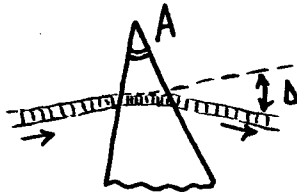


$f(E_s)$  telle que

$$\frac{1}{f(E_s)} = (n(E_s) - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

on fait autrement (cf. chap. VII) →

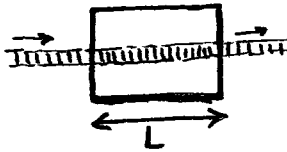
- prisme à déviation variable :



$$\Delta(E_s) = [n(E_s) - 1] A \quad (A \ll 1)$$

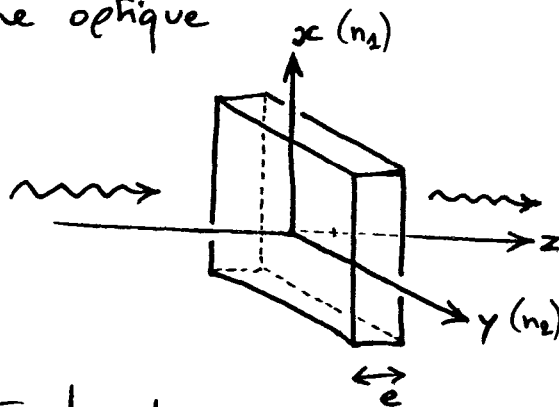
EXISTE →

- contrôle de la phase optique :



$$\varphi(E_s) = n(E_s) k_0 L$$

exemple 2 : lame optique



Le déphasage entre les deux

modes propres de propagation (cf. § III<sup>-B-2</sup>) est  $\Delta\varphi(E_s) = (n_2(E_s) - n_1(E_s)) k_0 e$ ,

d'où : • contrôle électrique de la polarisation  
→ de la lumière

EXISTE

# (A) Principes de l'électro-optique

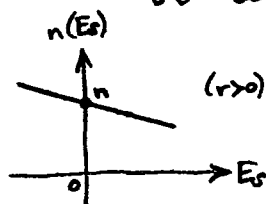
## 1) Effet Pockels

a) Un indice de réfraction ne varie que faiblement avec le champ électrostatique  $E_s$  appliqué. On effectue <sup>donc</sup> un développement aux ordres successifs en  $E_s$  :

$$n(E_s) = n + a_1 E_s + a_2 E_s^2 + \dots,$$

où  $n = n(E_s=0)$ ,  $a_1 = \frac{\partial n}{\partial E_s}(E_s=0)$ ,  $a_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial E_s^2}(E_s=0)$ .

Dans les milieux où  $a_1 \neq 0$ , le terme linéaire en  $E_s$  est dominant<sup>(\*)</sup>. On écrit alors conventionnellement



$$n(E_s) = n - \frac{1}{2} r n^3 E_s, \quad (\text{effet Pockels})$$

où  $r$  est le coefficient électrooptique linéaire ou coefficient Pockels.

L'origine de cette notation réside en l'étude de la variation de l'impédance  $\eta = \frac{1}{n^2}$  sous l'effet de  $E_s$  :

$$\frac{1}{n(E_s)^2} = \frac{1}{n^2} + r E_s.$$

C'est la variation de l'impédance électrique qui est d'intérêt pour l'étude de l'électro-optique des milieux anisotropes (cf. § B).

(\*) L'effet électro-optique linéaire a été découvert par Friedrich Pockels (1865-1943) en 1893.

b) Les valeurs de  $r$  pour un milieu dépendent de la direction du champ  $\vec{E}_s$ , de la direction de propagation de la lumière et de sa polarisation (cf. § B).

Typiquement, les valeurs de  $r$  vont de  $10^{-12}$  à  $10^{-10}$  m/V.  
 Pour  $E_s = 10^6$  V/m (10 000 V appliqués entre deux plaques métalliques séparés de 1 cm),  $\frac{1}{2} r n^3 E_s$  est compris entre  $10^{-6}$  et  $10^{-4}$ .

Exemples de milieux Pockels :

$NH_4H_2PO_4$  (ADP, pour ammonium dihydrogen phosphate)

$KH_2PO_4$  (KDP, pour potassium (K) dihydrogen phosphate)

$LiNbO_3$  : niobate de lithium

$LiTaO_3$  : tantalate de lithium

$CdTe$  : tellure de cadmium

$CdSe$  : sélénure de cadmium

$GaAs$  : arsénure de gallium

$GaP$  : phosphore de gallium

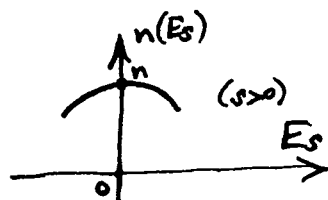
⋮



## 2) Effet Kerr

a) Dans le cas des milieux centrosymétriques,  $n(E_s) = n(-E_s)$ :

l'effet Pockels disparaît et la dépendance de l'indice de réfraction en  $E_s$  est quadratique<sup>(\*)</sup>. On écrit:



$$n(E_s) = n - \frac{1}{2} s n^3 E_s^2, \quad (\text{effet Kerr})$$

où  $s$  est le coefficient électro-optique quadratique ou coefficient Kerr.

(On a :  $n(E_s)^{-2} = n^{-2} + s E_s^2$ .)

b) Typiquement, les valeurs de  $s$  vont de  $10^{-18}$  à  $10^{-14} \text{ m}^2/\text{V}^2$  dans les cristaux, et de  $10^{-22}$  à  $10^{-19} \text{ m}^2/\text{V}^2$  dans les liquides.

Pour  $E_s = 10^6 \text{ V/m}$ ,  $\frac{1}{2} s n^3 E_s^2$  est compris entre  $10^{-6}$  et  $10^{-2}$  dans les cristaux, et entre  $10^{-16}$  et  $10^{-7}$  dans les liquides.

### Exemples de milieux Kerr :

$\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$  (ADP) }  
 $\text{KH}_2\text{PO}_4$  (KDP) } \quad \text{Pour les très forts } E\_s, \text{ l'effet en } E\_s^2 \text{ n'est pas négligeable devant celui en } E\_s.

eau

nitrotoluène

nitrobenzène

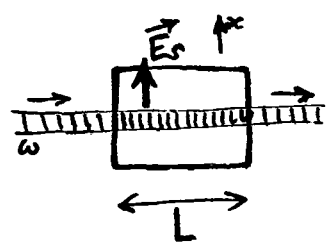
}  $\Delta$  toxiques

$\text{BaTiO}_3$ ,  $\text{SrTiO}_3$ ,  $\text{KTaO}_3$  : cristaux sans effet Pockels

(\*) L'effet électro-optique quadratique a été découvert par John Kerr (1824-1907) en 1875.

### 3) Contrôle de $\frac{1}{2}$ phase optique (par effet Pockels)

a) Un faisceau lumineux monochromatique traverse un milieu Pockels de longueur  $L$ . Le déphasage de l'onde lumineuse entre l'entrée et la sortie, vaut:

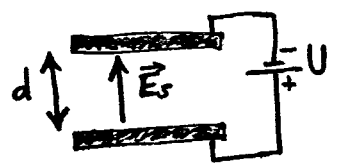


$$\varphi(E_s) = n(E_s) k_0 L \quad (k_0 = \frac{\omega}{c}).$$

$\vec{E}_s = E_s \hat{u}_x$  Avec  $n(E_s) = n - \frac{1}{2} r n^3 E_s$ , il vient

$$\varphi(E_s) = n k_0 L - \frac{k_0 L}{2} r n^3 E_s. \text{ Lorsque } \vec{E}_s \text{ est obtenu en}$$

appliquant une tension  $U$  entre deux plaques métalliques parallèles et distantes de  $d$ , on a  $E_s = \frac{U}{d}$  et

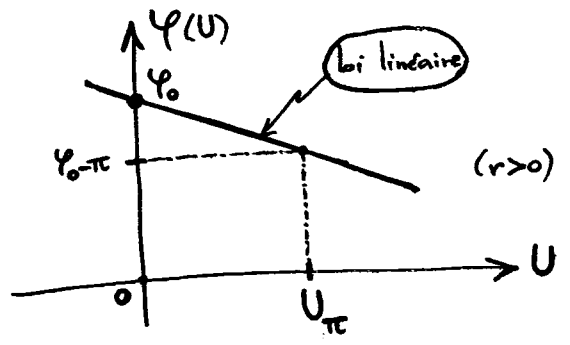


donc 
$$\varphi(U) = \varphi_0 - \pi \frac{U}{U_\pi},$$

où 
$$U_\pi = \frac{\lambda_0}{r n^3} \frac{d}{L}$$

est la tension de demi-onde

( $\varphi_0 = n k_0 L = 2\pi n L / \lambda_0$ ).



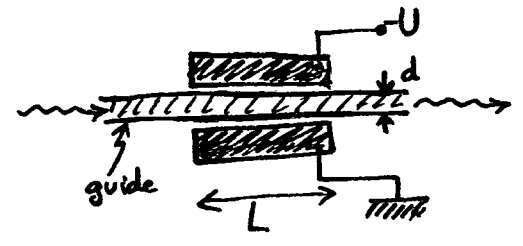
$U_\pi$  est la tension appliquée aux plaques pour laquelle le décalage en phase de la lumière a changé de  $\pi$

(différence de marche supplémentaire de  $\frac{\pi}{k_0} = \frac{\lambda_0}{2}$ ).

b) ordre de grandeur : • avec  $\frac{d}{L} = \frac{1}{20}$ ,  $U_\pi \sim 1000 \text{ V}$ .

• Cas de l'optique intégrée :  
(appelée aussi microphotonique)

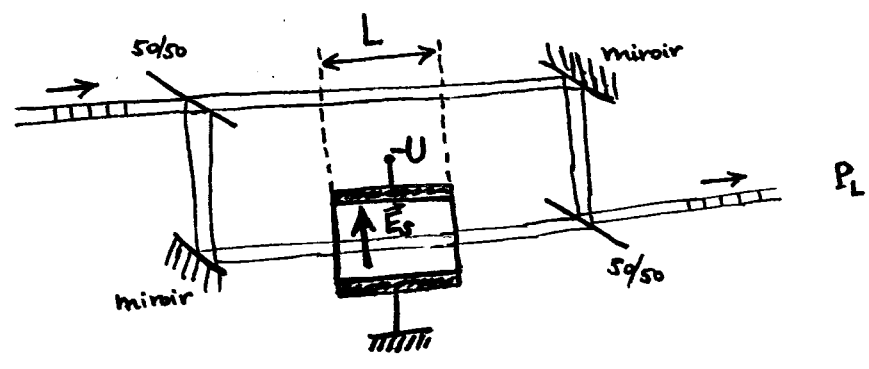
$$\begin{cases} d \sim 1 \mu\text{m} \\ L \gg 1 \text{mm} \end{cases}$$



d'où  $U_{\pi} \sim 995 \text{ V}$

(substrat :  $\text{LiNbO}_3$ ,  
guide :  $\text{Ti:LiNbO}_3$ .)

c) Contrôle de la puissance d'un faisceau



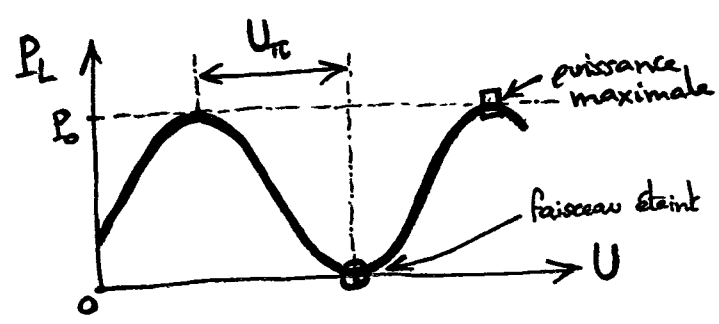
Les deux bras de l'interféromètre (de Mach-Zehnder) (\*) étant supposés d'égales longueurs, l'amplitude du champ lumineux en sortie est proportionnelle à  $e^{-ik_0L} + e^{-i(k_0 + \Delta k)L}$ .

D'où la puissance lumineuse en sortie :

$$P_L \propto \left| e^{-ik_0L} + e^{-i\left(k_0 + \frac{\pi U}{U_{\pi}}\right)L} \right|^2$$

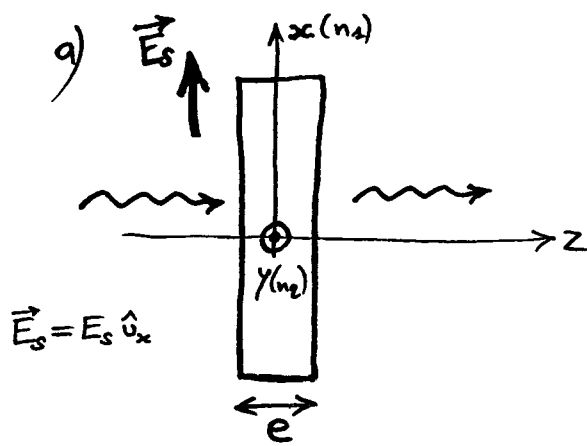
$$= 2 + 2 \cos\left(\left[\frac{\pi U}{U_{\pi}} - k_0L\right]\right)$$

soit :  $P_L = P_0 \cos^2\left(\frac{[\frac{\pi U}{U_{\pi}} - k_0L]}{2}\right)$ .



(\*) Interféromètre créé indépendamment par L. Zehnder, en 1891, et E. Mach, en 1892.

#### 4) Contrôle de la biréfringence d'une lame optique (par effet Pockels)



Les modes propres de propagation sont polarisés suivant  $x$  et suivant  $y$ .

Les indices de réfraction propres associés sont (cf. § 1-a):

$$\begin{cases} n_1(E_s) = n_1 - \frac{1}{2} r_1 n_1^3 E_s \\ n_2(E_s) = n_2 - \frac{1}{2} r_2 n_2^3 E_s, \end{cases}$$

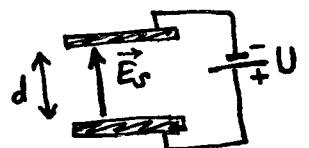
où  $r_1$  et  $r_2$  sont les coefficients Pockels appropriés (pour l'étude des effets de l'anisotropie, cf. § B).

La différence des déphasages à la traversée de la lame, entre ces deux modes propres, vaut (cf. § III-B-2):

$$\Delta\varphi(E_s) = [n_2(E_s) - n_1(E_s)] k_0 e,$$

soit: 
$$\Delta\varphi(E_s) = (n_2 - n_1) k_0 e - \frac{k_0 e}{2} (r_2 n_2^3 - r_1 n_1^3) E_s.$$

En considérant que  $\vec{E}_s$  est obtenu en appliquant une tension  $U$  entre deux plaques distantes de  $d$ ,  $E_s = \frac{U}{d}$ .



$\Delta\varphi(E_0)$  se met alors sous la forme :

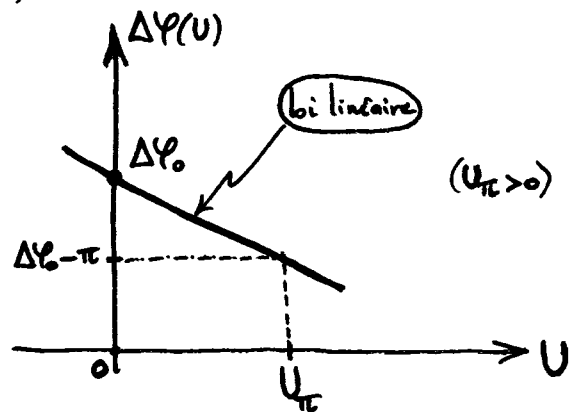
$$\Delta\varphi(U) = \Delta\varphi_0 - \pi \frac{U}{U_\pi},$$

avec la tension de demi-onde

$$U_\pi = \frac{d_0}{r_2 n_2^3 - r_1 n_1^3} \frac{d}{e}$$

( $\Delta\varphi_0 = (n_2 - n_1) k_0 e$  est la différence des déphasages en l'absence de tension appliquée entre les plaques).

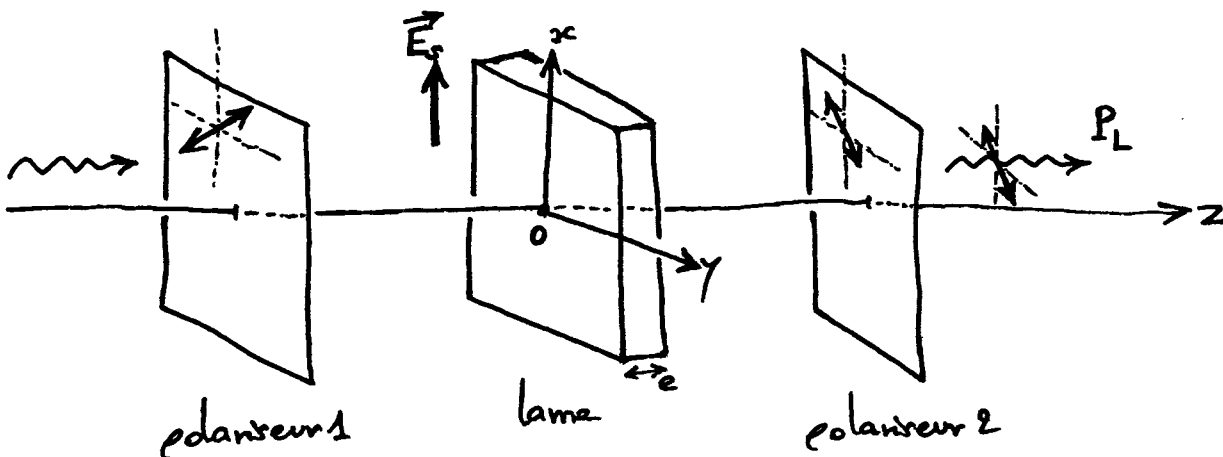
$U_\pi$  est la tension qui décale le déphasage  $\Delta\varphi(U)$  de  $\pi$ .



Si la lame est neutre à  $U=0$

( $\Delta\varphi_0 \equiv 0$  ( $2\pi$ )), alors elle est une lame demi-onde à  $U=U_\pi$ ,  
et une lame quart d'onde à  $U=U_\pi/2$ .

### b) Contrôle de la puissance d'un faisceau



La direction passante du premier polariseur sur le faisceau lumineux, est à  $45^\circ$  des axes <sup>propres</sup>  $x$  et  $y$  de la lame. L'onde en incidence sur la lame est donc d'amplitude

$$\vec{\Sigma}(z=0) = \Sigma_0 \frac{\hat{u}_x + \hat{u}_y}{\sqrt{2}}.$$

Après la lame, l'amplitude complexe est devenue (cf § III-B-2)

$$\vec{\Sigma}(z>e) = \underbrace{\Sigma_0}_{e^{-i\Delta\varphi(E_0)}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \hat{u}_x + e^{-i\Delta\varphi(E_0)} \hat{u}_y \right] e^{-ik_0(z-e)}.$$

Le second polariseur est placé de façon que sa direction passante soit à  $90^\circ$  de celle du premier (les deux polariseurs sont croisés).

La lumière émergente est polarisée linéairement suivant la direction du second polariseur, et son enveloppe vaut

$$\Sigma_0^{\text{sortie}} = \frac{(\hat{u}_x - \hat{u}_y)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\Sigma_0}{\sqrt{2}} \left[ \hat{u}_x + e^{-i\Delta\varphi(E_0)} \hat{u}_y \right],$$

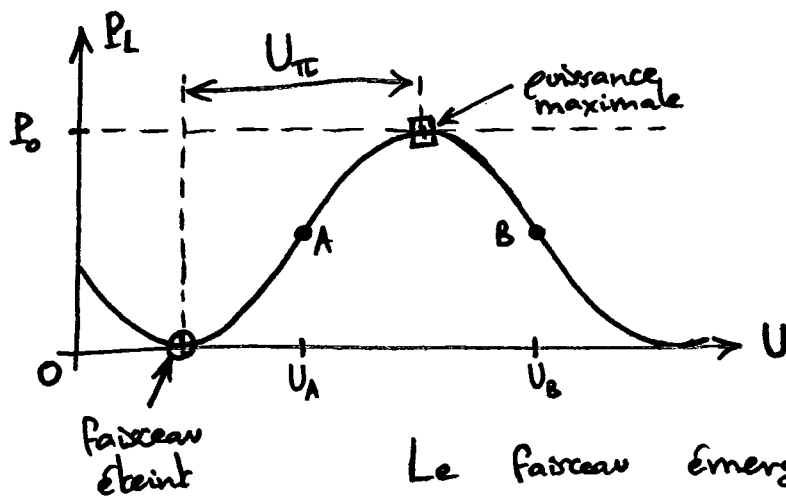
$$\text{soit: } \Sigma_0^{\text{sortie}} = \frac{\Sigma_0}{2} (1 - e^{-i\Delta\varphi(E_0)}).$$

Noté la puissance lumineuse en sortie

$$\begin{aligned} P_L &\propto \frac{|\Sigma|^2}{4} |1 - e^{-i\Delta\varphi(E_0)}|^2 \\ &= \frac{|\Sigma|^2}{2} (1 - \cos \Delta\varphi(E_0)), \end{aligned}$$

$$\text{soit: } P_L = P_0 \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi(E_0)}{2}\right) = P_0 \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi_0}{2} - \frac{\pi}{2} \frac{U}{U_\pi}\right).$$

(Si les polariseurs sont alignés,  $\sin^2(\dots)$  est remplacé par  $\cos^2(\dots)$ .)



Le faisceau émergent peut ainsi être réglé à volonté entre l'extinction et la puissance maximale. La dépendance de  $P_L$  avec  $U$  est non linéaire (puisque sinusoidale); cependant, elle est linéaire au voisinage de  $P_L = \frac{P_0}{2}$ , en  $U=U_A$  ou  $U=U_B$ : c'est autour de ces points A et B que l'on réalise la modulation de puissance du faisceau.

c) nota: Il est à noter que le montage expérimental présenté ici, est le même, du point de vue des principes, que celui du §3-c. Les deux bras de l'interféromètre correspondent ici aux deux polarisations propres suivant  $x$  et  $y$ , et les séparateurs 50/50 de division et de recombinaison de faisceaux ont pour équivalents les polariseurs 1 et 2 à  $\pm 45^\circ$  des axes  $x$  et  $y$ . On comprend dès lors la forte similitude des expressions de la puissance émergente  $P_L$  dans les deux cas.

## ② Electro-optique des milieux anisotropes

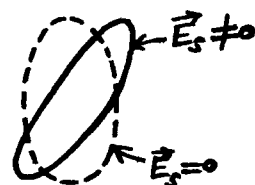
### 1) Ellipsoïde des indices en présence de $\vec{E}_s$

a) Lorsqu'un champ électrostatique  $\vec{E}_s$  est appliqué à un milieu anisotrope, les composantes  $\eta_{ij}(\vec{E}_s)$  du tenseur d'imperméabilité<sup>(\*)</sup> du milieu sont modifiées :

$$\eta_{ij}(\vec{E}_s) \neq \eta_{ij}(\vec{E}_s=0).$$

En conséquence, l'ellipsoïde des indices, d'équation<sup>(\*)</sup>

$\sum_{ij} \eta_{ij}(\vec{E}_s) x_i x_j = 1$ , se retrouve déformé.



Une fois connues les composantes  $\eta_{ij}(\vec{E}_s)$

pour un champ  $\vec{E}_s$  donné, on peut déterminer le nouvel ellipsoïde des indices, et donc les propriétés optiques du milieu en présence de  $\vec{E}_s$  (polarisations des modes propres de propagation, et indices de réfraction propres associés<sup>(\*)</sup>). Dans le principe, cette démarche est donc très simple; elle est cependant quelque peu lourde à mettre en œuvre.

b) L'effet du champ électrostatique étant faible, chaque composante  $\eta_{ij}(\vec{E}_s)$  du tenseur d'imperméabilité est développée aux ordres successifs en  $\vec{E}_s$  :

(\*) cf. § IV-A-2

(\*) cf. § IV-A-3 et § IV-B-1



$$\chi_{ij}(\vec{E}_s) = \chi_{ij} + \sum_k r_{ijk} E_k + \sum_{kl} s_{ijkl} E_k E_l ,$$

où  $\chi_{ij} = \chi_{ij}(\vec{E}_s=0)$ ,  $r_{ijk} = \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial E_k}(\vec{E}_s=0)$  et  $s_{ijkl} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi_{ij}}{\partial E_k \partial E_l}(\vec{E}_s=0)$   
 ( $E_1, E_2$  et  $E_3$  sont les composantes de  $\vec{E}_s$ , dans le repère où sont exprimées les composantes  $\chi_{ij}$  de  $[\chi]$ ).

Les  $3^3 = 27$  coefficients  $r_{ijk}$  sont les composantes du tenseur  
electro-optique linéaire ou tenseur Pockels  $[r]$  (rang 3). Les  $3^4 = 81$

Coefficients  $s_{ijkl}$  sont les composantes du tenseur electro-optique  
quadratique ou tenseur Kerr  $[s]$  (rang 4).

Fort heureusement, des propriétés de symétrie réduisent notablement le nombre de coefficients electro-optiques non nuls et indépendants à considérer.

## 2) Symétries intrinsèques de $[r]$ et $[s]$

a) Puisque le tenseur d'imperméabilité  $[\chi(\vec{E}_s)]$  est symétrique

$$\left( \chi_{ij}(\vec{E}_s) = \chi_{ji}(\vec{E}_s) \right), \text{ on a : } r_{ijk} = r_{jik} .$$

Par exemple,  $r_{12k} = r_{21k}$ . Ainsi, à  $k$  fixé ( $k=1, 2$  ou  $3$ ),

les 9 combinaisons des indices  $i$  et  $j$  ne génèrent que 6

composantes  $r_{ijk}$  indépendantes : le tenseur  $[r]$  n'a donc

que  $6 \times 3 = 18$  composantes indépendantes.

Il est habituel de renommer les paires d'indices  $(i, j)$  avec un seul indice  $I = 1, 2, \dots, 6$ , suivant la convention suivante :

$(1,1) \rightarrow 1$  ,  $(2,2) \rightarrow 2$  ,  $(3,3) \rightarrow 3$  ,  
 $(2,3) \text{ ou } (3,2) \rightarrow 4$  ,  $(3,1) \text{ ou } (1,3) \rightarrow 5$  ,  $(1,2) \text{ ou } (2,1) \rightarrow 6$  .

Cette convention s'écrit sous la forme du tableau ci-contre.

| i \ j | 1 | 2 | 3 |
|-------|---|---|---|
| 1     | 1 | 6 | 5 |
| 2     | 6 | 2 | 4 |
| 3     | 5 | 4 | 3 |

Par exemple, on écrit  $r_{22k} = r_{21k} = r_{6k}$ .

En appliquant également cette convention aux composantes du tenseur d'imperméabilité électrique  $[\eta(\vec{E}_s)]$ , on peut écrire

$$\eta_{\text{I}}(\vec{E}_s) = \eta_{\text{I}} + \sum_k r_{\text{Ik}} E_k$$

lorsque seul l'effet Pockels est à prendre en compte. Ces six équations se mettent sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \delta \eta_1(\vec{E}_s) \\ \delta \eta_2(\vec{E}_s) \\ \delta \eta_3(\vec{E}_s) \\ \delta \eta_4(\vec{E}_s) \\ \delta \eta_5(\vec{E}_s) \\ \delta \eta_6(\vec{E}_s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{ou } \delta \eta_{\text{I}}(\vec{E}_s) = \eta_{\text{I}}(\vec{E}_s) - \eta_{\text{I}} .$$

Le nombre de coefficients Pockels  $r_{\text{Ik}}$  non nuls et indépendants, est encore diminué par les symétries structurales du milieu étudié.

b) De leur côté, les composantes  $s_{ijkl}$  du tenseur Kerr  $[s]$  vérifient  $s_{ijkl} = s_{jikl}$  et  $s_{ijkl} = s_{jilk}$ , du fait de la symétrie du tenseur d'imperméabilité électrique et de l'invariance sur l'ordre des dérivées par rapport à  $E_k$  et  $E_l$ . Ainsi, sur les 81 composantes de  $[s]$ , seules  $6 \times 6 = 36$  sont indépendantes. On applique la convention précédente  $(i,j) \rightarrow I$  et  $(k,l) \rightarrow K$ , et le tenseur  $[s]$  est remplacé par la matrice  $6 \times 6$   $(s_{IK})$ .

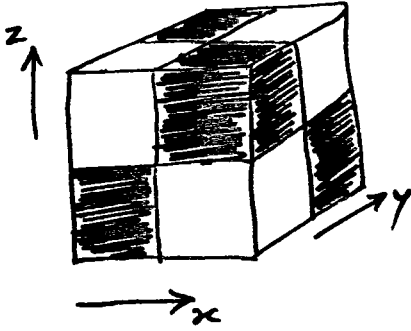
Le nombre de coefficients Kerr  $s_{IK}$  non nuls et indépendants, est encore diminué par les symétries structurales du milieu étudié.

### 3) Effet des symétries structurales du milieu

Les propriétés de symétrie du milieu, le plus souvent cristallin, ajoutent des contraintes sur les coefficients électro-optiques  $r_{IK}$  et  $s_{IK}$ . Certains doivent être nuls, d'autres reliés. En particulier,  $r_{IK} = 0$  dans les cristaux centrosymétriques; seul l'effet Kerr existe alors. Les matrices  $(r_{IK})$  et  $(s_{IK})$  pour les 32 classes cristallines sont bien connues. On en donne quelques exemples dans la suite de ce paragraphe. Dans ces exemples, le premier code désigne la classe cristalline dans la nomenclature internationale, et le deuxième (entre parenthèses) dans celle de Schönflies<sup>(\*)</sup>; est précisé le système cristallin (cf. § III-A-2) auquel appartient la classe.

(\*) Arthur Moritz Schönflies (1853-1928) détermina tous les groupes de symétrie cristalline <sup>en 1891.</sup>

a) classe  $\bar{4}3m$  ( $T_d$ ) du système cubique



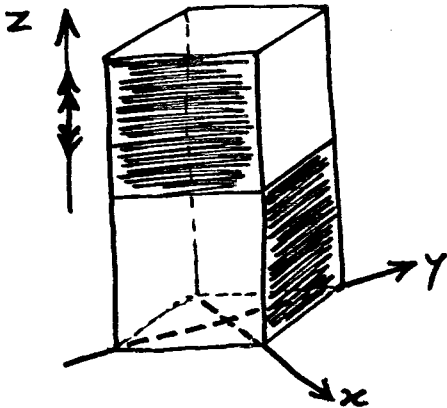
Dans les axes naturels  $xyz$  du squelette cubique, on a :

$$(r_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{41} \end{pmatrix}$$

L'effet Pockels des milieux appartenant à cette classe, est caractérisé par 1 seul coefficient:  $r_{41}$ .

Exemples: CdTe, GaAs, InAs.

b) classe  $\bar{4}2m$  ( $D_{2d}$ ) du système tétragonal



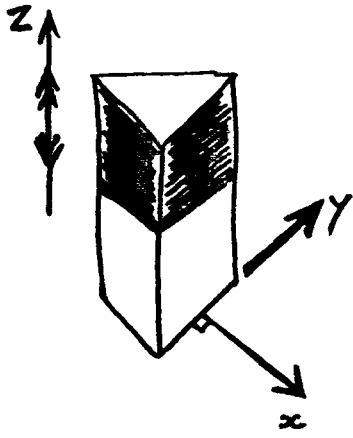
Dans les axes  $xyz$  précisés ci-contre, on a :

$$(r_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{pmatrix}$$

L'effet Pockels des milieux appartenant à cette classe cristalline, est caractérisé par 2 coefficients:  $r_{41}$  et  $r_{63}$ .

Exemples: ADP, KDP (cf. § A-1-b).

c) classe  $3m (C_{3v})$  du système trigonal



Dans les axes précisés sur la figure,  
on a :

$$(r_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & -r_{22} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ -r_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'effet Pockels des milieux appartenant à cette classe cristalline, est caractérisé par 4 coefficients :  $r_{51}$ ,  $r_{22}$ ,  $r_{13}$  et  $r_{33}$ .

Exemples:  $\text{LiNbO}_3$ ,  $\text{LiTaO}_3$ .

d) milieu structurellement isotrope

Dans des axes  $xyz$  orthogonaux au choix, on a :

$$(s_{ik}) = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad s_{44} = \frac{s_{11} - s_{12}}{2}$$

Ainsi, 2 coefficients ( $s_{11}$  et  $s_{12}$ ) caractérisent l'effet Kerr dans les milieux isotropes (structurellement), c'est-à-dire dans les liquides ou dans les solides amorphes.

#### 4) Effet Pockels dans $\text{LiNbO}_3$

a) Le niobate de lithium est un cristal uniaxial appartenant à la classe  $3m$  du système trigonal (cf. § 3-c). On considère le cas où un champ électrostatique  $\vec{E}_s$  est appliqué le long de l'axe optique du milieu :  $\vec{E}_s = E_s \hat{z}$ .

On a alors, d'après  $\checkmark$  § 2-a et le § 3-c :

$$\begin{cases} \delta\eta_1(\vec{E}_s) = r_{23} E_s \\ \delta\eta_2(\vec{E}_s) = r_{23} E_s \\ \delta\eta_3(\vec{E}_s) = r_{33} E_s \end{cases} \quad \text{et} \quad \delta\eta_4(\vec{E}_s) = \delta\eta_5(\vec{E}_s) = \delta\eta_6(\vec{E}_s) = 0.$$

En présence de  $\vec{E}_s$ , l'équation de l'ellipsoïde des indices (cf. § 1-a) :

$$\begin{aligned} \eta_1(\vec{E}_s) x^2 + \eta_2(\vec{E}_s) y^2 + \eta_3(\vec{E}_s) z^2 \\ + 2\eta_4(\vec{E}_s) yz + 2\eta_5(\vec{E}_s) zx + 2\eta_6(\vec{E}_s) xy = 1 \end{aligned}$$

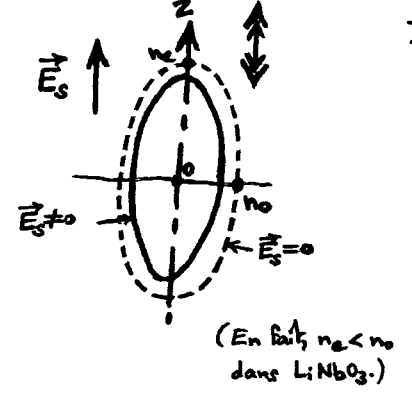
(dans les axes de la figure du § 3-c),

devenant ainsi 
$$\left(\frac{1}{n_o^2} + r_{23} E_s\right)(x^2 + y^2) + \left(\frac{1}{n_e^2} + r_{33} E_s\right) z^2 = 1.$$

Le milieu reste donc uniaxial, d'axe optique  $z$ , avec des indices de réfraction principaux modifiés par le champ électrostatique appliqué :

$$\begin{cases} \frac{1}{n_o(E_s)^2} = \frac{1}{n_o^2} + r_{23} E_s \\ \frac{1}{n_e(E_s)^2} = \frac{1}{n_e^2} + r_{33} E_s, \end{cases}$$

soit: 
$$\begin{cases} n_o(E_s) = n_o - \frac{1}{2} r_{13} n_o^3 E_s \\ n_e(E_s) = n_e - \frac{1}{2} r_{33} n_e^3 E_s \end{cases}$$



b) Une lame optique fabriquée

en  $\text{LiNbO}_3$  a sa biréfringence modifiée par l'application de  $\vec{E}_s = E_s \hat{z}$ . Suivant l'étude du § A-4-a, la tension

de demi-onde du dispositif

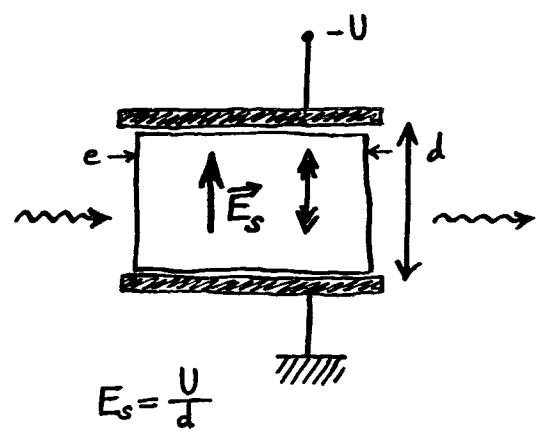
vaut 
$$U_\pi = \frac{\lambda_0}{r_{33} n_e^3 - r_{13} n_o^3} \frac{d}{e},$$

pour une propagation orthogonale à z.

À  $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$ ,

on a  $n_o = 2,3$ ,  $n_e = 2,2$

et  $r_{13} = 9,6 \text{ pm/V}$ ,  $r_{33} = 30,9 \text{ pm/V}$ .



$$E_s = \frac{U}{d}$$

Il vient :  $U_\pi \approx 300 \text{ V}$  pour  $\frac{d}{e} = \frac{1}{10}$ .

Il y a intérêt à diminuer le plus possible le rapport  $\frac{d}{e}$ , dans la réalisation du dispositif, afin d'obtenir une tension de demi-onde  $U_\pi$  la moins élevée possible, donc la plus aisée à fabriquer.

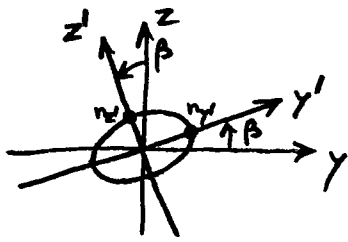
c) Dans le cas où le champ électrostatique est appliqué suivant l'axe y (cf. figure du § 3-c),  $\vec{E}_s = E_s \hat{y}$  et la situation est plus subtile à analyser du fait de l'apparition de la

composante non diagonale  $\delta\eta_{yz}(E_s) = \delta\eta_{zy}(E_s) = \delta\eta_4(E_s) = r_{51} E_s$

de l'imperméabilité électrique. En présence de  $\vec{E}_s = E_s \hat{y}$ , l'équation de l'ellipsoïde des indices est

$$\left(\frac{1}{n_o^2} - r_{22} E_s\right) x^2 + \left(\frac{1}{n_e^2} + r_{22} E_s\right) y^2 + \frac{z^2}{n_e^2} + 2 r_{51} E_s y z = 1.$$

L'axe  $x$  reste axe principal. Les deux autres axes principaux  $y'$  et  $z'$ , dans le plan  $yz$ , se trouvent par une rotation d'angle  $\beta$  des axes  $y$  et  $z$ . Comme on s'attend que  $|\beta| \ll 1$ , on peut écrire



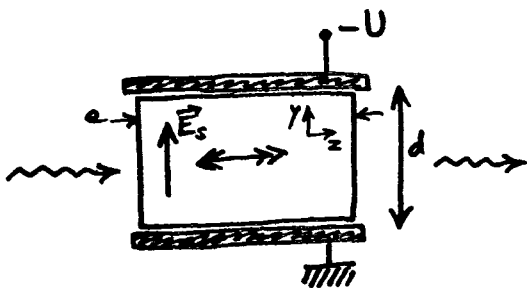
$$\begin{cases} y \approx y' - \beta z' \\ z \approx z' + \beta y' \end{cases},$$

que l'on remplace dans l'équation de l'ellipsoïde des indices. L'annulation du terme en  $y'z'$  est obtenue<sup>(\*)</sup> pour:

$$\beta = \frac{r_{51} E_s}{n_o^2 - n_e^2}, \text{ et les indices de réfraction principaux valent:}^{(*)}$$

$$n_x = n_o + \frac{1}{2} r_{22} n_o^3 E_s, \quad n_{y'} = n_o - \frac{1}{2} r_{22} n_o^3 E_s \text{ et } n_{z'} = n_e.$$

Ainsi le milieu est-il devenu biaxial en présence de  $\vec{E}_s = E_s \hat{y}$ . Les modes propres de propagation sont ensuite déterminés comme au § IV-A-3. Par exemple, pour une propagation suivant l'axe  $z$  (axe optique en l'absence de  $\vec{E}_s$ ), la tension de demi-onde vaut



$$U_{\pi} = \frac{\lambda_o}{2 r_{22} n_o^3} \frac{d}{e};$$

$$\text{à } \lambda_o = 633 \text{ nm, } r_{22} = 6,8 \text{ pm/V et}$$

$$U_{\pi} \approx 380 \text{ V pour } \frac{d}{e} = \frac{1}{10}.$$

(\*) À l'ordre 1 en  $E_s$ .



# INTRODUCTION À LA PHOTONIQUE

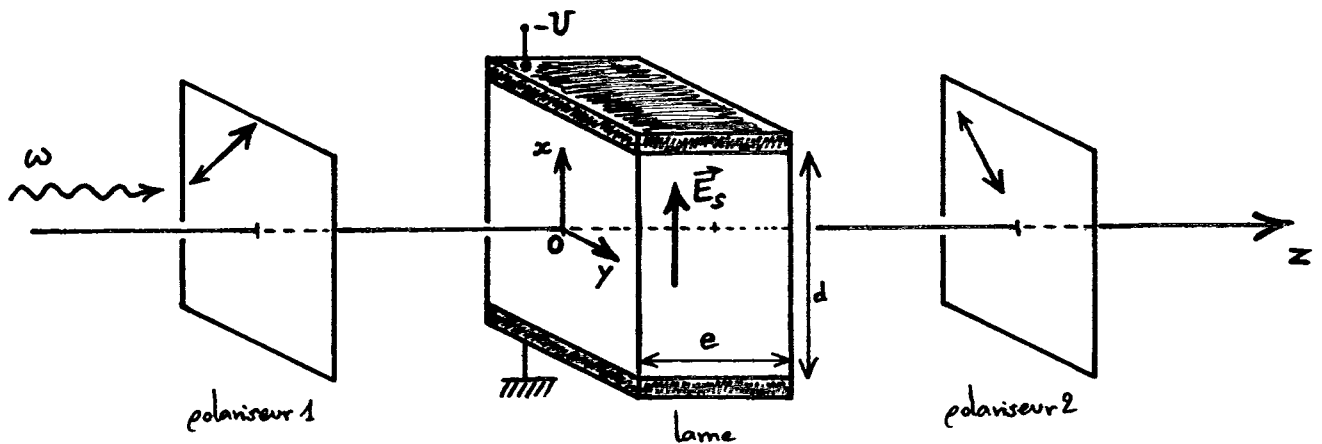
## Exercices VI

1) Modèle classique de l'effet Pockels. Dans un milieu, les nuages électroniques (masse  $m$ , charge  $q$ ) sont mobiles suivant l'axe  $x$ . Leur position instantanée est repérée par leur écart  $\delta(t)$  à leur position d'équilibre, vers laquelle ils sont rappelés par une force anharmonique  $-X\delta(t) - A\delta(t)^2$  ( $X > 0$ ).

a) Écrire l'équation du mouvement d'un nuage électronique soumis à la fois à un champ électrostatique  $\vec{E}_s = E_s \hat{u}_x$  et au champ électrique  $E_0 \cos \omega t \hat{u}_x$  d'une onde optique polarisée linéairement suivant l'axe  $x$ . Dans le cas quasi statique ( $\omega \ll \omega_0$ ,  $\omega_0 = \sqrt{X/m}$ ), trouver la solution  $\delta(t)$  de régime permanent en traitant le terme en  $A$  comme une perturbation.

b) En notant  $N$  le nombre de nuages électroniques par unité de volume, écrire la densité de polarisation  $P(t) = Nq(\delta(t) - \delta_{eq})$  oscillant à  $\omega$ , due au mouvement des nuages autour de leur position d'équilibre  $\delta_{eq}$ . En déduire la susceptibilité <sup>électrique</sup> du milieu, puis son coefficient Pockels  $r$ . Vérifier que  $r \propto A$ .

2) Modulateur à effet Pockels. Après avoir traversé un polariseur correctement orienté, un faisceau lumineux arrive en incidence normale sur une lame optique avec une polarisation linéaire à  $45^\circ$  des axes propres  $x$  et  $y$ . a) Écrire



l'amplitude complexe  $\vec{E}(z)$  de l'onde à l'entrée de la lame ( $z=0$ ), puis après la lame ( $z>e$ ) en tenant compte que les indices de réfraction principaux  $n_i(E_s)$  et

$n_2(E_s)$ , associés aux axes principaux  $x$  et  $y$ , dépendent linéairement du champ électrostatique appliqué :  $n_j(E_s) = n_j - \frac{1}{2} r_j n_j^3 E_s$  ( $j=1$  ou  $2$ ); on introduira la différence des déphasages  $\Delta\varphi(U) = \Delta\varphi_0 - \pi \frac{U}{U_{\pi}}$ , le champ  $\vec{E}_s$  étant fabriqué par la tension  $U$  appliquée entre deux plaques métalliques distantes de  $d$  (préciser les expressions de  $\Delta\varphi_0$  et de  $U_{\pi}$ ).

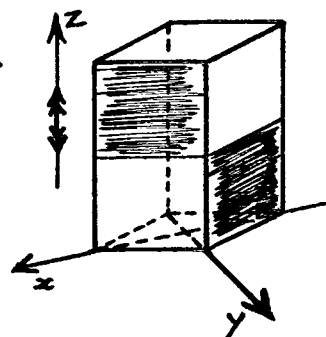
b) On considère une tension appliquée  $U_0$  telle que la polarisation après la lame est la même qu'à l'entrée; quelle relation suit  $U_0$ , en fonction de  $\Delta\varphi_0$ ? Exprimer  $\Delta\varphi(U)$  avec  $U_0$ . Quelle est la polarisation émergente lorsque  $U = U_0 + \frac{U_{\pi}}{2}$ ?  $U = U_0 + U_{\pi}$ ?  $U = U_0 + \frac{3U_{\pi}}{2}$ ?  $U = U_0 + 2U_{\pi}$ ?

c) Après la lame (plus proprement appelée cellule de Pockels) est placé un second polariseur, dont la direction passante est orthogonale à celle du premier. Exprimer l'enveloppe de l'onde lumineuse après le second polariseur. En déduire que la puissance lumineuse à la sortie du dispositif est de la forme :  $P_L = P_{MAX} \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi(U)}{2}\right) = P_{MAX} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{U - U_0}{U_{\pi}}\right)$ . Tracer l'allure de  $P_L$  en fonction de la tension électrique  $U$ . Interpréter les valeurs  $0$ ,  $P_{MAX}$  et  $\frac{P_{MAX}}{2}$  de  $P_L$ .

d) On ajoute à l'une des tensions  $U$  qui réalisent  $P_L = \frac{1}{2} P_{MAX}$ , une petite modulation  $v(t) = v_0 \cos \Omega t$  ( $v_0 \ll U_{\pi}$ ). Montrer que la puissance lumineuse émergente est modulée à la pulsation  $\Omega$ . Pourquoi un point de fonctionnement où  $P_L = \frac{1}{2} P_{MAX}$  est-il particulièrement intéressant?

### 3) Électro-optique dans l'ADP (ammonium dihydrogen phosphate).

L'ADP appartient au système cristallin tétragonal : il est donc uniaxial (axe  $z$ ). Sa classe cristalline étant  $42m$ , il possède que trois coefficients Pockels non nuls :  $r_{41}$ ,  $r_{52} = r_{41}$  et  $r_{63}$ .



Écrire l'équation de l'ellipsoïde des indices en présence du champ

statique  $\vec{E}_s = E_s \hat{y}$ . Montrer que l'ellipsoïde a tourné de l'angle  $\beta = \frac{r_{41}}{n_e^2 - n_o^2} E_s$

autour de l'axe  $y$ , sans modification des indices de réfraction principaux (à l'ordre 1 en  $E_s$ ). Estimer  $\beta$  pour  $E_s = 10 \text{ kV/cm}$  (à  $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$ ,  $n_o = 1,5220$ ,  $n_e = 1,4773$  et  $r_{41} = 23,41 \cdot 10^{-12} \text{ m/V}$ ).

## VII - Acousto-Optique

La présence d'une onde (ultra) sonore dans un milieu modifie son (ses) indice(s) de réfraction. Le son change ainsi l'effet que peut avoir le milieu sur la lumière <sup>qui le traverse,</sup> c'est-à-dire que

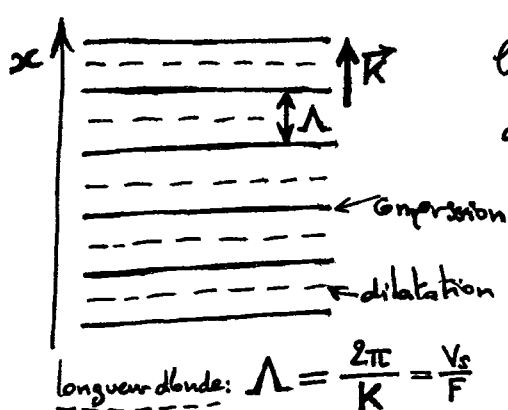
le son peut contrôler la lumière.

De nombreux dispositifs utilisent cet effet acousto-optique : modulateurs, interrupteurs, déflecteurs, filtres, isolateurs, décaleurs de fréquences, analyseurs de spectres.

### Ⓐ Principes de l'interaction son-lumière

#### 1) Onde acoustique plane dans un milieu structuellement isotrope

a) Dans un milieu isotrope (liquide, ou solide amorphe), se propage une onde acoustique plane, suivant l'axe  $x$ . L'onde est longitudinale; un



plan du milieu situé en  $x$  au repos, est déplacé de

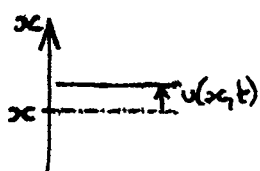
$$u(x,t) = u_0 \cos(-\Omega t - Kx)$$

par la présence de l'onde acoustique de pulsation  $\Omega$  (fréquence  $F = \frac{\Omega}{2\pi}$ ) et de

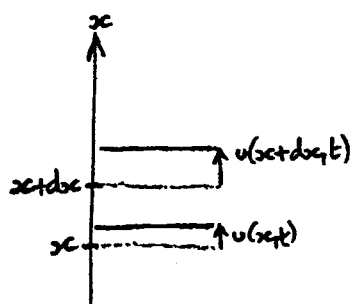
vecteur d'onde  $\vec{K} = K\hat{x}$  ( $K > 0$ ).

La vitesse du son dans le milieu est

$$v_s = \frac{\Omega}{K}$$



b) Une tranche du milieu située en  $x$ , d'épaisseur  $dx$ , <sup>au repos</sup> possède



l'épaisseur  $u(x+dx, t) - u(x, t) + dx$  lorsque l'onde acoustique est présente. La variation relative d'épaisseur est :

$$s(x, t) = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + dx\right) - dx}{dx} \quad (dx \ll \lambda),$$

ie:  $s(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t).$

$s(x, t)$  est la déformation (strain) du milieu ( $s(x, t)$  est sans dimension).

À l'onde acoustique plane de déplacement  $u(x, t) = u_0 \cos(\Omega t - Kx)$  est associée la déformation  $s(x, t) = s_0 \sin(\Omega t - Kx)$ , où  $s_0 = Ku_0$ .

## 2) Effet photoélastique (l.h.i. : linéaire, homogène et iso-trope)

a) En l'absence de l'onde acoustique, l'indice de réfraction du milieu l.h.i. est  $n$ . Lorsque l'onde acoustique est présente, il devient

$$n(x, t) = n + \delta n(x, t)$$

où  $\delta n(x, t) = -\frac{1}{2} p n^3 s(x, t)$  à l'ordre un en  $s(x, t)$  ;

$p$  est le coefficient photoélastique du milieu.

b) L'onde acoustique  $u(x, t) = u_0 \cos(\Omega t - Kx)$  de passage dans le milieu, fait qu'il possède un indice de réfraction inhomogène

(\*)  $\frac{1}{n(x, t)^2} = \frac{1}{n^2} + p s(x, t)$  (analogie avec l'effet Pockels, cf. § VI-A-1).

et dépendant du temps :

$$n(x,t) = n - \delta n_0 \sin(\Omega t - Kx),$$

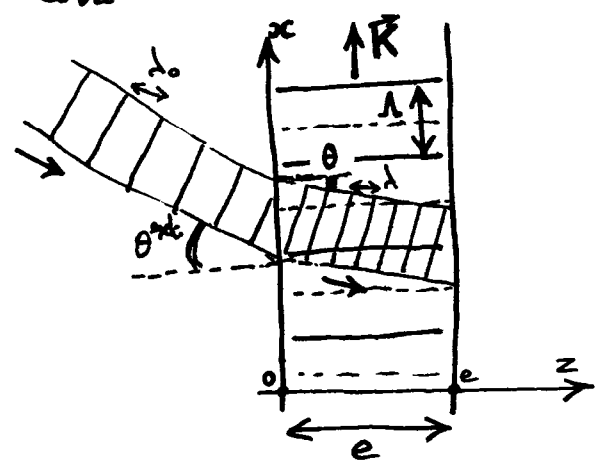
avec  $\delta n_0 = \frac{1}{2} p n^3 s_0$ .

Typiquement,  $\delta n_0 \sim 10^{-5}$ . Comme  $p \sim 10^{-1}$ , cela correspond à  $s_0 \sim 10^{-3}\%$  et  $v_0 \sim 1 \text{ \AA}$  ( $10^{-10} \text{ m}$ ) ( $V_s = 995 \text{ km/s}$  et  $F \sim 100 \text{ MHz}$ ).

### 3) Reflexion de Bragg

a) Un faisceau lumineux monochromatique ( $\omega$ ) dans l'espace libre est envoyé sur le milieu, de sorte que le plan d'incidence contienne l'axe  $x$ . L'angle d'incidence étant  $\theta^{\text{ext}}$ , l'angle de réflexion est  $\theta$  vérifiant

$$\sin \theta^{\text{ext}} = n \sin \theta.$$



Comme  $F \ll \frac{\omega}{2\pi}$ , l'interaction de l'onde lumineuse dans le milieu avec l'onde acoustique peut être examinée en

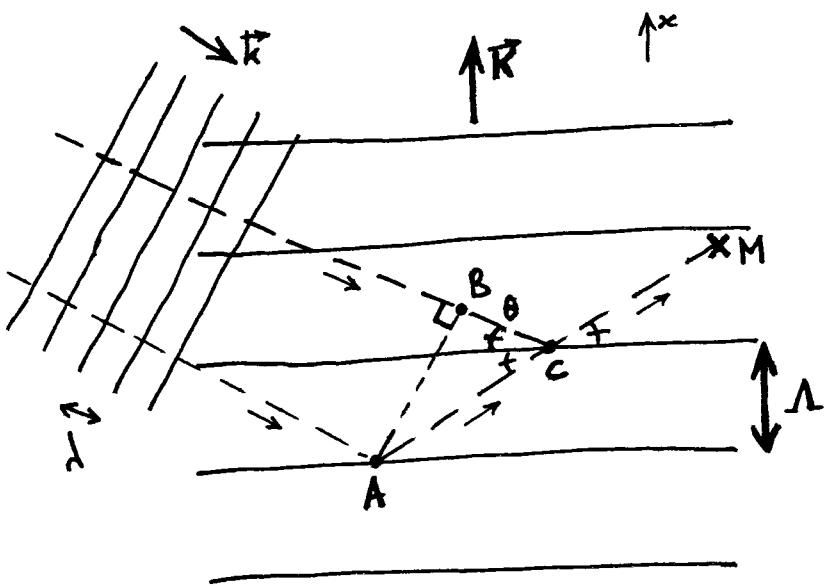
considérant l'onde acoustique fixée. En effet, durant la traversée  $\frac{e}{(c/n)}$  de la lumière, l'onde acoustique a avancé de la distance  $\frac{ne}{c} V_s$ , négligeable devant  $\Lambda$  :

(\*)  $\theta \ll 1$

$$\frac{\left(\frac{ne}{c} V_s\right)}{\Lambda} = \frac{ne}{c} F \sim 1 \cdot 10^{-3} \text{ pour } \begin{cases} e \sim 1 \text{ cm} \\ n \sim 1 \\ F \sim 100 \text{ MHz} \end{cases}$$

$$\left( = \frac{e}{\lambda} \frac{F}{\nu} \text{ où } \nu = \frac{\omega}{2\pi} \right).$$

b) Dans le milieu, l'onde lumineuse rencontre un indice de réfraction  $n(x, t)$  stratifié suivant  $x$ ; elle y subit des réflexions et réfractions (cf. § II-C). Comme la période de  $n(x, t)$ , suivant  $x$ , est la longueur d'onde acoustique  $\Lambda$ , on remplace, dans une première approche, la modulation d'indice de réfraction  $\delta n(x, t)$  par des plans faiblement réfléchissants, séparés de la distance  $\Lambda$ . D'un plan à l'autre, les ondes



partielles qui ils réfléchissent contribuent à l'onde lumineuse réfléchie totale en M, en étant déphasées à cause de la différence de marche

$$AC - BC = \dots$$

$$\dots = \frac{\Lambda}{\sin \theta} - \frac{\Lambda}{\sin \theta} \cos 2\theta = 2\Lambda \sin \theta.$$

Il y a interférences constructives à la réflexion

lorsque  $2\Lambda \sin \theta_m = m \lambda$ ,  $m = 1, 2, 3, 4, \dots$ ,

où  $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$  est la longueur d'onde lumineuse dans le milieu d'indice de réfraction  $n$ . Ainsi, dans la situation décrite, plusieurs inclinaisons  $\theta_m$  <sup>de l'onde incidente</sup> donnent lieu à une réflexion lumineuse. En fait, on peut montrer (cf. § 4 suivant) que le caractère continu <sup>et sinusoidal</sup> de la modulation d'indice

$\delta n(x, t) = -\delta n_0 \sin(\Omega t - Kx)$  imprimée par l'onde acoustique,

impose que seul l'ordre  $m = 1$  peut produire une onde réfléchie. L'angle  $\theta_{m=1} = \theta_B$  est l'angle de Bragg,

donné par

$$\sin \theta_B = \frac{\lambda}{2\Lambda}.$$

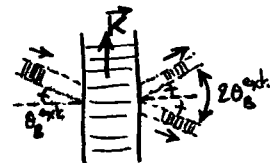
Ainsi, lorsque l'onde lumineuse dans le milieu possède l'inclinaison  $\theta_B$  par rapport aux plans d'onde de l'onde acoustique, une onde lumineuse réfléchie, appelée réflexion de Bragg (ou diffraction de Bragg, ou diffusion (scattering) de Bragg), est observable.\*

---

(\* William Henry Bragg (1862-1942) et William Lawrence Bragg (1890-1971), père et fils, ont partagé le prix Nobel 1915 pour leurs études sur le rayonnement X en interaction avec les cristaux. 1<sup>ères</sup> prédictions sur l'interaction lumière-son : en 1922, par Léon Brillouin (1889-1969).

c) Il est à noter que l'angle de Bragg  $\theta_B$  est un angle à l'intérieur du milieu. L'angle d'incidence  $\theta_B^{ext}$  correspondant à une réflexion de Bragg (cf. schéma du § a), est donné par  $\sin \theta_B^{ext} = n \sin \theta_B = \frac{\lambda_0}{2\Lambda}$ , où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans l'espace libre. Le faisceau réfléchi émerge alors sous l'angle  $\theta_B^{ext}$ , c'est-à-dire avec la déviation  $2\theta_B^{ext}$ .

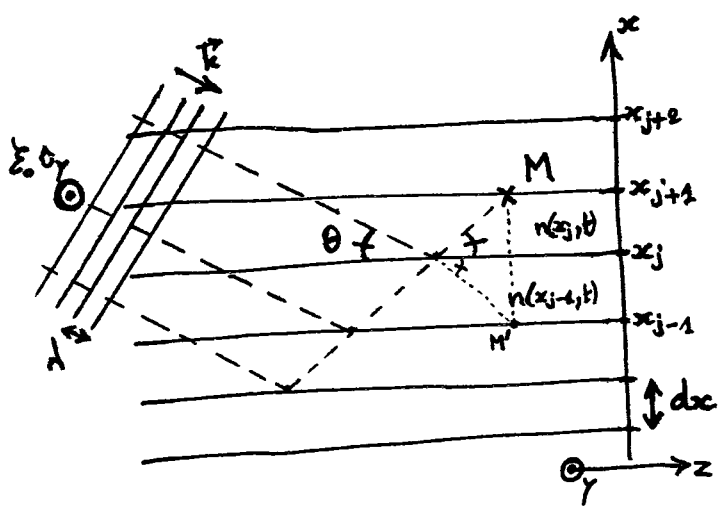
(Ordre de grandeur :  $\theta_B^{ext} \sim 1^\circ$ .)



#### 4) Réflexion continue sur l'onde acoustique

a) On tient maintenant compte de la variation continue (avec  $x$ ) de l'indice de réfraction  $n(x,t) = n - \delta n \sin(\Omega t - Kx)$  (cf. § 2).

Le milieu est subdivisé en tranches d'épaisseur  $dx$  ( $dx \ll \Lambda$ ), situées aux cotes  $x_j = j dx$ ; la tranche entre  $x_j$  et  $x_{j+1}$  possède l'indice de réfraction  $n(x_j, t)$ .



En supposant que l'onde d'incidence  $\theta$  est faiblement réfléchi sur les dioptres  $x = x_j$ , on peut écrire l'onde réfléchi, en un

point M du milieu, sous la forme :

$$\sum_{(M)} (z, x_{j+1}, t) = \sum_{(M)} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}_M)} \times \left\{ r(x_j, t) + r(x_{j-1}, t) e^{-ik[2(x_j - x_{j-1}) \sin \theta]} + r(x_{j-2}, t) e^{-ik[2(x_j - x_{j-2}) \sin \theta]} + \dots \right\},$$

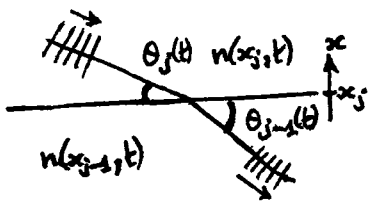


$$\text{ie: } \sum^{(4)}(z, x_{j+1}, t) = \sum_0 e^{i(\omega t - k \cdot \vec{r}_j)} \sum_{q=0,1,2,\dots} r(x_{j-q}, t) e^{-2ik[x_j - x_{j-q}] \sin \theta}$$

où  $r(x_j, t)$  est le coefficient de réflexion en amplitude sur le dioptre  $x = x_j$ , à l'instant  $t$  ( $k = n \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ ).

b) Si l'on suppose que l'onde lumineuse incidente est polarisée s (ie: suivant  $\hat{y}$ , cf. schéma précédent), alors  $r(x_j, t)$  est donné par (cf. § II-c-2) :

$$r(x_j, t) = \frac{n(x_j, t) \sin \theta_j(t) - n(x_{j-1}, t) \sin \theta_{j-1}(t)}{n(x_j, t) \sin \theta_j(t) + n(x_{j-1}, t) \sin \theta_{j-1}(t)}$$



$$\text{avec } n(x_j, t) \cos \theta_j(t) = n(x_{j-1}, t) \cos \theta_{j-1}(t)$$

(2<sup>de</sup> loi de Snell-Descartes pour la réfraction).

En utilisant  $n(x_{j-1}, t) = n(x_j - dx, t) = n(x_j, t) - dx \frac{\partial n}{\partial x}(x_j, t)$ , la 2<sup>de</sup> loi de Snell-Descartes pour la réfraction fournit la relation :

$$\theta_{j-1} - \theta_j = -\frac{\cos \theta_j}{n(x_j) \sin \theta_j} \frac{\partial n}{\partial x}(x_j) dx, \text{ qui est injectée dans l'expression de}$$

$$r(x_j, t) \text{ pour conduire à: } r(x_j, t) = \frac{1}{2n \sin^2 \theta} \frac{\partial n}{\partial x}(x_j, t) dx.$$

Dans le cas où l'onde lumineuse incidente est polarisée p (ie: dans le plan d'incidence), le coefficient de réflexion  $r(x_j, t)$  obtenu ne diffère de l'expression précédente que d'un facteur  $\cos 2\theta \approx 1$ , car  $\theta \ll 1$ . On pourra ainsi utiliser la formule de  $r(x_j, t)$  ci-dessus, en polarisation p comme en polarisation s.

c) On a donc, indépendamment de la polarisation du faisceau incident, un faisceau réfléchi de champ électrique complexe

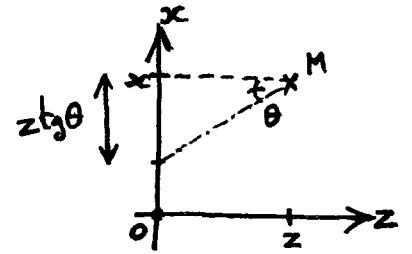
$$\sum^{(1)}(z, x_{j+1}, t) = \sum_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}_M)} \frac{1}{2n \sin^2 \theta} \sum_{q=0, 1, 2, \dots} dx \frac{\partial n}{\partial x}(x_{j-q}) e^{-2ik[x_j - x_{j-q}] \sin \theta},$$

soit: 
$$\sum^{(1)}(z, x, t) = \frac{\sum_0}{2n \sin^2 \theta} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} e^{-2ikx \sin \theta} \int_{x-z \tan \theta}^x dx' \frac{\partial n}{\partial x}(x', t) e^{2ikx' \sin \theta}.$$

En utilisant

$$\frac{\partial n}{\partial x}(x, t) = K \delta n_0 \cos(\Omega t - Kx)$$

$$= \frac{K \delta n_0}{2} \left\{ e^{i(\Omega t - Kx)} + \text{c.c.} \right\}, \text{ il vient:}$$



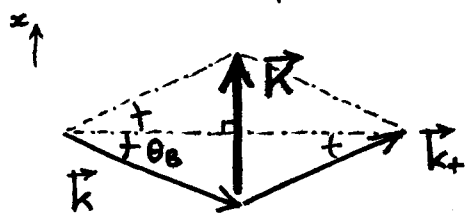
$$\sum^{(1)}(z, x, t) = \sum_0 \frac{K \delta n_0}{4n \sin^2 \theta} \left\{ e^{i(\omega_{\pm} t - \vec{k}_{\pm} \cdot \vec{r})} \int_{-z \tan \theta}^0 dx'' e^{i(2k \sin \theta - K)x''} + e^{i(\omega_{\pm} t - \vec{k}_{\pm} \cdot \vec{r})} \int_{-z \tan \theta}^0 dx'' e^{i(2k \sin \theta + K)x''} \right\}$$

avec 
$$\begin{cases} \omega_{\pm} = \omega \pm \Omega \\ \vec{k}_{\pm} = \vec{k} \pm \vec{K}. \end{cases}$$

- (i) Le premier terme de l'expression de  $\sum^{(1)}(z, x, t)$  a une amplitude maximale lorsque l'angle  $\theta$  est tel que  $2k \sin \theta = K$ , i.e.:  $\sin \theta = \frac{K}{2k} = \frac{\lambda}{2\Lambda}$ : il s'agit de l'angle de Bragg  $\theta_B$  (cf. § 3-b). Pour  $\theta \sim \theta_B$ , le second terme de  $\sum^{(1)}$  est négligeable.

Lorsque  $\theta = \theta_B$ , il existe <sup>donc</sup> une onde lumineuse réfléchie, dont la pulsation  $\omega_+ = \omega + \Omega$  est décalée de la pulsation acoustique  $\Omega$  par rapport à la pulsation optique incidente  $\omega$ .

En pratique, ce décalage est faible :  $\frac{\Omega}{\omega} \approx 10^{-6}$ ,

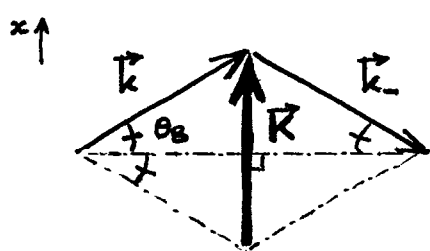


et le vecteur d'onde réfléchi

$\vec{k}_+$ ,  $|\vec{k}_+| = n \frac{\omega + \Omega}{c}$ , est de même module

que le vecteur d'onde incident :  $|\vec{k}_+| \approx |\vec{k}| = k = n \frac{\omega}{c}$ , avec une excellente approximation (\*) (on a  $k_+ - k = n \frac{\Omega}{c} \ll \pi$ , cf. § 3-a).

• (ii) Le second terme de  $\Sigma^{(1)}(z, x, t)$  montre qu'il existe une autre géométrie pour la réflexion de Bragg : celle pour laquelle  $\theta < 0$  et  $2k \sin \theta = -K$ . Le vecteur d'onde incident  $\vec{k}$  possède alors une composante  $k_x > 0$ . La pulsation  $\omega_- = \omega - \Omega$  de l'onde réfléchie



est (très faiblement) diminuée de  $\Omega$  par rapport à la pulsation de l'onde incidente.

(Le vecteur d'onde réfléchi  $\vec{k}_- = \vec{k} - \vec{R}$

possède quasiment le même module que le vecteur d'onde incident  $\vec{k}$ .)

d) On remarquera que les figures ci-dessus, traduisant  $\vec{k}_\pm = \vec{k} \pm \vec{R}$  <sup>(avec  $|\vec{k}_\pm| = |\vec{k}|$ )</sup>, sont équivalentes à l'expression de l'angle de Bragg :

$$\sin \theta_B = \frac{(K/2)}{k} = \frac{K}{2k}, \text{ soit : } \sin \theta_B = \frac{\lambda}{2L}.$$

(\*) ce qui justifie a posteriori le calcul du déphasage entre les ondes partielles en M, provenant de différents plans réflecteurs (cf. § a).

### 5) Rendement de la réflexion de Bragg

a) En considérant la génération de l'onde réfléchie de pulsation  $\omega_r = \omega + \Omega$ , dans la situation où l'inclinaison  $\theta$  de l'onde lumineuse incidente est proche de l'angle de Bragg  $\theta_B$ , l'enveloppe de l'onde réfléchie à la sortie  $z=e$  du milieu

$$\text{vaut } \sum_0^{(r)}(z=e) = \sum_0 \frac{K \delta n_0}{4n \sin^2 \theta_B} \int_{-e \tan \theta_B}^0 dx'' e^{i(2k \sin \theta - K)x''},$$

$$\text{ie: } \sum_0^{(r)}(z=e) = \sum_0 \frac{K \delta n_0}{4n \sin^2 \theta_B} e \tan \theta_B \operatorname{sinc}[(\sin \theta - \sin \theta_B) k e \tan \theta_B] e^{-i(\sin \theta - \sin \theta_B) k e \tan \theta_B}.$$

Le rendement de la réflexion de Bragg est défini par

$$\eta = \frac{|\sum_0^{(r)}(z=e)|^2}{|\sum_0|^2}.$$

C'est le rapport de la puissance réfléchie à la puissance incidente.

Il est maximal lorsque  $\theta = \theta_B$ , valant alors

$$\eta_0 = \left( \frac{K \delta n_0}{4n \sin^2 \theta_B} e \tan \theta_B \right)^2,$$

soit:  $\boxed{\eta_0 = \left( \frac{\pi}{\lambda_0} e \delta n_0 \right)^2}$

en tenant compte que  $\theta_B \ll 1$ .

b) Cette expression du rendement de réflexion est valable lorsque l'onde incidente est négligeablement perturbée par la création

(\*)  $\operatorname{sinc}(u) = \sin u / u$ .

de la réflexion de Bragg (cf. l'expression de  $\xi^{(1)}(z, x, t)$  au § 4-a), c'est-à-dire lorsque  $\eta_0$  reste faible.

Cependant, si la puissance réfléchie est forte ( $\eta_0 \ll 1$ ), il n'est plus possible de négliger la dépletion de l'onde incidente. De plus, l'onde réfléchie ( $\omega_r = \omega + \Omega$ ,  $\vec{k}_r = \vec{k} + \vec{K}$ ) subit elle-même une réflexion de Bragg, de la catégorie (ii) du § 4-c, pour contribuer à une onde

lumineuse de pulsation  $\omega_r - \Omega = \omega$  et de vecteur d'onde

$\vec{k}_r - \vec{K} = \vec{k}$ , onde qui n'est autre que le faisceau incident. Ainsi

les faisceaux incident et réfléchi s'échangent-ils continuellement de la puissance lumineuse au cours de leur propagation dans le milieu. Cette situation est décrite dans une démarche<sup>(\*)</sup> moins élémentaire que celle développée au § 4 ; le rendement de la réflexion de Bragg prend

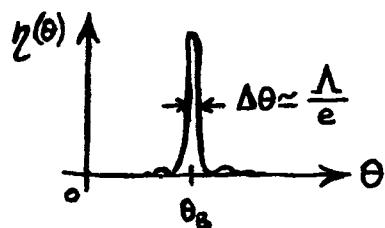
alors l'expression

$$\eta_0^{\text{exact}} = \sin^2 \sqrt{\eta_0},$$

où  $\eta_0$  est le rendement dans la limite de réflexion faible, vu au paragraphe a précédent. ( $\frac{\eta_0 - \eta_0^{\text{exact}}}{\eta_0} < 5\%$  pour  $\eta_0 < 0,15$ .)

g) Dans la limite de rendement faible, la dépendance du rendement en l'angle d'inclinaison  $\theta$  de l'onde incidente est donnée par

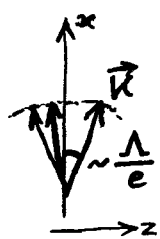
$$\eta(\theta) = \eta_0 \left( \text{sinc} \left[ (\sin \theta - \sin \theta_B) k_e z_0 \right] \right)^2 = \eta_0 \left( \text{sinc} \left[ (\theta - \theta_B) \frac{k_e z_0}{2} \right] \right)^2.$$



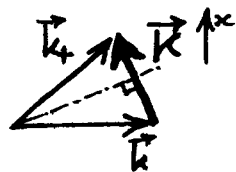
On en déduit que la tolérance sur  $\theta$ , autour de  $\theta_B$ , pour obtenir une réflexion de Bragg, vaut  $\Delta\theta \approx \frac{2\pi}{k_e z_0} = \frac{\lambda}{e}$ . Typiquement,  $\Delta\theta \lesssim 1^\circ$ .

(\*) appelée théorie de modes couplés (non décrite dans ce cours)

L'onde acoustique possédant la taille transverse  $e$ , elle est composée d'ondes planes dont les vecteurs d'onde  $\vec{k}$  sont compris dans le secteur d'axe



$x$  et d'angle au sommet  $\approx \frac{\lambda}{e}$ . C'est pourquoi la réflexion de Bragg peut avoir lieu pour une inclination  $\theta$  de l'onde incidente qui est

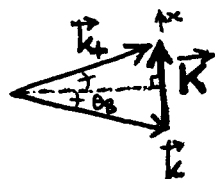


légèrement différente de  $\theta_B$ , avec  $\Delta\theta \sim \frac{\lambda}{e}$ .

## 6) Interprétations de la réflexion de Bragg

a) On a vu que la description du §4 permettait de justifier la démarche simple de remplacer le milieu parcouru par l'onde acoustique, par des miroirs semi-réfléchissants séparés de la longueur d'onde acoustique  $\lambda$  (tout en supprimant "à la main" les directions principales autres que celle d'ordre 1, cf. §3-b). La loi  $\sin\theta_B = \frac{\lambda}{2\lambda}$

fixant l'angle de Bragg s'écrit aussi sous la forme vectorielle  $\vec{k}_+ = \vec{k} + \vec{K}$  (ou:  $\vec{k}_- = \vec{k} - \vec{K}$ ),



avec  $|\vec{k}_+| \approx |\vec{k}|$  (ou:  $|\vec{k}_-| \approx |\vec{k}|$ ), cf. §4-d.

De plus, on peut voir le décalage en pulsation de l'onde réfléchie comme une conséquence du mouvement à la vitesse  $V_s \hat{u}_x$  des miroirs semi-réfléchissants: d'après les principes de l'effet Doppler,<sup>(\*)</sup>

la pulsation de l'onde incidente vue par les miroirs est  $\omega \left(1 \pm \frac{V_s}{c} \sin\theta_B\right)$ , d'où la pulsation de l'onde réfléchie dans le

(\*) Découvert par Christian Doppler (1803-1853) sur les ondes sonores, et étendu à l'optique par Hippolyte Fizeau (1819-1896) en 1842.

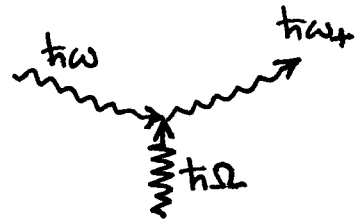
référentiel du milieu  $\omega_{\pm} = \omega \left( 1 \pm \frac{2V_s}{c/n} \sin \theta_B \right)$ . On retrouve

bien la pulsation attendue  $\omega_{\pm} = \omega \pm \Omega$ .

b) On peut aussi adopter un point de vue particulière. Le faisceau lumineux de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}$  est formé d'un flot de photons<sup>(6)</sup> d'énergie  $\hbar\omega$  et de quantité de mouvement  $\hbar\vec{k}$ . De façon similaire, l'onde acoustique de pulsation  $\Omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{K}$  est un flot de phonons<sup>(\*)</sup> d'énergie  $\hbar\Omega$  et de quantité de mouvement  $\hbar\vec{K}$ . Les relations donnant la pulsation et le vecteur d'onde de l'onde réfléchie, s'interprètent comme les conservations de l'énergie et de la quantité de mouvement vérifiées lors de

• l'annihilation d'un phonon:

$$\begin{cases} \hbar\omega + \hbar\Omega = \hbar\omega_+ \\ \hbar\vec{k} + \hbar\vec{K} = \hbar\vec{k}_+ \end{cases}$$



• ou de la création d'un phonon:

$$\begin{cases} \hbar\omega = \hbar\omega_- + \hbar\Omega \\ \hbar\vec{k} = \hbar\vec{k}_- + \hbar\vec{K} \end{cases}$$



La tolérance sur la réalisation de l'angle de Bragg s'interprète dans ce cadre à l'aide du principe d'incertitude de Heisenberg<sup>(7)</sup>: localisés sur l'épaisseur  $e$  selon  $z$ , les phonons ont une dispersion  $\Delta K_z$  de leurs vecteurs d'onde donnée par  $e \hbar \Delta K_z \sim \hbar$ , d'où, avec  $\Delta K_z = K \Delta \theta$ :  $e \cdot \frac{K}{2\pi} \Delta \theta \sim 1$ , i.e.  $\Delta \theta \sim \frac{\lambda}{e}$ . On retrouve ainsi le résultat du §5-c.

(7) Werner Heisenberg (1901-1976); prix Nobel 1933. Principe d'incertitude: 1927.

(6) cf. note de la p. II-21.

(\*) Le concept de phonon (excitation élémentaire d'un mode de vibration) a été inventé en 1914 par Peter Debye (1884-1966).

## B) Acousto-optique des milieux anisotropes

### 1) Onde acoustique plane dans un milieu anisotrope

a) En présence d'une onde acoustique dans un milieu, un élément de matière situé en  $\vec{r}$  se retrouve à la position instantanée  $\vec{r} + \vec{u}(\vec{r}, t)$ , où  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  est le déplacement imposé par l'onde acoustique.

Une onde acoustique plane, de pulsation  $\Omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{K} = K \hat{z}$ , peut être

(4) ⊗ Longitudinale :  $u_x(x, t) = u_0 \cos(\Omega t - Kx)$ ,  $u_y = u_z = 0$ ,  
de vitesse  $V_L$  ;

ou (5) ⊗ Transverse :  $u_x = 0$ ,  $u_y(x, t) = u_0 \cos(\Omega t - Kx)$ ,  $u_z = 0$ ,  
de vitesse  $V_T (\neq V_L)$ .

En toute rigueur, une onde acoustique n'est purement longitudinale ou purement transverse que si son vecteur d'onde  $\vec{K}$  est suivant une direction cristalline particulière du milieu. On supposera que c'est bien le cas.

b) La déformation du milieu due à une onde acoustique est caractérisée par les composantes

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

du tenseur de déformation  $[s]$ . Par définition,  $[s]$  est symétrique :

$$s_{ij} = s_{ji}.$$



Pour les ondes longitudinale et transverse citées en exemples au § a, la déformation a pour seule composante non nulle :

$$(L) \otimes s_{11} = \frac{\partial u_x}{\partial x_1} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = s_0 \sin(\Omega t - Kx), \quad s_0 = K u_0 \text{ (longitudinale);}$$

$$(T) \otimes s_{12} = s_{21} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_y}{\partial x} = s_0 \sin(\Omega t - Kx), \quad s_0 = \frac{1}{2} K u_0 \text{ (transverse).}$$

## 2) Effet photo-élastique

a) En présence d'une déformation dans le milieu, les composantes du tenseur d'imperméabilité<sup>(\*)</sup> électrique sont modifiées; ce phénomène est appelé effet photo-élastique. Chaque composante  $\eta_{ij}$  ( $\{s_{kl}\}$ ) du tenseur d'imperméabilité étant développée à l'ordre un en les composantes  $s_{kl}$  du tenseur de déformation, on écrit :

$$\eta_{ij}([s]) = \eta_{ij} + \sum_{kl} p_{ijkl} s_{kl},$$

où  $\eta_{ij} = \eta_{ij}([s]=0)$  et  $p_{ijkl} = \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial s_{kl}}([s]=0)$ . Les  $p_{ijkl}$  sont les

84 composantes du tenseur photo-élastique [p] (rang 4).

b) Comme les tenseurs d'imperméabilité électrique et de déformation sont symétriques :  $\eta_{ij}([s]) = \eta_{ji}([s])$  et  $s_{kl} = s_{lk}$ , les composantes  $p_{ijkl}$  du tenseur photo-élastique sont invariantes par permutations de  $i$  et  $j$  d'une part, et par permutations de  $k$  et  $l$  d'autre part. Les paires d'indices  $(i,j)$  sont alors remplacées par un seul indice  $I$  courant de 1 à 6, avec la convention suivante (cf. § VI-B-2) :

(\*) Cf. § IV-A-2.

$(1,1) \longrightarrow 1$  ,  $(2,2) \longrightarrow 2$  ,  $(3,3) \longrightarrow 3$  ,  
 $(2,3) \text{ ou } (3,2) \longrightarrow 4$  ,  $(3,1) \text{ ou } (1,3) \longrightarrow 5$  ,  $(1,2) \text{ ou } (2,1) \longrightarrow 6$ .

De même, les paires d'indices  $(k,l)$  sont remplacées par l'indice  $k$  de 1 à 6. Le tenseur de rang 4  $[p_{ijkl}]$  est donc décrit par la matrice  $6 \times 6$   $(P_{IK})$ , formée des 36 coefficients photo-élastiques  $P_{IK}$ .

On peut alors écrire la relation entre le tenseur d'imperméabilité électrique et celui de déformation, sous une forme simplifiée :

$$\eta_I(\{s_k\}) = \eta_I + \sum_K P_{IK} s_K , \quad \text{avec pour } s_k : \begin{cases} s_1 = s_{11} \\ s_2 = s_{22} \\ s_3 = s_{33} \\ s_4 = 2s_{23} \\ s_5 = 2s_{31} \\ s_6 = 2s_{12} \end{cases}$$

soit, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \delta\eta_1([s]) \\ \delta\eta_2([s]) \\ \delta\eta_3([s]) \\ \delta\eta_4([s]) \\ \delta\eta_5([s]) \\ \delta\eta_6([s]) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & P_{15} & P_{16} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} & P_{25} & P_{26} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} & P_{35} & P_{36} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} & P_{45} & P_{46} \\ P_{51} & P_{52} & P_{53} & P_{54} & P_{55} & P_{56} \\ P_{61} & P_{62} & P_{63} & P_{64} & P_{65} & P_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{pmatrix}$$

où  $\delta\eta_I([s]) = \eta_I([s]) - \eta_I$ .

Le nombre de coefficients photoélastiques non nuls et indépendants est diminué grâce aux symétries structurales du milieu considéré.

c) Dans un milieu structurellement isotrope, la matrice  $(P_{\pm k})$  possède la forme

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{12} & 0 & 0 & 0 \\ P_{12} & P_{11} & P_{12} & 0 & 0 & 0 \\ P_{12} & P_{12} & P_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{44} \end{pmatrix}$$

avec  $P_{44} = \frac{1}{2}(P_{11} - P_{12})$ , dans un repère cartésien  $xyz$  arbitraire.

Deux coefficients ( $P_{11}$  et  $P_{12}$ ) décrivent<sup>donc</sup> entièrement la photoélasticité d'un milieu homogène de structure isotrope (liquide, ou solide amorphe).

(L) ⊗ Pour une onde longitudinale  $\vec{u}(x,t) = \hat{x} u_0 \cos(\Omega t - Kx)$ , on a vu que la seule composante de déformation était  $s_{11} = s_1 = s_0 \sin(\Omega t - Kx)$ ,  $s_0 = K u_0$  (cf. § 1).

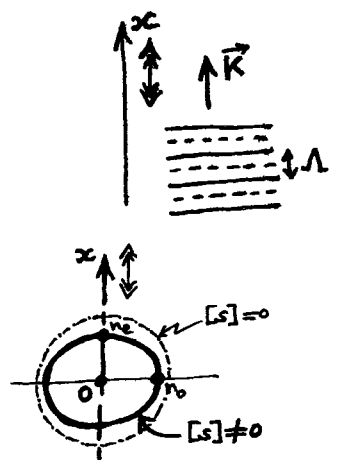
On en déduit  $\delta n_1(\omega) = P_{11} s_1$ ,  $\delta n_2(\omega) = \delta n_3(\omega) = P_{12} s_1$   
 et  $\delta n_4(\omega) = \delta n_5(\omega) = \delta n_6(\omega) = 0$ ,

d'où l'équation de l'ellipsoïde des indices<sup>(\*)</sup> en présence de l'onde

acoustique :  $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{n^2} + P_{11} s_1 x^2 + P_{12} s_1 (y^2 + z^2) = 1$ ,

ic:  $\frac{x^2}{n_e^2} + \frac{y^2 + z^2}{n_o^2} = 1$ ,

avec  $\begin{cases} \frac{1}{n_e^2} = \frac{1}{n^2} + P_{11} s_0 \sin(\Omega t - Kx) \\ \frac{1}{n_o^2} = \frac{1}{n^2} + P_{12} s_0 \sin(\Omega t - Kx) \end{cases}$ .



Ainsi, le milieu devient uniaxial d'axe optique  $x$  suivant la propagation de l'onde acoustique, avec l'indice de réfraction principal extraordinaire  $n_e(x,t) = n - (\delta n_o)_e \sin(\Omega t - Kx)$

où  $(\delta n_o)_e = \frac{1}{2} P_{11} n^3 s_0$ .

(\*) Cf. § III-A-2-b.

L'indice de réfraction principal ordinaire vaut

$$n_o(x,t) = n - (\delta n_o)_o \sin(\Omega t - Kx)$$

avec  $(\delta n_o)_o = \frac{1}{2} p_{12} n^3 s_o$ .

(\*) ⊗ Pour une onde acoustique transverse  $\vec{u}(x,t) = \hat{y} u_o \cos(\Omega t - Kx)$ , on a vu que les seules composantes de déformation étaient

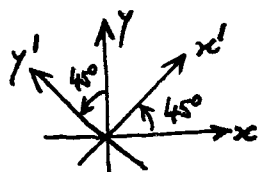
$$s_{12} = s_{21} = \frac{1}{2} s_6 = s_o \sin(\Omega t - Kx), \quad s_o = \frac{1}{2} K u_o \text{ (cf. § 1)}.$$

On en déduit  $\delta \eta_6([s]) = p_{44} s_6$  (et les autres  $\delta \eta_I([s]) = 0$ ),

donc l'équation de l'ellipsoïde des indices en présence de l'onde

acoustique :  $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{n^2} + 2 p_{44} s_6 xy = 1$ .

Les axes principaux de cet ellipsoïde sont à 45° des axes  $x$  et  $y$ .



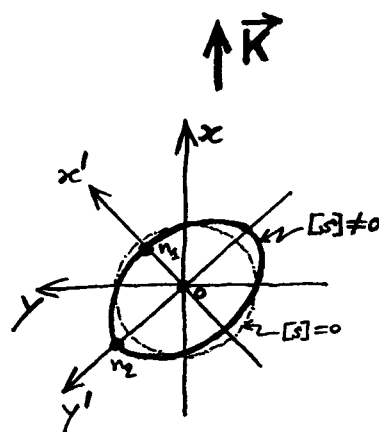
En effet,  $x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$  et  $y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$  donnent

l'équation de l'ellipsoïde des indices dans  $x'y'z$  :

$$\frac{x'^2 + y'^2 + z^2}{n^2} + 2 p_{44} s_6 \frac{x'^2 - y'^2}{2} = 1,$$

soit  $\frac{x'^2}{n_1^2} + \frac{y'^2}{n_2^2} + \frac{z^2}{n_3^2} = 1$

avec 
$$\begin{cases} \frac{1}{n_1^2} = \frac{1}{n^2} + p_{44} s_6 \\ \frac{1}{n_2^2} = \frac{1}{n^2} - p_{44} s_6 \\ \frac{1}{n_3^2} = \frac{1}{n^2} \end{cases},$$



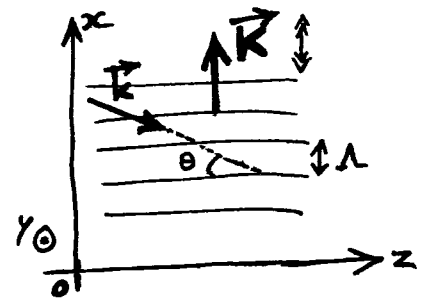
c'est-à-dire :

$$\begin{cases} n_1(x,t) = n - p_{44} n^3 s_o \sin(\Omega t - Kx) \\ n_2(x,t) = n + p_{44} n^3 s_o \sin(\Omega t - Kx) \\ n_3(x,t) = n \end{cases}$$

Sous l'effet d'une onde acoustique transverse, un milieu de structure isotrope devient donc biaxial.

### 3) Reflexion de Bragg

(4)  $\otimes$  Si l'on considère la situation où une onde acoustique longitudinale se propage dans un milieu structurellement isotrope (cf. § 2-c-(A)), on constate qu'elle est extrêmement proche de la description simplifiée des §§ A-3 et A-4. En effet, l'onde acoustique se propageant suivant  $x$ , une onde lumineuse dans le milieu de vecteur d'onde  $\vec{k}$  (cf. figure ci-contre) appartenant au plan  $zxc$ , est un mode propre de propagation à tout instant et en tout lieu, ordinaire si elle est polarisée suivant  $y$  et extraordinaire si elle est polarisée dans le plan  $zxc$  (cf. § IV-B-1).



L'unique correction à la démarche simple des §§ A-3 et A-4, est que la modulation d'indice de réfraction  $\delta n_o$  dépend de la polarisation  $s$  (suivant  $y$ ) ou  $p$  (dans  $zxc$ ) de la lumière. Le rendement de la réflexion de Bragg, qui fait intervenir  $\delta n_o$  (cf. § A-5), n'est donc pas le même pour des faisceaux lumineux polarisés  $s$  ou  $p$ . (Pour la polarisation  $s$ ,  $\delta n_o = (\delta n_o)_o = \frac{1}{2} p_{32} n^3 s_o$ ; pour la polarisation  $p$ ,  $\delta n_o \approx (\delta n_o)_e = \frac{1}{2} p_{32} n^3 s_o$ .)

(7)  $\otimes$  Au contraire, dans le cas où l'onde acoustique suivant  $x$  est transverse (cf. § 2-c-(7)), la situation est plus subtile à analyser, du fait que la lumière polarisée  $s$  ou  $p$  n'est pas dans un mode propre de propagation du milieu.

En raisonnant à la limite  $\theta \approx 0$ , une polarisation incidente  $s$  (suivant  $y$ ) se décompose, à poids égaux et en phase, sur une polarisation suivant  $x'$  et une autre suivant  $y'$  (cf. schéma du § 2-c-(T)). Chacune de ces polarisations subit une réflexion de Bragg, avec  $(\delta n_o)_{x'} = +P_{44} n^3 s_o$  pour la première et  $(\delta n_o)_{y'} = -P_{44} n^3 s_o$  pour la seconde. À cause du changement de signe entre  $(\delta n_o)_{x'}$  et  $(\delta n_o)_{y'}$ , les deux ondes réfléchies se superposent en opposition de phase (cf. § A-4-c) : la réflexion de Bragg est polarisée linéairement suivant  $x$ , c'est-à-dire de polarisation  $p$ .

De la même façon, une onde lumineuse incidente polarisée  $p$  produit une réflexion de Bragg polarisée  $s$ .

Remarque. Ce cours n'a pas considéré l'exemple d'un milieu cristallin. Cependant, la démarche à suivre dans ce cas est la même que celle qui a été empruntée pour un milieu structurellement isotrope : détermination d'abord de la déformation ( $s_k$ ) provoquée par l'onde acoustique ; utilisation ensuite de la matrice ( $P_{ik}$ ) des coefficients photo-élastiques du cristal<sup>(\*)</sup> pour trouver les composantes  $\eta_{ij}$  de l'imperméabilité électrique puis l'ellipsoïde des indices ; recherche enfin des modes propres de propagation, c'est-à-dire des polarisations propres et indices de réfraction propres associés (valeurs moyennes et amplitudes  $\delta n_o$  de modulation). Le fonctionnement du dispositif est alors entièrement déterminé, une fois connues les réflexions de Bragg de ces modes propres de propagation. En pratique, la propagation de l'onde acoustique est suivant une direction cristalline particulière, et la réflexion de Bragg d'un faisceau lumineux incident s'analyse de façon très semblable à ce qui a été présenté dans ce chapitre.

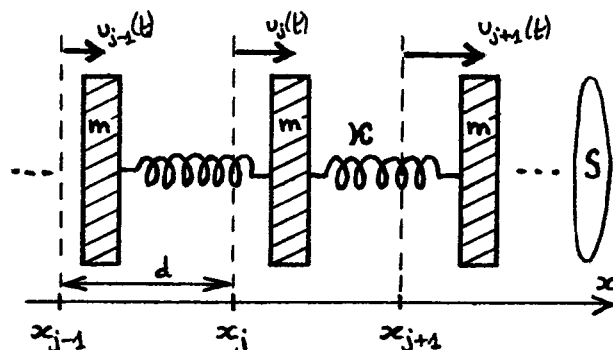
(\*) Les matrices ( $P_{ik}$ ) des 32 classes cristallines sont connues.

# INTRODUCTION À LA PHOTONIQUE

## Exercices VII

1) Intensité d'une onde acoustique longitudinale. Sous l'effet d'une onde acoustique longitudinale se propageant dans un milieu suivant l'axe  $x$ , le plan cristallin situé au repos en  $x_j$  est déplacé de  $u_j(t)$ .

Les plans cristallins, distants au repos de  $d$ , sont supposés interagir par une force harmonique modélisée par un ressort de raideur  $\gamma_0$ .



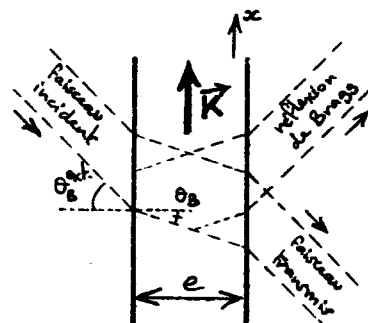
a) L'onde acoustique étant

sinusoïdale :  $u_j(t) = u_0 \cos(\Omega t - Kx_j) = \Re\{u_0 \exp[i(\Omega t - Kx_j)]\}$ , trouver l'expression de la vitesse du son  $V_L = \frac{\Omega}{K}$  en fonction de  $\gamma_0$ ,  $m$  et  $d$  ( $Kd \ll 1$ ), puis avec la masse volumique  $\rho = m/sd$  et la compressibilité  $\chi = s/\gamma_0 d$ .

b) Par passage à la limite continue :  $u_j(t) \rightarrow u(x_j, t)$ , déduire de l'énergie totale  $E = \sum_j \frac{1}{2} m \dot{u}_j(t)^2 + \sum_j \frac{1}{2} \gamma_0 (u_j(t) - u_{j-1}(t))^2$ , l'expression  $e = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} \chi \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$  de l'énergie de l'onde acoustique par unité de volume. Que vaut la moyenne temporelle  $\langle e \rangle$  pour l'onde acoustique en question?

c) Exprimer l'intensité acoustique (en  $W/m^2$ )  $I_{ac.} = \langle e \rangle V_L$  de l'onde. Vérifier que  $I_{ac.} \propto s_0^2$ , où  $s_0$  est l'amplitude de la déformation  $s(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$  du milieu.

2) Modulateur/interrupteur acousto-optique. Une onde acoustique longitudinale se propageant suivant  $x$  dans un milieu structuellement isotrope, l'amplitude de la variation d'indice de réfraction qu'elle produit est

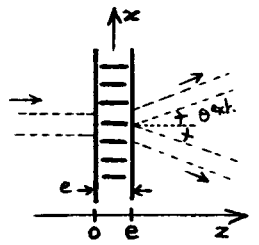


$\delta n_0 = \frac{1}{2} p n^3 s_0$ , où  $s_0$  est l'amplitude de la déformation (cf cours). a) En utilisant l'expression de l'intensité acoustique  $I_{ac.}$  vue à l'exercice précédent, montrer que  $(\delta n_0)^2 = \frac{1}{2} M I_{ac.}$ , où  $M = \frac{(p n^3)^2}{\rho V_L^3}$ . Évaluer  $M$  pour l'eau ( $\rho = 0,31$ ;  $n = 1,33$ ;  $V_L = 1,5 \text{ km/s}$ ;  $\rho = 1 \text{ kg/l}$ ). b) Sachant que le

rendement de la réflexion de Bragg vaut  $\mathcal{R} = \sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda_0} e \delta n_0\right)$ , quelle doit être l'amplitude  $\delta n_0$  pour que  $\mathcal{R} = 1$  (la puissance de la réflexion de Bragg est maximale, et le faisceau transmis disparaît)? Évaluer ce  $\delta n_0$  pour  $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$  et  $e = 5 \text{ mm}$ . À quelle intensité acoustique dans l'eau correspond-il?

c) L'intensité acoustique est brutalement allumée, de la valeur nulle à celle qui réalise  $\mathcal{R} = 1$ . Quel est le temps de montée de la puissance lumineuse de la réflexion de Bragg? Évaluer ce temps de montée pour l'eau et un diamètre de faisceau lumineux de  $1 \text{ mm}$ . d) L'intensité acoustique étant maintenant modulée à la pulsation  $\omega_{\text{mod}}$  :  $I_{\text{ac}}(t) = I_{\text{ac}}^0 + i_{\text{ac}} \cos(\omega_{\text{mod}} t)$ , à quelle(s) condition(s) la puissance lumineuse de la réflexion de Bragg est-elle modulée à la même pulsation? Quelle est la bande passante de modulation?

3) Diffraction de Raman-Nath. Un faisceau lumineux est envoyé en incidence normale sur une onde acoustique de dimension transverse



e. a) Montrer que si  $e < e_c$ , où  $e_c$  est une épaisseur critique à trouver, alors il existe des vecteurs d'onde acoustiques permettant que l'onde incidente subisse des réflexions de Bragg qui la dévient de  $\pm \theta$ , où  $\theta = 2\theta_B \approx \frac{\lambda}{\Lambda}$  (à l'extérieur,  $\theta^{\text{ext}} \approx \frac{\lambda_0}{\Lambda}$ ).

b) Montrer que si  $e \ll e_c$ , alors il existe aussi des vecteurs d'onde optiques dans les directions  $\pm 2\theta, \pm 3\theta, \dots$  (dans le milieu). Évaluer  $e_c$  pour l'eau, avec  $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$  et la fréquence acoustique  $F = 4 \text{ MHz}$ ; commenter. c) Le faisceau lumineux incident étant

étant  $\mathcal{E}(z < 0, t) = \mathcal{E}_0 e^{i(\omega t - k_0 z)}$ ,  $k_0 = \frac{\omega}{c}$ , exprimer l'onde lumineuse immédiatement après l'onde acoustique,  $\mathcal{E}(z = 0^+, x, t)$ , en tenant compte que l'indice de réfraction du milieu vaut  $n(x, t) = n - \delta n_0 \sin(\Omega t - Kx)$  ( $\Omega = 2\pi F$ ,  $K = \frac{\Omega}{V_A}$ ).

Utiliser l'identité  $e^{iasinb} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(a) e^{ilb}$  — où les  $J_l$  sont les fonctions de Bessel de première espèce et d'ordre  $l$  entiers — dans l'expression de  $\mathcal{E}(z = 0^+, x, t)$ , puis trouver le champ lumineux  $\mathcal{E}(z > 0^+, x, t)$  après interaction avec l'onde acoustique mince.

Montrer qu'un faisceau de pulsation  $\omega + l\Omega$  est diffracté dans la direction  $l\theta^{\text{ext}}$ , avec le rendement  $J_l(\delta n_0 k_0 e)^2 = \eta_l$ . Vérifier que  $\eta_{\pm 1} \approx \left(\frac{\pi}{\lambda_0} e \delta n_0\right)^2$  pour une diffraction faible [ $J_l(a) \approx \frac{1}{l!} \left(\frac{a}{2}\right)^{|l|}$  si  $|a| \ll 1$  ( $l \neq 0$ )].



VIII - Optique non linéaireA) Principes de l'Optique non linéaire1) Non-linéarité de la densité de polarisation

Lorsque la lumière dans un milieu <sup>homogène</sup> est très intense, la densité de polarisation de ce milieu,  $\vec{P}(\vec{r}, t)$ , doit être développée aux ordres successifs en le champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  :

$$P_i = \epsilon_0 \left\{ \sum_j \chi_{ij} E_j + \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \sum_{j,k,l} \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots \right\},$$

avec  $\epsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_i}{\partial E_j \partial E_k} (\vec{E}=0)$  et  $\epsilon_0 \chi_{ijkl}^{(3)} = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 P_i}{\partial E_j \partial E_k \partial E_l} (\vec{E}=0)$ .

Cette relation généralise celle d'un milieu linéaire:  $P_i = \epsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j$  (cf. § III-A).

Il n'est pas utile, usuellement, de poursuivre le développement au-delà de l'ordre 3 en champ électrique. Ainsi, le milieu n'est plus seulement caractérisé par sa susceptibilité électrique linéaire  $[\chi_{ij}]$ , mais aussi par ses susceptibilités non linéaires d'ordre 2,  $[\chi_{ijk}^{(2)}]$ , et d'ordre 3,  $[\chi_{ijkl}^{(3)}]$ . ( $[\chi_{ijk}^{(2)}]$  et  $[\chi_{ijkl}^{(3)}]$  sont dimensionnés.)

L'optique non linéaire s'est développée à partir de l'invention du premier laser<sup>(\*)</sup>, en 1960, et notamment grâce aux travaux de

(\*) Laser à rubis ( $\lambda_0 = 694 \text{ nm}$ ), par Theodore Maiman (né en 1927).

N. Bloembergen<sup>(\*)</sup> au début des années 60. Aujourd'hui, l'Optique instrumentale utilise couramment des phénomènes lumineux non linéaires.

## 2) Equation d'onde non linéaire

a) Dans un milieu diélectrique non magnétique, sans charge ni courant libres, les équations de Maxwell (cf. § I-A-2) donnent l'équation d'onde suivante pour  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} + \text{grad}(\text{div} \vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2},$$

obtenue en développant  $\text{rot}(\text{rot} \vec{E})$ .

Une onde électromagnétique se propageant dans un milieu non linéaire sera cherchée dans la suite sous forme d'une superposition

d'ondes dans transverses :  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} \mathcal{R}_e \left\{ \vec{\Sigma}_{\alpha} e^{i(\omega t - \vec{k}_{\alpha} \cdot \vec{r})} \right\}$ ,  $\vec{k}_{\alpha} \cdot \vec{\Sigma}_{\alpha} = 0$ .

On a alors  $\text{div} \vec{E} = 0$ , et le troisième terme du membre de gauche de l'équation précédente disparaît.

Par ailleurs, la densité de polarisation  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  du milieu est séparée en une partie linéaire en  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{P}_{\text{lin}} = \epsilon[\chi] \vec{E}$ , et une partie non linéaire,  $\vec{P}_{\text{NL}} = \vec{P} - \vec{P}_{\text{lin}}$ . Il vient alors :

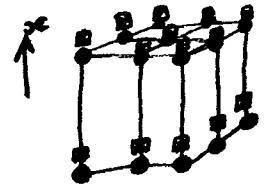
$$\boxed{\frac{1}{c^2} [\epsilon_r] \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_{\text{NL}}}{\partial t^2},}$$

où  $[\epsilon_r] = 1 + [\chi]$  est le tenseur diélectrique du milieu (cf. § III-A).

(\*) Nicolaas Bloembergen (né en 1920); prix Nobel 1981.

b) Afin de porter l'attention, dans un premier temps, sur les effets principaux dus à la non-linéarité du milieu, on réduit l'équation vectorielle précédente à une version scalaire. Pour ce faire, on se place dans le cas particulier d'un cristal admettant un axe  $x$  pour lequel la densité de polarisation et le champ électrique sont alignés :

$$\text{si } \vec{E} = E \hat{O}_x, \text{ alors } \vec{P} = P \hat{O}_x$$



$$\text{avec } P = \epsilon_0 \chi E + P_{NL}$$

$$\text{et } P_{NL} = \epsilon_0 \chi^{(2)} E^2 + \epsilon_0 \chi^{(3)} E^3.$$

On a alors :

$$\boxed{\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \Delta E = -\mu_0 \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2}}, \quad n = \sqrt{1 + \chi'}$$

Cette situation physique particulière présente donc l'intérêt de sommer les difficultés liées à l'anisotropie du milieu et à la polarisation de la lumière, tout en conservant le caractère non linéaire du matériau soumis à une lumière intense.

c) On se limitera, dans ce cours d'introduction à l'optique non linéaire, aux effets non linéaires d'ordre 2:  $P_{NL} = \epsilon_0 \chi^{(2)} E^2$ .

La source  $-\mu_0 \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2} = -\mu_0 \epsilon_0 \chi^{(2)} \frac{\partial^2 (E^2)}{\partial t^2}$  qui apparaît dans l'équation d'onde non linéaire, est fonction du champ auquel elle contribue;

on la traitera de manière perturbative, en considérant d'abord une onde lumineuse  $E^{(0)}(\vec{r}, t)$  créée par une source extérieure dans le milieu supposé linéaire ( $\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E^{(0)}}{\partial t^2} - \Delta E^{(0)} = 0$ ), puis en lui

additionnant ensuite l'onde lumineuse  $E^{(1)}(\vec{r}, t)$  créée par la source de rayonnement  $-\mu_0 \frac{\partial^2 P_{NL}^{(1)}}{\partial t^2}$  avec  $P_{NL}^{(1)} = \epsilon_0 \chi^{(2)} (E^{(1)})^2$  :

$$\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E^{(1)}}{\partial t^2} - \Delta E^{(1)} = -\mu_0 \frac{\partial^2 P_{NL}^{(1)}}{\partial t^2} \quad . \quad P_{NL}^{(1)} \text{ et } E^{(1)} \text{ sont d'ordre 1 en } \chi^{(2)}.$$

### 3) Génération de second harmonique

a) Une onde lumineuse monochromatique est envoyée dans un milieu non linéaire d'ordre deux. Son champ électrique est (cf. §I-C-1) :  $E^{(1)}(\vec{r}, t) = \Re \left\{ \sum_{\omega} E^{(\omega)}(\vec{r}) e^{i\omega t} \right\} = \frac{1}{2} \left( \sum_{\omega} E^{(\omega)}(\vec{r}) e^{i\omega t} + \sum_{\omega} E^{(\omega)*}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \right)$ , où la pulsation  $\omega$  correspond à la longueur d'onde  $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$  dans l'espace libre. La densité de polarisation non linéaire créée par cette onde est  $P_{NL}^{(1)} = \epsilon_0 \chi^{(2)} (E^{(1)})^2$ , soit :

$$P_{NL}^{(1)}(\vec{r}, t) = P_{NL}^0(\vec{r}) + \Re \left\{ P_{NL}^{2\omega}(\vec{r}) e^{2i\omega t} \right\}$$

avec une composante statique  $P_{NL}^0(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \chi^{(2)} \left| \sum_{\omega} E^{(\omega)}(\vec{r}) \right|^2$ , et une composante à la pulsation  $2\omega$  d'amplitude complexe

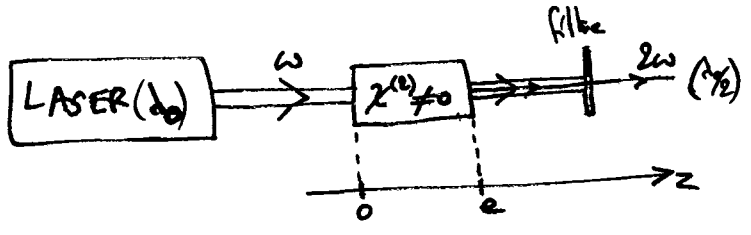
$$P_{NL}^{2\omega}(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \chi^{(2)} \left( \sum_{\omega} E^{(\omega)}(\vec{r}) \right)^2.$$

La densité de polarisation non linéaire produit donc la source de

rayonnement  $-\mu_0 \frac{\partial^2 P_{NL}^{(1)}}{\partial t^2} = \Re \left\{ \mu_0 (2\omega)^2 P_{NL}^{2\omega}(\vec{r}) e^{2i\omega t} \right\}$ , à l'origine

d'une onde lumineuse dans le milieu à la pulsation  $2\omega$ , c'est-à-dire

de longueur d'onde  $\lambda/2$  (dans l'espace libre). Il est ainsi possible de



produire, par exemple, un faisceau lumineux à 347 nm (UV) avec le faisceau à 694 nm (rouge)

d'un laser à rubis, ou encore un faisceau vert à 532 nm à partir du faisceau IR à 1064 nm d'un laser Nd:YAG.

b) Cependant, l'onde lumineuse à  $2\omega$  n'est pas nécessairement générée par le milieu non linéaire, même si la source de rayonnement à  $2\omega$  est bien là. En effet, pour que la lumière de second harmonique soit créée, il faut qu'une condition supplémentaire soit remplie, comme on va le découvrir maintenant.

L'onde envoyée sur le milieu étant supposée être une onde plane progressive, on note  $z$  l'axe suivant sa propagation :

$$E^{(0)}(z, t) = \text{Re} \left\{ \sum_{\omega}^{\omega} e^{i(\omega t - k_2 z)} \right\},$$

avec (cf. § I-C-2) :  $\sum_{\omega}^{\omega}(z) = \sum_0^{\omega} e^{-ik_2 z}$  ,  $k_2 = n k_0$  ( $k_0 = \frac{\omega}{c}$ ).

La source de rayonnement à  $2\omega$  vaut alors <sup>(\*)</sup>

$$-\mu_0 \frac{\partial^2 P_{NL}^{(2)}}{\partial t^2} = \mu_0 (2\omega)^2 d \text{Re} \left\{ \left( \sum_0^{\omega} \right)^2 e^{i(2\omega t - 2k_2 z)} \right\} ;$$

il s'agit d'une grandeur progressive, de nombre d'onde  $2k_2$ . L'onde lumineuse  $E^{(2)}(z, t)$  qu'elle génère, suivant l'équation linéaire (cf. § 2-c) :

$$\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E^{(2)}}{\partial t^2} - \Delta E^{(2)} = -\mu_0 \frac{\partial^2 P_{NL}^{(2)}}{\partial t^2} ,$$

(\*) avec  $d = \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi^{(2)}$ . C'est comme si l'on avait écrit, d'emblée,  $P_{NL} = 2d E^2$ .

est cherchée sous la forme  $E^{(2)}(z,t) = \oint_{\omega} \left\{ \sum_0^{2\omega}(z) e^{i(2\omega t - k_2 z)} \right\}$ ,

$$\text{où } k_2 = n \frac{2\omega}{c} \quad (\text{nombre d'onde à } 2\omega)$$

et  $\sum_0^{2\omega}(z)$  est une enveloppe lentement variable

à l'échelle de  $1/k_2$ . L'équation d'onde pour  $E^{(2)}(z,t)$  donne alors

$$\left[ -\frac{d^2 \sum_0^{2\omega}}{dz^2}(z) + 2ik_2 \frac{d \sum_0^{2\omega}}{dz}(z) \right] e^{-ik_2 z} = \mu_0 (2\omega)^2 d \left( \sum_0^{\omega} \right)^2 e^{-i2k_1 z},$$

soit,  $\sum_0^{2\omega}(z)$  étant lentement variable<sup>(\*)</sup>:

$$\sum_0^{2\omega}(z) = \frac{2\mu_0 \omega^2 d}{ik_2} \left( \sum_0^{\omega} \right)^2 \int_0^z dz' e^{i(k_2 - 2k_1)z'}$$

L'enveloppe de l'onde lumineuse à  $2\omega$  est de module maximal

lorsque la condition  $k_2 = 2k_1$ ,

dite relation d'accord de phase, est vérifiée. Cette égalité assure que

l'onde lumineuse à  $2\omega$  et sa source progressent à la même vitesse de phase dans le milieu:  $\frac{(2\omega)}{k_2} = \frac{(2\omega)}{2k_1}$  (cf. la remarque du §4-a).

Si l'on se réfère aux expressions précédentes de  $k_1$  et  $k_2$ , la relation d'accord de phase semble automatiquement vérifiée. En fait, un milieu diélectrique réel est dispersif: son indice de réfraction  $n^\omega$  varie avec la pulsation optique, et la relation d'accord de phase, qui s'écrit  $n^{2\omega} = n^\omega$ , est impossible à satisfaire. La question de la réalisation de l'accord de phase pour la génération de second harmonique sera vue au §B.

(\*) Ce qui s'exprime par  $|k_2 - 2k_1| \ll 2k_1$ , condition non contraignante car  $\sum_0^{2\omega} \approx 0$  dès que l'on s'écarte de l'accord de phase  $k_2 = 2k_1$  (cf. §B-1).

c) La relation d'accord de phase étant supposée vérifiée, l'onde lumineuse à  $2\omega$  a pour enveloppe

$$\sum_0^{2\omega}(z > e) = \frac{2\mu_0\omega^2 d}{ik_2} \left(\sum_0^\omega\right)^2 e$$

après la sortie du milieu non linéaire (cf. figure du § a). Noter l'intensité<sup>(\*)</sup> de l'onde de second harmonique qui sort du milieu :

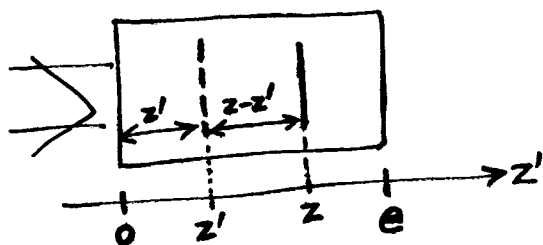
$$I^{2\omega} = 2 \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right)^{3/2} \frac{d^2}{n^3} e^2 \omega^2 (I^\omega)^2 ;$$

elle varie comme le carré de l'intensité de l'onde incidente à  $\omega$ , ce qui est la trace d'un processus non linéaire d'ordre deux. Typiquement,  $d \sim 10^{-23}$  S.I. et l'on a, par exemple,  $I^{2\omega}/I^\omega \approx 10\%$  pour  $I^\omega = 0,1 \text{ W}/(\mu\text{m})^2$  ( $e \approx 1 \text{ cm}$ ,  $n \approx 2$ ).

#### 4) Remarques

a) Suivant le § 3-b, l'amplitude complexe  $\sum_0^{2\omega}(z) = \sum_0^{2\omega}(z) e^{-ik_2 z}$  de l'onde lumineuse de second harmonique, vaut

$$\sum_0^{2\omega}(z) = \frac{2\mu_0\omega^2 d}{ik_2} \left(\sum_0^\omega\right)^2 \int_0^z dz' e^{-ik_2 z'} e^{-ik_2(z-z')} : \text{ en } z, \text{ le}$$



champ à  $2\omega$  est dû aux sources réparties entre  $z'=0$  et  $z'=z$ , la contribution issue de  $z'$  étant déphasée de  $k_2(z-z')$

à cause de la propagation de  $z'$  à  $z$  ( $e^{-ik_2 z'}$  dénote le déphasage de la source à  $2\omega$  depuis son entrée dans le milieu). Dans cette vision des choses, la relation d'accord de phase est la condition d'interférence

(\*) Pour l'intensité d'une onde plane progressive monochromatique, cf. § I-C-2:  $I = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |\mathcal{E}_0|^2$ .

constructive entre les contributions des sources à  $2\omega$  réparties uniformément entre  $z'=0$  et  $z'=z$ .  $\mathcal{E}^{2\omega}(z=e)$  est <sup>alors</sup> proportionnelle au nombre de ces sources, lui-même proportionnel à  $e$ , d'où  $I^{2\omega} \propto e^2$  (cf. § 3-c).

b) On peut adopter un point de vue particulière pour décrire la génération de second harmonique. En considérant les faisceaux à  $\omega_1 = \omega$  et à  $\omega_2 = 2\omega$  comme des  $\text{pôts}$  de photons<sup>(\*)</sup>, on peut voir la relation  $\omega_2 = 2\omega_1$  associée à la relation d'accord de phase  $k_2 = 2k_1$ , comme la relation de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement :

$$\begin{cases} \hbar\omega_2 = 2\hbar\omega_1 \\ \hbar k_2 = 2\hbar k_1, \text{ valables lors} \end{cases}$$

d'une collision entre deux photons à  $\omega$ , qui s'annihilent en



donnant naissance à un photon à  $2\omega$ . Ce processus ne peut se dérouler que dans un milieu non linéaire d'ordre deux : on n'a

$I^{2\omega} \neq 0$  que si  $d \neq 0$  (ie si  $\chi^{(2)} \neq 0$ ), cf. § 3-c. (Le milieu, en quelque sorte, sert de catalyseur au processus photonique en question.)

c) Si l'intensité du faisceau incident à  $\omega$ ,  $I^\omega$ , est suffisamment forte, ou si l'épaisseur du milieu,  $e$ , est assez grande, on ne peut plus utiliser la manière perturbative du § 3 qui suppose que l'onde à  $\omega$  est négligeablement modifiée par l'apparition de l'onde à  $2\omega$ . Il est nécessaire alors d'introduire les deux ondes lumineuses, à  $\omega$  et à  $2\omega$ , dans l'équation d'onde non linéaire, et d'en déduire les équations d'évolution couplées de leurs amplitudes. Cette démarche constitue une théorie de modes couplés. On trouve alors que l'intensité lumineuse à  $2\omega$  sature, suivant

(\*) Cf. note p. II-21.



la loi  $I^{2\omega}(z) = I^{\omega} \text{th}^2(\gamma z)$ , avec  $\gamma \propto \sqrt{I^{\omega}}$ . Si  $\gamma e \gg 1$ , alors

$I^{2\omega}(e) \approx I^{\omega}$  : tous les photons à  $\omega$  s'apparient lors de leur traversée du milieu, pour donner un photon à  $2\omega$ . (Lorsque  $I^{\omega} e^2$  est assez faible,  $\text{th}^2(\gamma e) \approx (\gamma e)^2$  et le résultat du §3-c est retrouvé.)

d) Si deux ondes lumineuses de pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont envoyées dans un milieu non linéaire d'ordre 2, le champ incident  $E^{(i)}(z,t)$ , de la forme  $E^{(i)}(z,t) = \text{Re} \left\{ \sum_{\omega_1} \frac{1}{\epsilon_0} e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} + \sum_{\omega_2} \frac{1}{\epsilon_0} e^{i(\omega_2 t - k_2 z)} \right\}$ , crée une source de rayonnement  $-\mu_0 \frac{\partial^2 P^{(2)}}{\partial t^2} = -\mu_0 \epsilon_0 \chi^{(2)} \frac{\partial^2 (E^{(i)})^2}{\partial t^2}$  contenant la pulsation  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  [et  $\omega_1 - \omega_2$ ]. Une onde optique à cette pulsation est produite dans le milieu, si la relation d'accord de phase  $k_3 = k_1 + k_2$  [ou  $k_3 = k_1 - k_2$ ] est vérifiée. On parle alors de conversion de fréquences optiques.

## Ⓑ Accord de phase pour la génération de second harmonique

### 1) Intérêt de l'accord de phase

En l'absence d'accord de phase, l'enveloppe de l'onde lumineuse à  $2\omega$  vaut, dans le milieu non linéaire d'ordre deux:

$$\sum_{\omega}^{2\omega}(z) = \frac{2\mu_0 \omega^2 d}{ik_2} \left(\frac{1}{\epsilon_0}\right)^2 \int_0^z dz' e^{i\Delta k z'}$$

où  $\Delta k = k_2 - 2k_1 = (n^{2\omega} - n^{\omega}) \frac{2\omega}{c}$  est non nul (cf. §A-3-b).

Comme  $\int_0^z dz' e^{i\Delta k z'} = e^{i\frac{\Delta k z}{2}} \frac{\sin(\frac{\Delta k z}{2})}{\frac{\Delta k}{2}}$ , l'onde de second harmonique

a une enveloppe, à la sortie  $\overset{z=e}{\text{du}}$  milieu, plus petite d'un facteur

$\text{sinc}\left(\frac{\Delta k e}{2}\right)$  que celle obtenue à l'accord de phase  $\Delta k = 0$ , et l'intensité lumineuse à  $2\omega$  est diminuée du même facteur au

Cas où: 
$$I^{2\omega}(\Delta k) = I^{2\omega}(\Delta k = 0) \left[ \text{sinc}\left(\frac{\Delta k e}{2}\right) \right]^2$$

( $\text{sinc}(nr) = \sin nr / nr$ ).

Typiquement,  $n^{2\omega} - n^\omega = 0,01$ ,  $d_0 = 1 \mu\text{m}$  et  $e = 1 \text{cm}$ ; il vient

donc 
$$\frac{\Delta k e}{2} = 2\pi (n^{2\omega} - n^\omega) \frac{e}{d_0} \sim 10^3 \quad \text{et} \quad \frac{I^{2\omega}(\Delta k)}{I^{2\omega}(\Delta k = 0)} \sim \left(\frac{\Delta k e}{2}\right)^{-2} \sim 10^{-6} (!)$$

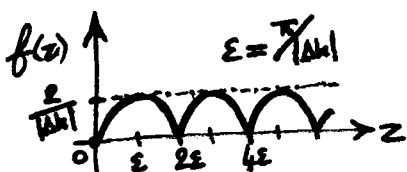
Ainsi un facteur considérable peut-il être gagné sur l'intensité de l'onde optique de second harmonique, si l'on parvient à réaliser l'accord de phase  $\Delta k = 0$ , i.e.  $n^{2\omega} = n^\omega$ . La réalisation de l'accord de phase dans un milieu anisotrope est présentée au § 3; on présente d'abord (cf. § 2 ci-dessous) une façon intermédiaire de procéder.

## 2) Quasi-accord de phase

a) D'après le § 1 précédent, l'enveloppe de l'onde de second harmonique possède <sup>dans le milieu</sup> un module de période  $\frac{2\pi}{|\Delta k|}$ , gouverné par le facteur

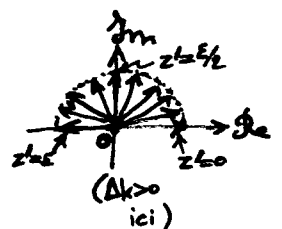
$$f(z) = \left| \frac{\sin\left(\frac{\Delta k z}{2}\right)}{\frac{\Delta k}{2}} \right| \quad \left| \sum_0^{2\omega}(z) \right| \text{ croît de } z=0 \text{ à } z=\varepsilon = \frac{\pi}{|\Delta k|} \text{ où il atteint}$$

son maximum, puis il décroît ensuite pour s'annuler en  $z=2\varepsilon$ . Et ainsi de suite. En effet, les contributions  $e^{i\Delta k z'}$  pour les  $z'$  croissant de 0 à



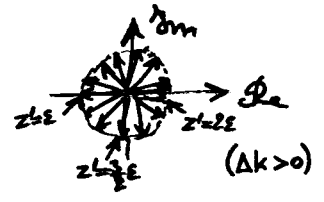
$\varepsilon$  empiétant peu à peu la moitié supérieure (si  $\Delta k > 0$ ) du cercle unité dans le plan complexe, et leur somme

$\int_0^z dz' e^{i\Delta k z'}$  a un module croissant avec  $z$ , tant que  $z < \varepsilon$ .



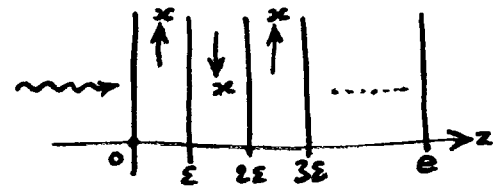
Puis ce module décroît par l'addition des contributions  $e^{i\Delta kz'}$

avec des  $z'$  immédiatement supérieurs à  $\epsilon$ , qui interviennent quand  $z$  dépasse  $\epsilon$ . Pour  $z=2\epsilon$ , les contributions  $e^{i\Delta kz'}$  avec  $z'$  entre 0 et  $2\epsilon$  couvrent l'intégralité du cercle

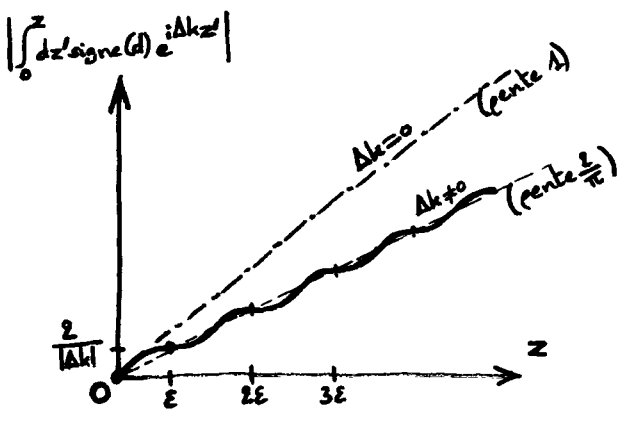


unites, et leur somme est nulle: du point de vue de la génération de second harmonique, tout se passe comme si le milieu entre  $z=0$  et  $z=2\epsilon$  n'existait pas, la deuxième partie  $[\frac{\epsilon}{2}, \epsilon]$  annulant exactement, par interférence destructive, ce qui est bâti par la première partie  $[0, \frac{\epsilon}{2}]$ .

b) Cependant, il y a un moyen que les contributions pour  $\epsilon < z' < 2\epsilon$  s'additionnent constructivement avec celles pour  $0 < z' < \epsilon$ . Il faut pour cela fabriquer une structure artificielle formée de couches d'épaisseur  $\epsilon$ , l'axe  $z$  de non-linéarité d'ordre deux (cf. §A-2-b) étant inversé d'une couche à la suivante, ce qui fait changer le signe de la susceptibilité non linéaire  $d = \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi^{(2)}$  entre deux couches adjacentes.



Le module  $|\sum e^{i\Delta kz}|$  croît alors, en moyenne, suivant une droite dont la pente est  $\frac{2}{\pi}$  fois celle qui serait obtenue à l'accord de phase. À la sortie du milieu, à l'issue

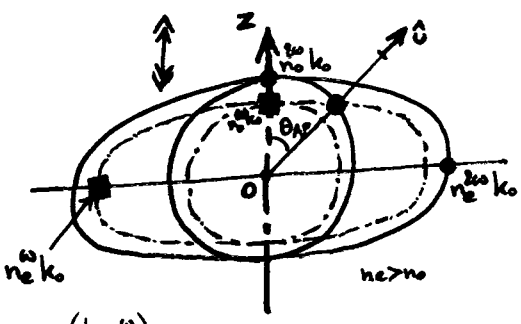


d'un nombre entier de couches d'épaisseur  $\epsilon$ , le quasi-accord de phase permet donc d'obtenir  $(\frac{2}{\pi})^2 \approx 40\%$  de l'intensité de second harmonique générée à l'accord de phase. La difficulté de cette technique de quasi-accord de phase est reportée

sur la fabrication contrôlée de la structure en couches (pour  $n^{2\omega} - n^{\omega} = 0,01$  et  $\lambda_0 = 1 \mu m$ , on a  $\epsilon = \frac{\pi}{|\Delta k|} = \frac{\lambda_0}{4|n^{2\omega} - n^{\omega}|} \approx 25 \mu m$ ).

3) Accord de phase dans un milieu anisotrope uniaxial

a) La relation d'accord de phase  $k_2 = 2k_1$  pour la génération de second harmonique (cf. § A-3-b) égalise le nombre d'onde  $k_2 = n^{2\omega} \frac{2\omega}{c}$  de l'onde de second harmonique, au double du nombre d'onde  $k_1 = n^\omega \frac{\omega}{c}$  de l'onde incidente à  $\omega$ . Cette relation peut être vérifiée dans un milieu anisotrope uniaxial. <sup>(cf. § II-B)</sup> En effet, si l'on trace la surface des  $k$  à  $\omega$ , et la surface des  $k$  à  $2\omega$  avec le rapport d'homothétie  $1/2$ , dans



le cas d'un milieu positif ( $n_e > n_o$ ) et en supposant  $n_o^\omega$  croissant avec  $\omega$ , alors la relation d'accord de phase est vérifiée

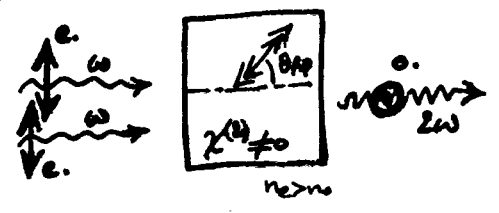
pour des ondes se propageant dans une direction faisant l'angle  $\theta_{AP}$  avec l'axe optique :

$$k_{1(e)}(\theta_{AP}) = \frac{1}{2} k_{2(o)} \quad (\text{cf. figure ci-dessus}),$$

la polarisation de l'onde à  $\omega$  étant extraordinaire et celle à  $2\omega$  ordinaire (possible seulement si  $n_o^\omega < n_o^{2\omega} < n_e^\omega$ ). L'angle  $\pi - \theta_{AP}$  convient aussi.

L'équation précédente peut aussi s'écrire

$$n_e^\omega(\theta_{AP}) = n_o^{2\omega}, \text{ d'où, en utilisant}$$



l'expression de  $n_e^\omega(\theta)$  (cf. § IV-B-1), la relation suivante déterminant

l'angle d'accord de phase  $\theta_{AP}$  :

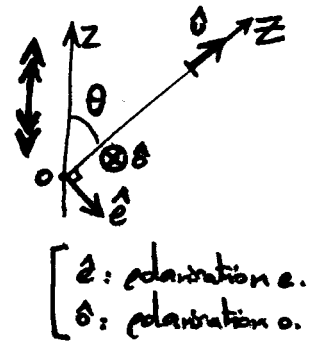
$$\sin^2 \theta_{AP} = \frac{(n_o^\omega)^2 - (n_o^{2\omega})^2}{(n_o^\omega)^2 - (n_e^\omega)^2}.$$

[Si  $n_e < n_o$ , alors la génération de second harmonique est réalisée avec une onde à  $\omega$  ordinaire et une onde à  $2\omega$  extraordinaire;  $\theta_{AP}$  est donné par :  $\sin^2 \theta_{AP} = \frac{(n_e^\omega)^2 - (n_o^{2\omega})^2}{(n_e^\omega)^2 - (n_o^\omega)^2}$  (possible seulement si  $n_e^{2\omega} < n_o^\omega < n_o^{2\omega}$ ).]

b) La source de rayonnement à  $2\omega$ ,  $-\mu_0 \frac{\partial \vec{P}_{NL}^{(2)}}{\partial t^2}$ , fait intervenir la densité de polarisation non linéaire (avec  $d_{ijk} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)}$ ):

$$P_{NLi}^{(2)} = 2 \sum_{j,k} d_{ijk} E_j^{(1)} E_k^{(1)}, \quad \text{où } \vec{E}^{(1)}(z,t) = \Re \left\{ \sum_{\omega} \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_z z)} \right\}.$$

La composante spectrale de  $\vec{P}_{NL}^{(2)}$  à  $2\omega$  a pour enveloppe  $P_{0i}^{2\omega} = \left( \sum_{j,k} d_{ijk} e_j e_k \right) (\sum_{\omega} E_0^{\omega})^2$ ,



et son vecteur d'onde est  $2k_z = 2n_e(\theta) \frac{\omega}{c}$ .

L'onde de second harmonique  $\vec{E}^{(2)}(z,t) = \Re \left\{ \sum_{\omega} \vec{E}_0(z) e^{i(2\omega t - k_z z)} \right\}$   
 ( $k_z = n_e^{2\omega} \frac{2\omega}{c}$ )

est alors déterminée par l'équation d'onde non linéaire du § A-2-a,

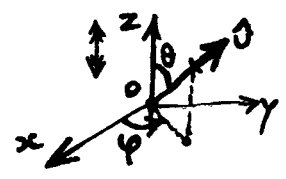
ici linéarisée:  $\frac{1}{c^2} [\epsilon_r] \frac{\partial^2 \vec{E}^{(2)}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E}^{(2)} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{P}_{NL}^{(2)}}{\partial t^2}$ . L'enveloppe

$\sum_{\omega} E_0^{2\omega}(z)$  de l'onde lumineuse à  $2\omega$  étant supposée lentement variable,

on obtient (\*) :  $2ik_z \frac{d \sum_{\omega} E_0^{2\omega}}{dz}(z) = \mu_0 (2\omega)^2 \text{deff} (\sum_{\omega} E_0^{\omega})^2 e^{i\Delta k z}$  ( $\Delta k = k_z - 2k_z$ ),

où  $\text{deff} = \sum_{j,k} d_{ijk} \underset{\substack{\uparrow \\ 2\omega}}{e_j} \underset{\substack{\uparrow \\ \omega}}{e_k}$ . (Les  $d_{ijk}$  sont donnés pour un cristal donné.)

Cette équation pour l'onde à  $2\omega$ , est exactement la même que celle obtenue dans la théorie scalaire du § A-3-b. Cependant, l'accord de phase  $\Delta k = 0$  est maintenant possible, et le couplage non linéaire effectif  $\text{deff}$  dépend de la direction de propagation  $\hat{0}$  par rapport aux axes  $x, y$  et  $z$  (axe optique) du cristal : à  $\theta = \theta_{Ap}$  fixé,  $\text{deff}$  dépend encore, en général, de l'angle  $\varphi$ .



[Si  $n_e < n_o$ , alors  $\text{deff} = \sum_{ijk} d_{ijk} e_j o_k \cdot$ ]

(\*) On a  $[\epsilon_r] \hat{0} = n_o^2 \hat{0}$ ; (o) approximation:  $\vec{E}^{(1)} \cdot \hat{0} \approx 0$ .

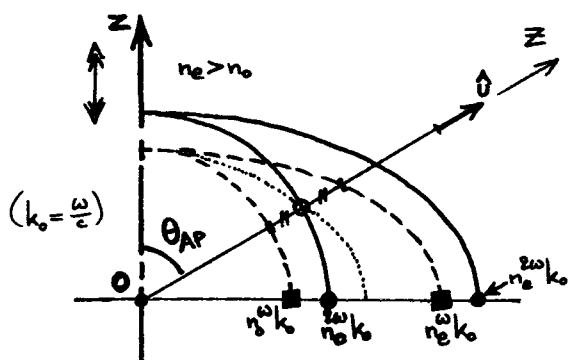
### 4) Accord de phase de type II

a) Il est possible de réaliser la génération de second harmonique avec deux ondes lumineuses à  $\omega$  de polarisations différentes, l'une polarisée ordinairement:  $\hat{e} \sum_{o(o)}^{\omega} e^{i(\omega t - k_{1(o)} z)}$ , et l'autre extraordinairement:  $\hat{e} \sum_{e(e)}^{\omega} e^{i(\omega t - k_{1(e)} z)}$ . On parle alors de génération de second harmonique de type II, la génération de  $2\omega$  à partir d'une seule polarisation à  $\omega$  (cf. §3) étant appelée de type I.

Dans la génération de second harmonique de type II, la source de rayonnement  $-\mu_0 \frac{\partial \vec{P}_{NL}^{(1)}}{\partial t^2}$ , où  $P_{NLi}^{(1)} = 2 \sum_{j,k} d_{ijk} E_j^{(o)} E_k^{(e)}$  avec  $\vec{E}^{(o)}(z,t) = \Re e \{ \hat{e} \sum_{o(o)}^{\omega} \exp[i(\omega t - k_{1(o)} z)] + \hat{e} \sum_{e(e)}^{\omega} \exp[i(\omega t - k_{1(e)} z)] \}$ , possède une composante spectrale à  $2\omega$  mélangeant les deux polarisations, de nombre d'onde  $k_{1(o)} + k_{1(e)}$ . La relation d'accord de phase pour la génération de type II de l'onde à  $2\omega$ :  $\vec{E}^{(2)}(z,t) = \Re e \{ \hat{p} \sum_{o}^{2\omega} \exp[i(2\omega t - k_{2(p)} z)] \}$ , avec  $p=o$  ou  $p=e$ , s'écrit donc

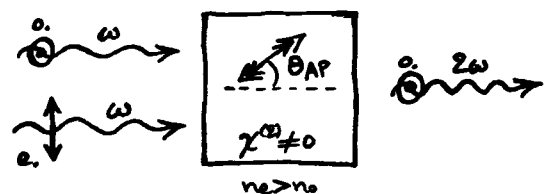
$$k_{1(o)} + k_{1(e)}(\theta_{AP}) = k_{2(p)}(\theta_{AP}).$$

Cette relation signifie que la moyenne  $(k_{1(o)} + k_{1(e)})/2$  des nombres d'onde des deux ondes à  $\omega$ , doit coïncider avec  $\frac{1}{2} k_{2(p)}$ , c'est-à-dire qu'elle doit graphiquement se trouver sur la surface des  $k$  à  $2\omega$  multipliée par le facteur d'homothétie  $1/2$ .



b) Dans le cas d'un milieu uniaxial positif ( $n_e > n_o$ ) — et en supposant toujours  $n_{e,o}^{\omega}$  croissant avec  $\omega$  —, la figure ci-contre (\*) montre que l'accord de phase de type II est possible avec une onde à  $2\omega$  de polarisation ordinaire ( $p=o$ ), à condition

que  $n_o^{2\omega} < \frac{1}{2} (n_o^{\omega} + n_e^{\omega})$ . Le nombre d'onde  $k_{2(o)} = n_o^{2\omega} \frac{2\omega}{c}$  est alors indépendant de  $\theta$ , et la relation d'accord de phase prend la forme



(\*) La courbe en tout petits points représente  $\frac{1}{2} [k_{1(o)} + k_{1(e)}(\theta)]$ .

$n_o^\omega + n_e^\omega(\theta_{AP}) = 2 n_o^{2\omega}$  ; on en déduit, en utilisant l'expression de  $n_e^\omega(\theta)$  vue au § IV-B-1, l'équation

$$\sin^2 \theta_{AP} = \frac{(n_o^\omega)^{-2} - (2n_o^{2\omega} - n_o^\omega)^{-2}}{(n_o^\omega)^{-2} - (n_e^\omega)^{-2}}$$

déterminant l'angle d'accord de phase  $\theta_{AP}$ .

En procédant comme au § 3-b, on trouve l'équation d'évolution suivante pour l'enveloppe de second harmonique  $\mathcal{E}_o^{2\omega}(z)$  :

$$2i k_{z(o)} \frac{d\mathcal{E}_o^{2\omega}}{dz}(z) = 2 \mu_o (2\omega)^2 \epsilon_{eff} \mathcal{E}_{o(o)}^\omega \mathcal{E}_{o(e)}^\omega e^{i\Delta k z},$$

où  $\Delta k = k_{z(o)} - k_{z(o)} - k_{z(e)}(\theta)$  et  $\epsilon_{eff} = \sum_{ijk} d_{ijk} o_i o_j e_k$ . La susceptibilité non linéaire effective s'écrit également  $\epsilon_{eff} = \sum_{ijk} d_{ijk} o_i e_j o_k$ , car  $d_{ijk} = d_{ikj}$  (cf. l'expression de  $\chi_{ijk}^{(2)} = \frac{2}{\epsilon_o} d_{ijk}$  au § A-1). À l'accord de phase  $\Delta k = 0$ , on tire facilement l'expression de  $\mathcal{E}_o^{2\omega}(z)$ , puis la forme de l'intensité<sup>(\*)</sup> de l'onde de second harmonique après un milieu d'épaisseur  $e$  :

$$I^{2\omega} = 8 \left(\frac{\mu_o}{\epsilon_o}\right)^{3/2} \frac{\epsilon_{eff}^2}{n_o^{2\omega} n_o^\omega n_e^\omega(\theta_{AP})} \omega^2 e^2 I_{(o)}^\omega I_{(e)}^\omega.$$

L'intensité à  $2\omega$  est proportionnelle au produit des intensités des deux ondes à  $\omega$ , la loi ci-dessus étant valable tant que  $I^{2\omega}/I_{(o)}^\omega$  et  $I^{2\omega}/I_{(e)}^\omega$  sont petits.

c) Dans un milieu uniaxial négatif ( $n_e < n_o$ ), avec  $n_{e,o}^\omega$  croissant avec  $\omega$ , une analyse graphique semblable à celle du § b précédent montre que la génération de second harmonique de type II est possible avec une onde à  $2\omega$  de polarisation extraordinaire ( $p=e$ ), à condition que  $n_e^{2\omega} < \frac{1}{2}(n_o^\omega + n_e^\omega)$ . Le nombre d'onde  $k_{z(e)}(\theta) = n_e^{2\omega}(\theta) \frac{2\omega}{c}$  dépend maintenant de  $\theta$ , et la relation d'accord de phase, qui s'écrit  $n_o^\omega + n_e^\omega(\theta_{AP}) = 2 n_e^{2\omega}(\theta_{AP})$ , ne permet pas une détermination analytique de  $\theta_{AP}$ .  $\theta_{AP}$  est alors obtenu par une résolution numérique de la relation d'accord de phase. Cependant, lorsque  $\frac{n_o^{2\omega}}{n_o^\omega} \approx \frac{n_e^{2\omega}}{n_e^\omega} = \alpha$ , on obtient  $\sin^2 \theta_{AP} \approx [(2\alpha - 1)^2 - 1] / [(\frac{n_o^\omega}{n_e^\omega})^2 - 1]$ . (On peut

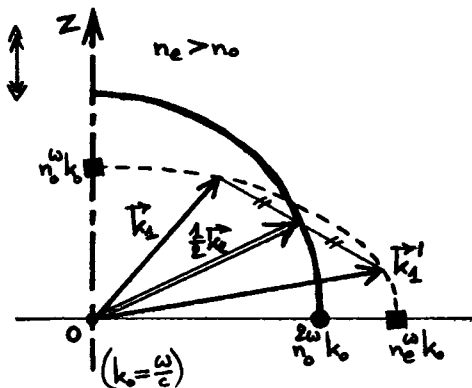
(\*) Cf. note de la page VIII-7.

d'ailleurs procéder par itération, en prenant un nouveau facteur  $\alpha = \frac{n_e^{2\omega}(\theta_{AP})}{n_e^{\omega}(\theta_{AP})}$  pour calculer une deuxième valeur plus précise de  $\sin^2 \theta_{AP}$ , et ainsi de suite jusqu'à la précision voulue.)

Pour le reste, les caractéristiques de la génération de second harmonique dans le cas présent sont les mêmes que celles vues au § 6, en remplaçant  $k_{z(\omega)}$  par  $k_{z(\omega)}(\theta)$  (i.e.  $n_o^{\omega}$  par  $n_e^{\omega}(\theta)$ ) et la susceptibilité non linéaire effective devenant  $d_{\text{eff}} = \sum_{ijk} d_{ijk} e_i o_j e_k = \sum_{ijk} d_{ijk} e_i e_j a_k$ .

### 5) Remarques

a) La génération de second harmonique peut aussi se faire avec deux ondes incidentes à  $\omega$  n'ayant pas la même direction de propagation dans le milieu. En notant  $\vec{k}_1$  et  $\vec{k}_1'$  les vecteurs d'onde de ces deux ondes, la composante spectrale à  $2\omega$  de la polarisation non linéaire qui les mélange, a pour vecteur d'onde  $\vec{k}_1 + \vec{k}_1'$  (cf. § 4-a). L'onde lumineuse de second harmonique, de vecteur d'onde  $\vec{k}_2$ , est donc générée si la relation d'accord de phase  $\vec{k}_1 + \vec{k}_1' = \vec{k}_2$  est vérifiée, c'est-à-dire si l'extrémité du vecteur  $\frac{1}{2}(\vec{k}_1 + \vec{k}_1')$  se situe sur la surface des  $\vec{k}$  à  $2\omega$  multipliée par le facteur d'homothétie  $\frac{1}{2}$ . Dans ces conditions, l'accord de phase est dit vectorel



(lorsque  $\vec{k}_1$  et  $\vec{k}_1'$  sont colinéaires, cf. § 3 et § 4, il est appelé scalaire).

Par exemple, dans un milieu uniaxial positif ( $n_e > n_o$ ), avec  $n_{e,o}^{\omega}$  croissant avec  $\omega$ , l'accord de phase vectorel de type I se réalise avec deux ondes à  $\omega$  polarisées extraordinairement et une onde à  $2\omega$  polarisée ordinairement (cf. la figure ci-dessus, où, pour la clarté, sont seules représentées la nappe extraordinaire de la surface des  $\vec{k}$  à  $\omega$  et la nappe ordinaire de celle à  $2\omega$ ). Il existe une infinité continue de solutions, que  $\vec{k}_1$  et  $\vec{k}_1'$  soient dans le même plan passant par l'axe optique  $z$ , comme sur la



figure, ou qu'ils appartiennent à deux plans axiaux différents.

b) Par ailleurs, on a vu que la dispersion, c'est-à-dire la variation des indices de réfraction principaux avec la pulsation optique  $\omega$ , joue un grand rôle dans la génération de second harmonique, en l'interdisant lorsqu'un seul indice de réfraction principal intervient (cf. §A-3-b) et en contribuant à la détermination de l'angle d'accord de phase (cf. §3 et §4). Cependant, par souci de simplicité, le traitement de la dispersion dans ce cours, bien que finalement exact, n'a pas été mené de manière rigoureuse: après la dérivation d'une équation d'onde non linéaire en l'absence de dispersion (cf. §A-2), le facteur  $n^2$  — ou bien le tenseur  $[E_r]$  — y a été remplacé "à la main" par  $(n^{(\omega)})^2$  ou  $(n^{2\omega})^2$  (cf. §A-3-b) — ou bien par  $(n_o^{(\omega)})^2 \hat{o}\hat{o} + (n_e^{(\omega)}(\theta))^2 \hat{e}\hat{e}$  ou  $(n_o^{2\omega})^2 \hat{o}\hat{o} + (n_e^{2\omega}(\theta))^2 \hat{e}\hat{e}$  (cf. §3 et §4) — suivant qu'il était appliqué à une composante spectrale du champ électrique à  $\omega$  ou à  $2\omega$ . Le traitement rigoureux du rôle de la dispersion est présenté à l'Annexe VIII, où l'on retrouve finalement les résultats déjà obtenus — avec ce raffinement supplémentaire que la susceptibilité non linéaire effective doit dépendre de  $\omega$ .

Annexe VIII1) Densité de polarisation linéaire

Le § I-D-1 a déjà présenté l'expression de la densité de polarisation linéaire, dans un milieu homogène et isotrope présentant de la dispersion:  $\vec{P}_{lin.}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int dt' h(t) \vec{E}(\vec{r}, t-t')$ , où  $h(t)$  est la fonction de réponse linéaire du milieu (vérifiant  $h(t < 0) = 0$ ). Si le champ électrique est harmonique à la pulsation  $\omega$ :  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re\{\vec{E}^\omega(\vec{r}) e^{i\omega t}\}$ , alors la densité de polarisation <sup>linéaire</sup> est à la même pulsation:  $\vec{P}_{lin.}(\vec{r}, t) = \Re\{\vec{P}_{lin.}^\omega(\vec{r}) e^{i\omega t}\}$ , son amplitude complexe vérifiant  $\vec{P}_{lin.}^\omega(\vec{r}) = \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}^\omega(\vec{r})$ , où la susceptibilité linéaire  $\chi(\omega)$  est la transformée de Fourier de la fonction de réponse linéaire:  $\chi(\omega) = \int dt h(t) e^{-i\omega t}$ .

Dans le cas d'un milieu anisotrope, les relations précédentes deviennent:

$$\bullet \quad P_{lin. i}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \sum_j \int dt' h_{ij}(t') E_j(\vec{r}, t-t'), \quad i = 1, 2 \text{ ou } 3,$$

$$\text{soit: } \vec{P}_{lin.}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int dt' [h(t')] \vec{E}(\vec{r}, t-t'),$$

où la fonction de réponse linéaire  $[h(t)]$  est un tenseur de composantes  $h_{ij}(t)$ ;

$$\bullet \quad P_{lin. i}^\omega(\vec{r}) = \epsilon_0 \sum_j \chi_{ij}(\omega) E_j^\omega(\vec{r}), \quad i = 1, 2 \text{ ou } 3,$$

$$\text{soit: } \vec{P}_{lin.}^\omega(\vec{r}) = \epsilon_0 [\chi(\omega)] \vec{E}^\omega(\vec{r}),$$

où le tenseur de susceptibilité linéaire  $[\chi(\omega)]$  a pour composantes les transformées de Fourier de celles de  $[h(t)]$ :

$$\chi_{ij}(\omega) = \int dt h_{ij}(t) e^{-i\omega t}.$$

2) Densité de polarisation non linéaire

En se limitant à la description de la non-linéarité d'ordre deux d'un milieu diélectrique, la densité de polarisation non linéaire qu'il porte

s'exprime sous la forme ( $i = 1, 2$  ou  $3$ ):

$$P_{NLi}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \sum_{j,k} \int dt' \int dt'' h_{ijk}^{(2)}(t', t'') E_j(\vec{r}, t-t') E_k(\vec{r}, t-t''),$$

où les fonctions  $h_{ijk}^{(2)}(t', t'')$  sont les composantes du tenseur de réponse non linéaire d'ordre deux,  $[h^{(2)}(t', t'')]$ . Par causalité,  $h_{ijk}^{(2)}(t', t'') = 0$  si  $t' < 0$  ou si  $t'' < 0$ .

Si  $[h^{(2)}(t', t'')]$  n'est non nul que pour des temps  $t'$  et  $t''$  très courts devant la période optique, alors on peut écrire  $E_j(\vec{r}, t-t') \approx E_j(\vec{r}, t)$  et  $E_k(\vec{r}, t-t'') \approx E_k(\vec{r}, t)$  dans l'expression ci-dessus, et il vient alors

$$P_{NLi}(\vec{r}, t) \approx \epsilon_0 \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)} E_j(\vec{r}, t) E_k(\vec{r}, t) \text{ avec } \chi_{ijk}^{(2)} = \int dt' \int dt'' h_{ijk}^{(2)}(t', t'').$$

C'est dans ce cas particulier que l'on s'est placé dans tout ce chapitre, par souci de simplicité. Cependant, pour être cohérent avec la prise en compte de la dispersion affectant la densité de polarisation linéaire  $\vec{P}_{lin}(\vec{r}, t)$  (cf. § 1), cette description simplifiée doit être abandonnée et c'est l'expression exacte de la densité de polarisation non linéaire  $P_{NLi}(\vec{r}, t)$  qui doit être employée.

### 3) Équation d'onde non linéaire dispersive

En procédant de la même façon qu'au § A-2-a, on trouve l'équation d'onde non linéaire suivie par le champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  dans un milieu homogène présentant de la dispersion :

$$\frac{1}{c^2} \left\{ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}(\vec{r}, t) + \int dt' [h(t')] \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t'^2}(\vec{r}, t-t') \right\} - \Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2}(\vec{r}, t),$$

où  $[h(t)]$  est le tenseur de réponse linéaire du milieu (cf. § 1), et  $\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t)$  est la partie non linéaire de la densité de polarisation. Dans le cas d'un milieu non linéaire d'ordre deux,  $\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t)$  prend la forme vue au § 2.

Dans l'établissement de l'équation d'onde non linéaire ci-dessus, on a considéré que  $\text{div } \vec{E} = 0$  (cf. § A-2-a), en prévision de l'utilisation d'ondes planes progressives transverses ou quasi transverses (cf. § B-3-b).

#### 4) Génération de second harmonique en milieu dispersif

a) On se place dans la situation de la génération de second harmonique de type I, où l'onde initiale à  $\omega$  est polarisée extraordinairement (cf. § B-3):  $\vec{E}^{(0)}(\vec{z}, t) = \mathcal{P}_e \left\{ \hat{e} \varepsilon_0^\omega e^{i(\omega t - k_1 z)} \right\}$ , où l'axe  $Z$  est suivant la propagation — voir la figure de la p. VIII-13. Suivant la démarche perturbative présentée au § A-2-c,  $\vec{E}^{(0)}(\vec{z}, t)$  suit l'équation

$$\frac{1}{c^2} \left\{ \frac{\partial^2 \vec{E}^{(0)}}{\partial t^2}(\vec{z}, t) + \int dt' [h(t')] \frac{\partial^2 \vec{E}^{(0)}}{\partial t^2}(\vec{z}, t-t') \right\} - \frac{\partial^2 \vec{E}^{(0)}}{\partial z^2}(\vec{z}, t) = 0,$$

déduite de l'équation générale vue au § 3 précédent en annulant le terme source. En remplaçant  $\vec{E}^{(0)}(\vec{z}, t)$  par son expression, l'équation ci-dessus donne  $[\varepsilon_r(\omega)] \hat{e} = \frac{k_1^2}{k_0^2} \hat{e}$ , où  $[\varepsilon_r(\omega)] = \mathbb{1} + [\chi(\omega)]$  est le tenseur diélectrique ( $k_0 = \frac{\omega}{c}$ ). On en déduit<sup>(\*)</sup> donc  $k_1^\omega = n_e^\omega(\theta) k_0$ . (Le même raisonnement montre que  $k_1^\omega = n_o^\omega k_0$  si l'onde  $\vec{E}^{(0)}(\vec{z}, t)$  est polarisée ordinairement.)

b) La densité de polarisation non linéaire vaut, à l'ordre un en  $[h^{(2)}(t', t'')]$ ,  $P_{NLi}^{(1)}(\vec{z}, t) = \varepsilon_0 \sum_{j,k} \int dt' \int dt'' h_{ijk}^{(2)}(t', t'') E_j^{(0)}(\vec{z}, t-t') E_k^{(0)}(\vec{z}, t-t'')$ ,  $i=1, 2$  ou  $3$  (cf. § 2). En injectant la forme de  $\vec{E}^{(0)}(\vec{z}, t)$  dans cette expression, on trouve

$$\vec{P}_{NL}^{(1)}(\vec{z}, t) = \vec{P}_{NL}^0 + \mathcal{P}_e \left\{ \vec{\mathcal{P}}_{NL}^{2\omega} e^{i(2\omega t - 2k_1 z)} \right\},$$

où la densité de polarisation statique est

$$P_{NLi}^0 = \left( \sum_{j,k} d_{ijk}(\omega \rightarrow 0) e_j e_k \right) |\varepsilon_0^\omega|^2$$

$$\text{avec } d_{ijk}(\omega \rightarrow 0) = \frac{\varepsilon_0}{2} \int dt' \int dt'' h_{ijk}^{(2)}(t', t'') \cos \omega(t' - t''),$$

tandis que son enveloppe à  $2\omega$  vaut

$$\vec{\mathcal{P}}_{NLi}^{2\omega} = \left( \sum_{j,k} d_{ijk}(\omega \rightarrow 2\omega) e_j e_k \right) (\varepsilon_0^\omega)^2$$

(\*) en négligeant l'absorption

$$\text{avec } d_{ijk}(\omega \rightarrow 2\omega) = \frac{\epsilon_0}{2} \int dt' \int dt'' h_{ijk}^{(2)}(t', t'') e^{-i\omega(t'+t'')}.$$

c) Enfin, l'onde lumineuse de second harmonique:  $\vec{E}^{(2)}(\vec{z}, t) = \text{Re} \left\{ \hat{e}_0^{2\omega}(\vec{z}) e^{i(2\omega t - k_2 z)} \right\}$   
avec  $k_2 = n_0 \frac{2\omega}{c}$  (cf. § a), est déterminée à l'ordre un en  $[h^{(2)}(t', t'')] par$

$$\frac{1}{c^2} \left\{ \frac{\partial^2 \vec{E}^{(2)}}{\partial t^2}(\vec{z}, t) + \int dt' [h^{(2)}(t')] \frac{\partial^2 \vec{E}^{(2)}}{\partial t'^2}(\vec{z}, t-t') \right\} - \frac{\partial^2 \vec{E}^{(2)}}{\partial z^2}(\vec{z}, t) = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}^{(2)}}{\partial t^2}(\vec{z}, t).$$

On trouve alors,  $\hat{e}_0^{2\omega}(\vec{z})$  étant lentement variable :

$$2ik_2 \frac{d\hat{e}_0^{2\omega}}{dz}(\vec{z}) = \mu_0 (2\omega)^2 d_{\text{eff}}(\omega) (\hat{e}_0^{\omega})^2 e^{i\Delta k z},$$

où  $d_{\text{eff}}(\omega) = \sum_{i,j,k} d_{ijk}(\omega \rightarrow 2\omega) \hat{e}_i \hat{e}_j \hat{e}_k$  ( $\Delta k = k_2 - 2k_1$ ). Cette équation suivie par l'enveloppe  $\hat{e}_0^{2\omega}(\vec{z})$  de l'onde de second harmonique, est la même que celle qui a été trouvée au § B-3-b, avec cette précision supplémentaire que la susceptibilité non linéaire effective  $d_{\text{eff}}(\omega)$  est un <sup>nombre</sup> complexe dépendant de la pulsation optique  $\omega$  — ainsi que l'on pouvait s'y attendre dans un milieu dispersif.

---

(\*) en plus de dépendre de la direction de propagation dans le milieu

# INTRODUCTION À LA PHOTONIQUE

## Exercices VIII

### 1) Non-linéarité optique d'ordre deux : modèle classique

Les nuages électroniques (masse  $m$ , charge  $q$ ) d'un milieu sont mobiles suivant l'axe  $x$ . Leur position instantanée est repérée par leur écart  $\delta(t)$  à leur position d'équilibre, vers laquelle ils sont rappelés par une force anharmonique  $-\kappa \delta(t) + A \delta(t)^2$ ,  $\kappa > 0$ .

Un champ électrique  $E(t)$  est appliqué le long de l'axe  $x$ .

a) Écrire l'équation du mouvement d'un nuage électronique ; on introduira une force de frottement fluide  $-f \frac{d\delta}{dt}(t)$ ,  $f > 0$ .

En déduire l'équation différentielle suivie par la densité de polarisation  $P(t) = Nq\delta(t)$ , où  $N$  est le nombre de nuages par unité de volume ; on introduira les notations  $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$  et  $\Gamma = f/m$  ( $\Gamma \ll \omega_0$ ).

b) On se place en *régime quasi statique*,  $E(t)$  étant supposé varier lentement à l'échelle de  $2\pi/\omega_0$ .

• Exprimer la réponse linéaire ( $A = 0$ ) sous la forme  $P(t) = \epsilon_0 \chi E(t)$ , en précisant l'expression de la susceptibilité linéaire statique  $\chi$ .

• Lorsque  $A \neq 0$  reste faible, montrer que  $P(t) = \epsilon_0 \chi E(t) + P_{NL}(t)$  où la densité de polarisation non linéaire est  $P_{NL}(t) = 2 d E(t)^2$  ; préciser l'expression de la susceptibilité non linéaire statique d'ordre deux,  $d$ . Vérifier que  $d \propto \chi^3$  (règle de Miller) ; interpréter physiquement ce résultat.

• Exprimer  $P_{NL}(t)$  lorsque  $E(t) = E_0 \cos\omega t$  et lorsque  $E(t) = E_1 \cos\omega_1 t + E_2 \cos\omega_2 t$ .

c) Le champ électrique étant sinusoïdal, de la forme  $E(t) = E_0 \cos\omega t$ , on tient compte maintenant de la *dispersion*, la pulsation  $\omega$  étant supposée proche de  $\omega_0$ .

• La solution stationnaire étant écrite  $P(t) = \text{Re}\{\mathcal{P}^\omega e^{i\omega t}\}$  en régime linéaire ( $A = 0$ ), trouver la susceptibilité linéaire  $\chi(\omega)$  définie par  $\mathcal{P}^\omega = \epsilon_0 \chi(\omega) E_0$ .

• Lorsque  $A \neq 0$  reste faible, montrer qu'un nouveau champ électrique (effectif)  $\frac{A}{N^2 q^3} [\text{Re}\{\mathcal{P}^\omega e^{i\omega t}\}]^2$  apparaît. En déduire que la non-linéarité crée une densité de polarisation statique  $P_0 = d(\omega \rightarrow 0) (E_0)^2$  et une densité de polarisation à la pulsation de second harmonique, d'amplitude complexe  $\mathcal{P}^{2\omega} = d(\omega \rightarrow 2\omega) (E_0)^2$  ; trouver les expressions de  $d(\omega \rightarrow 0)$  et  $d(\omega \rightarrow 2\omega)$ .

• Examiner le cas où  $E(t) = E_1 \cos\omega_1 t + E_2 \cos\omega_2 t$ . On s'intéressera aux composantes spectrales de la densité de polarisation  $P(t)$  qui apparaissent aux pulsations somme  $\omega_1 + \omega_2$  et différence  $\omega_1 - \omega_2$  ( $\omega_1 > \omega_2$ ), et on exprimera les susceptibilités non linéaires  $d(\omega_1, \omega_2 \rightarrow \omega_1 + \omega_2)$  et  $d(\omega_1, \omega_2 \rightarrow \omega_1 - \omega_2)$ .

### 2) Effet Kerr optique

Une onde optique de pulsation  $\omega$  :  $E(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathcal{E}^\omega(\mathbf{r})e^{i\omega t}\}$ , est présente dans un milieu non linéaire d'ordre 3. (Un tel milieu est appelé milieu Kerr.)

a) Calculer les composantes spectrales de la densité de polarisation non linéaire  $P_{NL} = \epsilon_0 \chi^{(3)} E^3$ .

b) Montrer que, à la pulsation  $\omega$ , le milieu se comporte comme s'il était linéaire avec un indice de réfraction  $n + \Delta n$ , où 
$$\Delta n(\mathbf{r}) = \frac{3\chi^{(3)}}{8n} |\mathcal{E}^\omega(\mathbf{r})|^2 \quad (\text{effet Kerr optique}).$$

c) Lorsque l'onde à  $\omega$  est propageante :  $\mathcal{E}^\omega(\mathbf{r}) = \mathcal{E}_0^\omega e^{-ik_1 z}$ , exprimer l'indice de réfraction sous la forme

$$n(I) = n + n_2 I,$$

où  $I = \frac{n}{2} (\epsilon_0/\mu_0)^{1/2} |\mathcal{E}_0^\omega|^2$  (en W/m<sup>2</sup>) est l'intensité de l'onde ; préciser l'expression de  $n_2$ .

d) Que vaut la vitesse de phase de l'onde à  $\omega$  ? Exprimer le déphasage de l'onde entre deux plans d'onde distants de  $L$  (effet d'auto-modulation de phase).

e) L'onde à  $\omega$  étant propageante, trouver la relation d'accord de phase pour la génération de troisième harmonique. Quelle est la relation correspondante sur l'indice de réfraction ?

### 3) Mélange à quatre ondes – Conjugaison de phase

Une superposition de trois ondes optiques est présente dans un milieu non linéaire d'ordre 3 :

$$E(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ \mathcal{E}^{(1)}(\mathbf{r}) e^{i\omega_1 t} + \mathcal{E}^{(2)}(\mathbf{r}) e^{i\omega_2 t} + \mathcal{E}^{(3)}(\mathbf{r}) e^{i\omega_3 t} \},$$

$$\text{soit : } E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_q \mathcal{E}^{(q)}(\mathbf{r}) e^{i\omega_q t}, \quad q = \pm 1, \pm 2, \pm 3,$$

avec les conventions  $\omega_{-q} = -\omega_q$  et  $\mathcal{E}^{(-q)}(\mathbf{r}) = \mathcal{E}^{(q)}(\mathbf{r})^*$ .

a) Exprimer la densité de polarisation non linéaire  $P_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \chi^{(3)} E(\mathbf{r}, t)^3$ .

b) Trouver la composante spectrale de  $P_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t)$  à la pulsation

$$\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3.$$

c) Lorsque les trois ondes sont propagatives :  $\mathcal{E}^{(q)}(\mathbf{r}) = \mathcal{E}_0^{(q)} e^{-ik_q \cdot \mathbf{r}}$ ,  $|\mathbf{k}_q| = n_q \frac{\omega}{c}$ , quelle est la relation d'accord de phase pour la génération de l'onde optique à la pulsation  $\omega_4$  ?

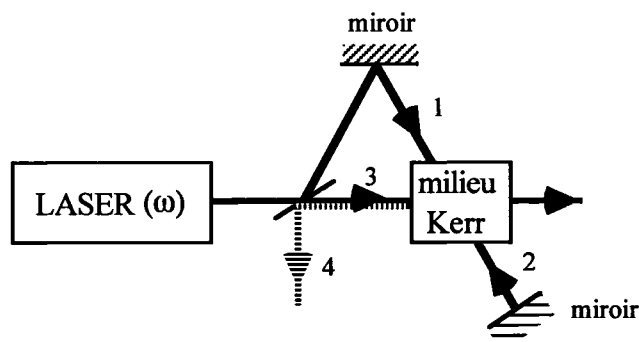
d) Montrer que l'onde optique à  $\omega_4$  une fois générée – la condition d'accord de phase correspondante étant remplie – peut interagir avec deux quelconques des trois premières ondes pour contribuer à celle qui reste (on néglige ces interactions dans la suite).

e) Les trois ondes initiales ont maintenant la même pulsation :  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$ , donc aussi la quatrième :  $\omega_4 = \omega$  ; de plus, les ondes 1 et 2 sont contra-propageantes :  $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1$ .

Montrer que  $\mathbf{k}_4 = -\mathbf{k}_3$ , que la relation d'accord de phase est automatiquement vérifiée et que l'onde 4 est une version conjuguée de l'onde 3 :

$$\mathcal{E}^{(4)}(\mathbf{r}, t) \propto [\mathcal{E}_0^{(3)} e^{-ik_3 \cdot \mathbf{r}}]^* e^{i\omega t} \quad (\text{conjugaison de phase}).$$

f) Vérifier que cette conjugaison de phase revient à un renversement du temps, l'onde 4 étant proportionnelle à l'onde 3 remontant le temps.



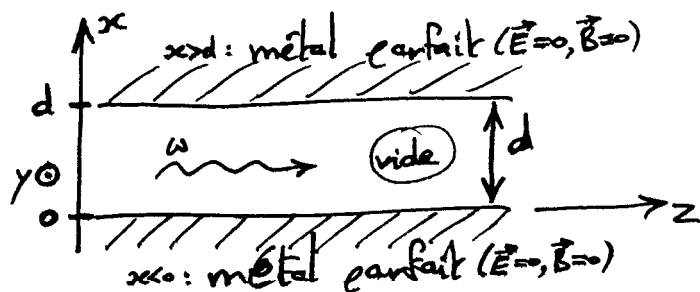
*expérience de conjugaison de phase*

IX - Ondes électromagnétiques guidées

① Guidage métallique plan

1) Introduction

On considère deux plans métalliques parfaits, parallèles,



séparés par une épaisseur  $d$  de vide, comprise entre  $x=0$  et  $x=d$ . On cherche à se faire propager une onde confinée entre ces deux plans.

Les deux plans métalliques parfaits imposent<sup>(\*)</sup> que tout champ électromagnétique dans l'espace libre entre eux, ait la composante tangentielle (resp. normale) de son champ électrique (resp. magnétique) nulle en  $x=0$  et en  $x=d$ . Ce type de guidage métallique est utilisé avec les ondes électromagnétiques du domaine microonde (10<sup>-2</sup> à 10<sup>-1</sup> cm).

a) Une onde plane progressive de pulsation  $\omega$ , polarisée orthogonalement aux plans métalliques, peut se propager dans le guide, suivant  $z$ , comme si les plans métalliques étaient absents. En effet, cette onde possède un champ électrique d'amplitude complexe<sup>(a)</sup>

$$\vec{E}(z) = E_0 \hat{u}_x e^{-ik_0 z} \quad (k_0 = \frac{\omega}{c}) ,$$

et un champ magnétique

$$\vec{B}(z) = \frac{1}{c} \hat{u}_z \times \vec{E}(z) = \frac{E_0}{c} \hat{u}_y e^{-ik_0 z} .$$

(\*) cf. § I-A-2-d.

(a) cf. § I-C.



Le champ électrique ne possède pas de composante tangentielle aux plans métalliques, et les discontinuités normales du champ électrique entre l'espace libre et <sup>(l'intérieur des)</sup> plans métalliques imposent la présence de densités surfaciques de charge en  $x=0$  et en  $x=d$ . De même, le champ magnétique n'a pas de composante normale aux plans métalliques, et les discontinuités tangentielles du champ magnétique en  $x=0$  et en  $x=d$  imposent la présence de densités surfaciques de courant sur ces plans.

Ainsi, pour une onde plane orthogonalement aux plans métalliques, tout se passe comme dans le vide illimité, et ce sont les plans métalliques qui doivent s'adapter au passage de l'onde, en créant des charges et des courants de surface.

b) La situation est entièrement inversée si l'onde électromagnétique plane est plane parallèlement aux plans métalliques. En effet, son champ électrique  $\vec{E}(z) = \sum \sigma_y e^{-ik_0 z}$ , uniforme dans tout plan d'onde  $z=Ct$ , ne s'annule pas sur les plans métalliques  $x=0$  et  $x=d$ , comme il le devrait. (De même, le champ magnétique  $\vec{B}(z) = -\frac{1}{c} \sum \sigma_x e^{-ik_0 z}$  de l'onde ne s'annule pas sur les plans métalliques.) Donc, en polarisation parallèle aux plans métalliques, la présence des plans impose des contraintes fortes au champ électromagnétique, et interdit à la solution onde plane de se propager. Il faut alors chercher, dans le guide, une onde progressive d'un autre genre que l'onde plane TEM<sup>(a)</sup> qui existe dans l'espace libre et illimité.

(\*) cf. § I-A-2-d. (a) cf. § I-C-2.

## 2) Modes de propagation TE

a) Une onde progressive dans le guide métallique plan, polarisée parallèlement aux plans, est cherchée sous la forme

$$\vec{\Sigma}(z, x) = \Sigma_0(x) \hat{u}_y e^{-i\beta z},$$

où l'enveloppe  $\Sigma_0(x)$  s'annule en  $x=0$  et  $x=d$ . La grandeur  $\beta$  intervenant dans le facteur de propagation est appelée constante de propagation ( $\beta$  réelle  $> 0$ ).

Dans le vide ( $0 < x < d$ ), le champ électrique de l'onde,  $\vec{E}(z, x, t) = \text{Re} \{ \vec{\Sigma}(z, x) e^{i\omega t} \}$ , suit l'équation d'onde

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = 0$$

(cf. § I-A-1-b), d'où l'équation de Helmholtz<sup>(\*)</sup> sous par la magnitude complexe  $\vec{\Sigma}(z, x)$ :

$$\Delta \vec{\Sigma} + k_0^2 \vec{\Sigma} = 0.$$

Il vient alors, pour l'unique composante  $y$  de  $\vec{\Sigma}(z, x)$ :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (\Sigma_0(x) e^{-i\beta z}) + k_0^2 \Sigma_0(x) e^{-i\beta z} = 0,$$

soit:

$$\Sigma_0''(x) + (k_0^2 - \beta^2) \Sigma_0(x) = 0.$$

(\*) Hermann von Helmholtz (1821-1894)

b) Si  $\beta = k_0$ , alors  $\Sigma(x) = \beta_{12} x + \beta_{22}$ . Les conditions aux limites  $\Sigma(x=0) = 0$  et  $\Sigma(x=d) = 0$  imposent alors  $\beta_{22} = 0$  et  $\beta_{12} = 0$ , ie  $\Sigma(x) = 0$  : il n'y a pas de solution à  $\beta = k_0$ .

Si l'on suppose  $\beta < k_0$ , alors  $\Sigma(x) = \beta_{12} \sin \sqrt{k_0^2 - \beta^2} x + \beta_{22} \cos \sqrt{k_0^2 - \beta^2} x$ .

Les conditions aux limites donnent alors  $\beta_{22} = 0$  et

$\beta_{12} \sin \sqrt{k_0^2 - \beta^2} d = 0$ . Des solutions  $\Sigma(x)$  non nulles sont obtenues (\*)

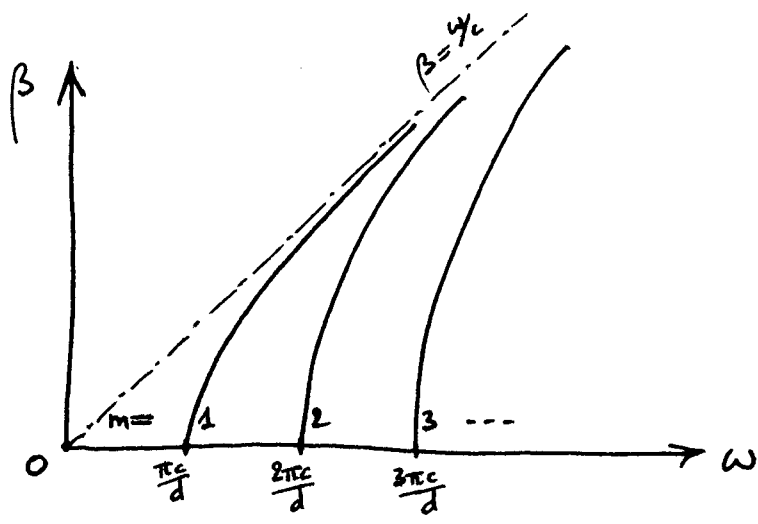
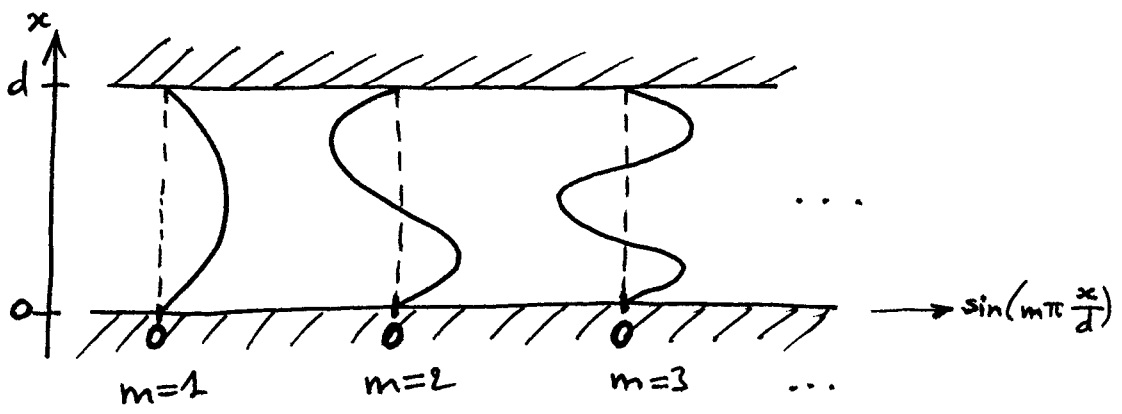
pour  $\sqrt{k_0^2 - \beta_m^2} = m \frac{\pi}{d}$ ,  $m = 1, 2, 3, 4, \dots$

À une valeur de  $m$  correspond un mode de propagation, défini <sup>à la fois</sup> par la structure spatiale du champ déterminée

par l'enveloppe:  $\Sigma_0^{(m)}(x) = \beta \sin(m \pi \frac{x}{d})$ , et <sup>par</sup> la relation de dispersion associée:  $\beta_m = \sqrt{(\frac{\omega}{c})^2 - (m \frac{\pi}{d})^2}$ .

Comme le champ électrique est orthogonal à la direction de propagation  $z$ , et que cela n'est pas le cas du champ magnétique (ce qui se montre à l'aide de l'équation  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , voir le paragraphe 4-a), ces modes de propagation sont dits TE, pour transverse électrique. Les relations de dispersion et les structures spatiales des premiers modes  $TE_m$  sont représentées sur les figures ci-après.

(\*) Il n'y a pas de solution avec  $\beta > k_0$  : il viendrait alors ( $\sin ix = i \cosh x$ )  $\beta_{12} \text{sh} \sqrt{\beta^2 - k_0^2} d = 0$ , d'où  $\beta_{12} = 0$ .

$\beta_m(\omega) :$ 

 $\sum_0^{(m)}(x) :$ 


L'enveloppe  $\sum_0^{(m)}(x)$  du mode  $TE_m$  s'annule  $m-1$  fois suivant  $x$  (en excluant  $x=0$  et  $x=d$ ), dans l'espace vide entre les deux plans métalliques. Les modes de  $m$  impair sont symétriques par rapport à  $x=d/2$ ; les modes de  $m$  pair sont antisymétriques.

c) Le mode  $TE_m$  n'existe que si  $\beta_m$  est réelle; il faut donc pour cela que  $\omega > m \frac{\pi c}{d}$ , où  $m \frac{\pi c}{d}$  est la pulsation de coupure du mode  $TE_m$ . Pour qu'au moins un mode  $TE_m$  existe, il faut que  $\omega > \omega_c$ , où  $\omega_c = \frac{\pi c}{d}$  est la pulsation de coupure du guide d'onde métallique plan. Par exemple, pour  $d = 1,5 \text{ cm}$ , il vient  $\nu_c = \omega_c / 2\pi = 10 \text{ GHz}$  et  $\lambda_0^c = \frac{c}{\nu_c} = 3 \text{ cm}$ .

À  $\omega$  donnée, le nombre de modes TE est le nombre de fois que  $\omega_c = \frac{\pi c}{d}$  peut entrer dans  $\omega$  :

$$M_{TE} = E\left(\frac{\omega}{\left(\frac{\pi c}{d}\right)}\right) = E\left(\frac{2d}{\lambda_0}\right),$$

où  $E(\dots) =$  partie entière de  $\dots$ . Par exemple, un guide métallique avec  $d = 1,5$  cm ne peut supporter que deux modes de propagation TE ( $m=1$  et  $m=2$ ) s'il est utilisé à  $\nu = 24$  GHz.

d) Le champ électrique dans le mode  $TE_m$  est ( $A = |A|e^{i\phi}$ )

$$E_y^{(m)}(z, x, t) = |A| \sin\left(m\pi \frac{x}{d}\right) \cos(\omega t - \beta_m z + \phi). \text{ Il possède un}$$

caractère stationnaire suivant  $x$  et se propage suivant  $z$  avec

$$\text{la vitesse de phase } v_p^{(m)} = \frac{\omega}{\beta_m} = c \left[1 - \left(\frac{m\pi c}{\omega d}\right)^2\right]^{-1/2} (> c).$$

La longueur d'onde dans le guide, pour ce mode, vaut

$$\lambda^{(m)} = \frac{2\pi}{\beta_m} = \frac{v_p^{(m)}}{\nu} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(m \frac{\lambda_0}{2d}\right)^2}} (> \lambda_0).$$

La vitesse de groupe dans ce même mode  $TE_m$  est

$$v_g^{(m)} = \frac{d\omega}{d\beta_m} = c \left[1 - \left(\frac{m\pi c}{\omega d}\right)^2\right]^{+1/2} (< c).$$

e) Finalement, la recherche d'une onde électromagnétique polarisée suivant  $y$ , se propageant dans le guide, en a fourni plusieurs (les modes de propagation  $TE_m$ ). La linéarité des équations de

Maxwell dans l'espace libre, permet d'écrire l'onde la plus générale se propageant dans le guide avec une polarisation parallèle aux plans métalliques, comme une superposition d'ondes TEM :

$$\sum_y(z, x) = \sum_m a_m \sin(m\pi \frac{x}{d}) e^{-i\beta_m z},$$

où la somme sur  $m$  va de 0 à  $M_{TE}$ .

### 3) Remarque

a) Les modes de propagation guidée sont très différents des modes de propagation dans un milieu anisotrope (cf. § III-B-1, § IV-A-3 ou § IV-B-1). Dans un milieu anisotrope (illimité), pour une direction de propagation donnée, il existe deux ondes planes polarisées linéairement (orthogonalement l'une par rapport à l'autre) ayant deux vecteurs d'onde différents ; pour l'une de ces ondes, la dispersion, ie le fait que la vitesse de phase  $c/n$  dépende de la pulsation optique  $\omega$ , provient du milieu : l'indice de réfraction propre<sup>n</sup>, fonction des indices de réfraction principaux, dépend de  $\omega$  (cf. § I-D).

b) Dans le guide d'onde métallique plan, pour une direction de propagation  $z$  et une direction de polarisation  $y$  fixées, la solution onde plane est interdite et plusieurs structures transverses sont possibles pour l'enveloppe du champ électrique  $\sum_0^{(m)}(x)$ , numérotées

par l'indice discret  $m$ . De plus, pour un mode  $m$  donné, il existe de la dispersion (cf. l'expression de la vitesse de phase  $v_p^{(m)}$  au § 2-d) alors même que l'onde électromagnétique se propage dans un espace vide <sup>de matière</sup>: cette dispersion provient purement des conditions aux limites imposées par les plans métalliques.

#### 4) Modes de propagation TM

a) On a vu au § 2 que les modes de propagation guidée TE avaient un champ électrique  $\hat{z}_0(x) \hat{y} e^{-i\beta z}$ . Le champ magnétique associé, donné par  $\text{rot } \vec{E} = -i\omega \vec{B}$ , possède une composante <sup>transverse</sup>  $B_x(z,x) = -\frac{\beta}{\omega} \hat{z}_0(x) e^{-i\beta z}$  et une composante longitudinale  $B_z(z,x) = \frac{i}{\omega} \hat{z}_0'(x) e^{-i\beta z}$ .

Il existe une autre classe d'ondes électromagnétiques guidées, pour laquelle les rôles de  $\vec{E}(z,x)$  et  $\vec{B}(z,x)$  sont échangés: le champ magnétique est suivant  $\hat{y}$ :

$$\vec{B}(z,x) = \hat{y} B_0(x) e^{-i\beta z},$$

et le champ électrique, obtenu à partir de  $\text{rot } \vec{B} = \frac{i\omega}{c^2} \vec{E}$ ,

possède les deux composantes

$$\begin{cases} E_x(z,x) = \frac{\beta c^2}{\omega} B_0(x) e^{-i\beta z} \\ E_z(z,x) = -i \frac{c^2}{\omega} B_0'(x) e^{-i\beta z}. \end{cases}$$

Ces modes sont dénommés TM, car le champ magnétique  $y$  est transverse à la direction de propagation  $z$ , alors que le champ électrique ne l'est pas.

b) Ces modes TM se déterminent suivant la même procédure que celle du § 2. L'équation de Helmholtz suivie par  $\Sigma_x(z, x)$

donne  $\beta_0''(x) + (k_0^2 - \beta^2) \beta_0(x) = 0$ , d'où

$$\beta_0(x) = \beta_1 \cos \sqrt{k_0^2 - \beta^2} x + \beta_2 \sin \sqrt{k_0^2 - \beta^2} x.$$

L'annulation de  $\Sigma_z(z, x)$  en  $x=0$  et  $x=d$  donne  $\beta_2 = 0$

et  $\beta_1 \sin \sqrt{k_0^2 - \beta^2} d = 0$ , d'où:  $\sqrt{k_0^2 - \beta_m^2} = m \frac{\pi}{d}$ ,  $m=1, 2, 3, \dots$

Le mode  $TM_m$  a donc la même relation de dispersion que le mode  $TE_m$ ; ces deux modes ont donc la même vitesse de phase et la même vitesse de groupe. Il y a autant (\*) de modes TM que de modes TE:  $M_{TM} = M_{TE}$ .

Finalement, les composantes du champ électrique dans le mode  $TM_m$ , sont:

$$\begin{cases} \Sigma_x^{(m)}(z, x) = \beta_m \frac{A_0}{k_0} \cos(m\pi \frac{x}{d}) e^{-i\beta_m z} \\ \Sigma_z^{(m)}(z, x) = i m \frac{\pi}{d} \frac{A_0}{k_0} \sin(m\pi \frac{x}{d}) e^{-i\beta_m z}, \end{cases}$$

avec le changement de constante  $\frac{c}{\omega} \beta_1 = \frac{A_0}{k_0}$ , où  $A_0$  est homogène à un champ électrique.

Dans les modes  $TM_m$ , le champ électrique possède une composante longitudinale (sauf dans le  $TM_{m=0}$ , qui correspond au mode TEM du § 1-a).

---

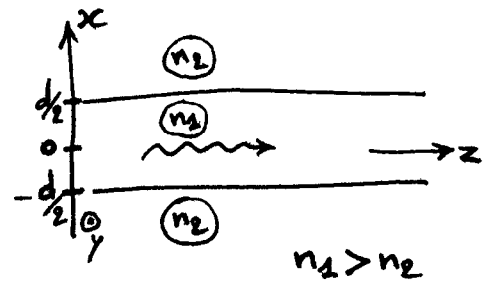
(\*) Il faut ajouter le mode  $TM_{m=0}$ , vu au § 1-a:  $M_{TM} = M_{TE} + 1$ , en fait.



## B) Guidage diélectrique plan

### 1) Introduction

a) Dans le domaine des ondes optiques, une structure guidante peut prendre la forme d'une tranche d'un milieu diélectrique l.h.i. (\*), d'indice de réfraction  $n_1$ , entourée d'un autre milieu d'indice de réfraction plus faible  $n_2$ . En effet, on



a vu (cf. §II-C-3 et §II-C-4) qu'une onde lumineuse se propageant dans la tranche centrale pouvait subir des réflexions totales sur les dièdres avec les autres milieux, ces dièdres se comportant <sup>alors</sup> comme des miroirs parfaits, sans perte.

La tranche diélectrique centrale ( $|x| < \frac{d}{2}$ ) est appelée le cœur de la structure ; le milieu qui l'entoure est le gaine optique ( $|x| > \frac{d}{2}$ ).

b) Une onde lumineuse se propageant dans cette structure, suivant  $z$ , a un champ électrique d'amplitude complexe

$$\vec{\Sigma}(z, x) = \vec{\Sigma}_0(x) e^{-i\beta z}.$$

$\vec{E}(z, x, t) = \Re\{ \vec{\Sigma}(z, x) e^{i\omega t} \}$  obéissant à l'équation d'onde (cf. §I-B-1)

$$\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = 0, \quad \vec{\Sigma}(z, x) \text{ suit l'équation de Helmholtz}$$

$$\Delta \vec{\Sigma} + k_0^2 n^2 \vec{\Sigma} = 0,$$

(\* l.h.i. : linéaire, homogène et isotrope (cf. §I-B-1).

donc l'équation suivie par l'enveloppe  $\vec{\Sigma}_0(x)$ :

$$\frac{d^2 \vec{\Sigma}_0}{dx^2}(x) + (k_0^2 n(x)^2 - \beta^2) \vec{\Sigma}_0(x) = 0.$$

Par exemple, la composante  $y$  de  $\vec{\Sigma}_0(x)$  suit:

$$\Sigma_{0y}''(x) + (k_0^2 n(x)^2 - \beta^2) \Sigma_{0y}(x) = 0.$$

c) Dans la gaine, l'indice de réfraction uniforme est  $n_2$ , et l'équation suivie par toutes les composantes cartésiennes  $x, y$  et  $z$  de  $\vec{\Sigma}_0(x)$  est

$$u''(x) + (k_0^2 n_2^2 - \beta^2) u(x) = 0.$$

La seule manière d'avoir une onde lumineuse confinée au voisinage des cœur, est que  $\beta > k_0 n_2$ . On a alors, en posant

$$\gamma = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_2^2},$$

$$\begin{cases} u(x) \propto e^{-\gamma x} & \text{pour } x > d/2, \text{ et} \\ u(x) \propto e^{+\gamma x} & \text{pour } x < -d/2. \end{cases}$$

La longueur caractéristique de pénétration de la lumière dans la gaine est  $1/\gamma = (\beta^2 - k_0^2 n_2^2)^{-1/2}$ .

d) Dans le cœur, l'indice de réfraction vaut uniformément  $n_1$ , et

l'équation suivie par toute composante de  $\vec{\Sigma}_0(x)$  est

$$u''(x) + (k_0^2 n_1^2 - \beta^2) u(x) = 0.$$

On admet que seul le cas  $\beta < k_0 n_1$  permet d'avoir des modes propres

de propagation guidée<sup>(\*)</sup>. On pose alors

$$k_T = \sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2},$$

et l'on a 
$$u(x) = A_1 \cos k_T x + A_2 \sin k_T x$$

dans le cœur du guide d'onde ( $|x| < d/2$ ).

La période d'oscillation spatiale de l'onde lumineuse suivant  $x$ , dans le cœur, vaut  $\frac{2\pi}{k_T}$ . On notera que  $k_T$  et  $\gamma$  sont reliés:

$$k_T^2 + \gamma^2 = k_0^2 (n_1^2 - n_2^2).$$

Ainsi, plus l'onde lumineuse oscille transversalement dans le cœur ( $k_T$  grand), plus elle pénètre profondément dans la gaine ( $\gamma$  petit), et vice versa.

## 2) Modes de propagation TE

Un mode de propagation guidée est cherché polarisé suivant l'axe  $y$  :

$$\vec{\Sigma}_0(x) = \hat{O}_y \Sigma_0(x).$$

La structure guidante étant symétrique ( $n(x) = n(-x)$ ), les modes de propagation sont soit pairs soit impairs en  $x$ , c'est-à-dire soit symétriques soit antisymétriques par rapport à la structure (les modes de propagation du guide métallique plan ont bien cette propriété, cf. § A-2-b).

---

(\*) Cf. § 4-a.

g) D'après l'étude du § 1 précédent, un mode symétrique

est attendu de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_0(x) = A e^{-\gamma(x-d/2)} \quad (x > d/2) \\ \Sigma_0(x) = B \cos k_T x \quad (-d/2 < x < d/2) \\ \Sigma_0(x) = A e^{\gamma(x+d/2)} \quad (x < -d/2). \end{array} \right.$$

La continuité de la composante tangentielle du champ électrique sur les diélectriques  $x = \pm \frac{d}{2}$ , ainsi que celle de la composante tangentielle du champ magnétique, en l'absence de courant libre surfacique (cf. § I-A-2-d), se ramènent à la continuité de  $\Sigma_0(x)$  et à celle de sa dérivée  $\Sigma_0'(x)$  ( $\propto \mathcal{B}_z$ , cf. § A-4-a). Il vient

ainsi, simplement :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = B \cos k_T \frac{d}{2} \\ \gamma A = k_T B \sin k_T \frac{d}{2}. \end{array} \right.$$

On en déduit l'équation caractéristique

$$\operatorname{tg}\left(k_T \frac{d}{2}\right) = \frac{\gamma}{k_T},$$

dont chaque solution en  $k_T$  correspond à un mode TE symétrique.

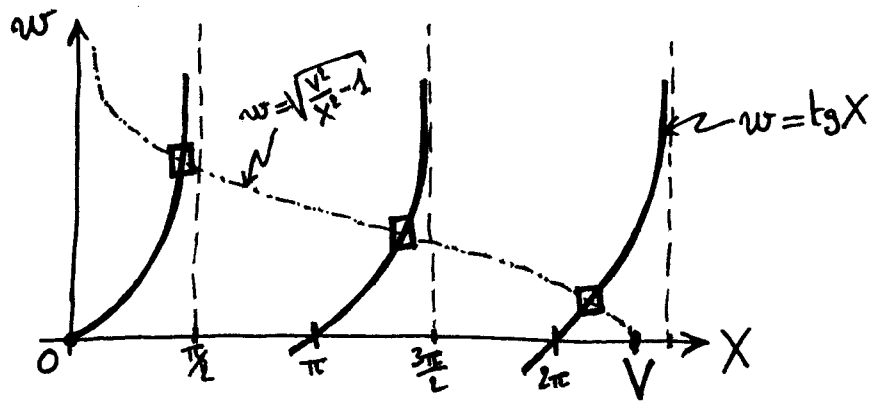
En posant  $X = k_T \frac{d}{2}$  et  $Y = \gamma \frac{d}{2}$ , il vient  $\operatorname{tg} X = \frac{Y}{X}$ , soit

encore, puisque  $\gamma^2 + k_T^2 = k_0^2(n_1^2 - n_2^2)$ , ie  $Y^2 + X^2 = k_0^2(n_1^2 - n_2^2)\left(\frac{d}{2}\right)^2$  :

$$\operatorname{tg} X = \sqrt{\frac{V^2}{X^2} - 1},$$

où  $V = k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \frac{d}{2}$  est le "paramètre V" du guide (appelé encore fréquence réduite du guide). La valeur de  $V$  détermine entièrement les modes.

Les solutions en  $X$  de l'équation caractéristique peuvent se visualiser graphiquement :



On constate que plus  $V = k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \frac{d}{2}$  est grand, plus un grand nombre de modes de propagation est autorisé. Le nombre de modes TE symétriques est  $E\left(\frac{V}{\pi}\right) + 1$ . Ainsi, pour toute pénétration optique, même parmi les plus faibles, il existe toujours un mode TE symétrique supporté par le guide diélectrique plan : le mode à  $X$  compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ . Cette propriété contraste avec l'existence d'une pénétration de coupure dans un guide métallique (cf. § A-2-c).

b) De leur côté, les modes de propagation antisymétriques sont

de la forme :

$$\begin{cases} \Sigma_0(x) = A e^{-\gamma(x-d/2)} & (x > d/2) \\ \Sigma_0(x) = B \sin k_T x & (-d/2 < x < d/2) \\ \Sigma_0(x) = -A e^{\gamma(x+d/2)} & (x < -d/2) \end{cases},$$

et les conditions aux limites, qui se réduisent à la continuité de  $\Sigma_0(x)$  et à celle de  $\Sigma_0'(x)$ , donnent :

$$\begin{cases} A = B \sin k_T \frac{d}{2} \\ -\gamma A = k_T B \cos k_T \frac{d}{2} \end{cases}.$$

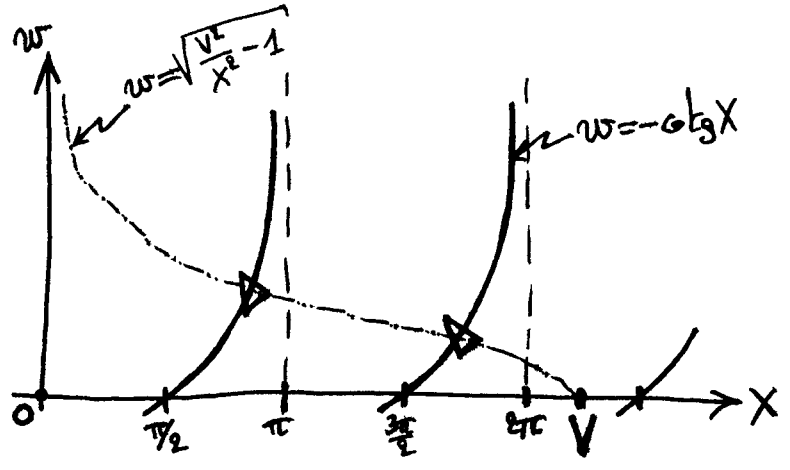
L'équation caractéristique de ces modes est alors :

$$-\cotg k_r \frac{d}{2} = \frac{r}{k_r},$$

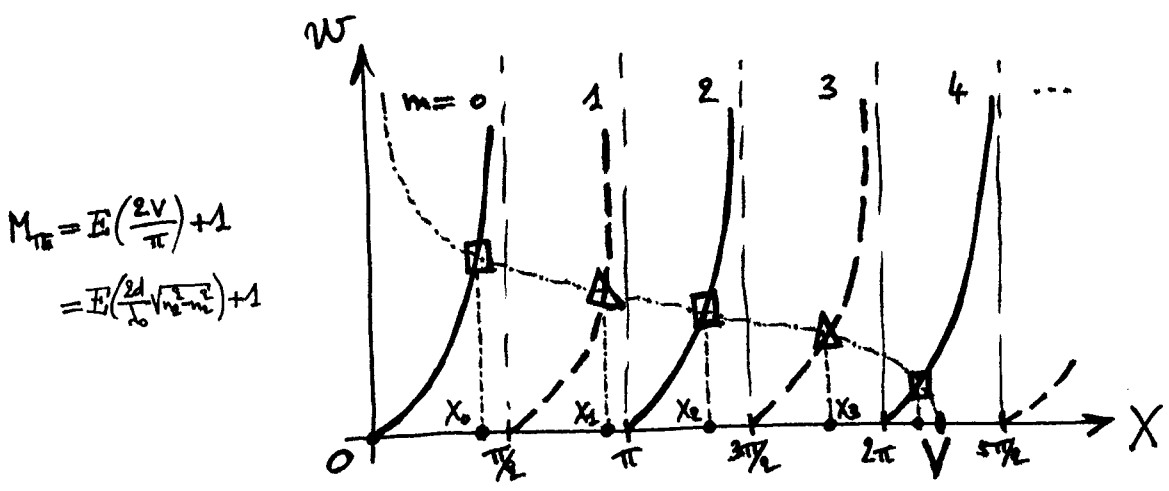
c'est-à-dire : 
$$-\cotg X = \sqrt{\frac{V^2}{X^2} - 1}.$$

Les solutions en X de cette équation peuvent se visualiser :

On voit donc que si la pulsation optique est assez faible pour que  $V < \frac{\pi}{2}$ , alors un seul mode TE (symétrique) se propage dans le guide diélectrique plan (cf. §a).



c) On peut rassembler sur un seul graphique les solutions des équations caractéristiques des modes symétriques et antisymétriques :

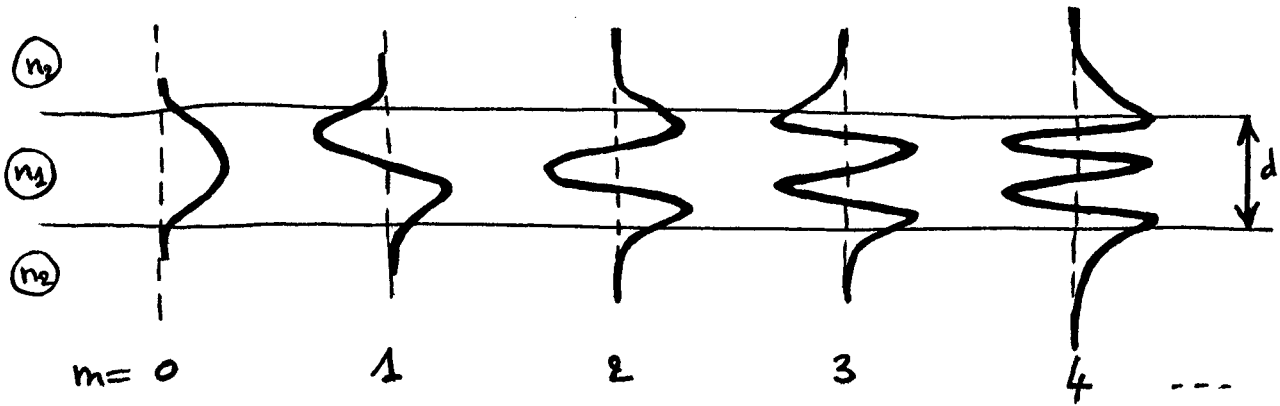


En numérotant  $m=0, 2, 4, \dots$  les modes symétriques, et  $m=1, 3, 5, \dots$

les modes antisymétriques, on a :

$$\begin{cases} k_r^{(m)} = \frac{2}{d} X_m \\ \gamma^{(m)} = \frac{2}{d} \sqrt{V^2 - X_m^2}, \end{cases}$$

relations qui permettent de tracer les profils  $\Sigma_0^{(m)}(x)$  des modes TE:

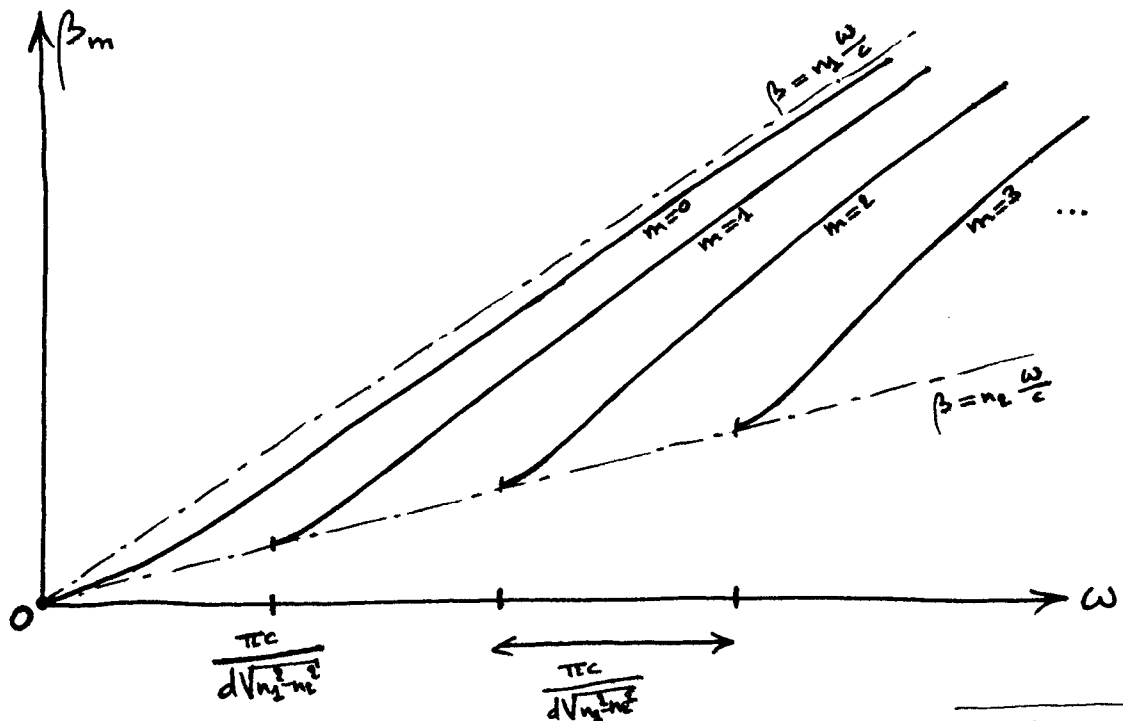


Plus les modes sont d'ordre élevé, plus ils pénètrent dans la gaine, et plus ils ont d'oscillations transverses dans le cœur. La figure ci-dessus se compare à celle du § A-2-b, concernant les modes TE du guide métallique plan.

La constante de propagation  $\beta_m$  du mode  $m$  est trouvée à partir de  $k_r^{(m)} = \frac{2}{d} X_m$ :

$$\beta_m = \sqrt{\left(n_1 \frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{2}{d} X_m\right)^2}$$

Dans cette expression,  $X_m$  est fonction de la pulsation optique  $\omega$ , puisque solution de l'équation caractéristique — dépendant de  $V$ . Les relations de dispersion  $\beta_m(\omega)$  sont représentées schématiquement ci-dessous (\*):



(\*) Cf. §4-c.

Chaque mode  $TE_m$  possède la pulsation de coupure  $m \frac{\pi c}{d\sqrt{n_2^2 - n_1^2}}$  ;  
le mode fondamental  $TE_{m=0}$  n'en a pas, donc.

La vitesse de phase  $v_p^{(m)} = \frac{\omega}{\beta_m}$  du mode  $TE_m$  est comprise entre  $\frac{c}{n_2}$  (vitesse de phase dans la gaine), lorsque  $\omega$  est proche de la pulsation de coupure du mode, et  $\frac{c}{n_1}$  (vitesse de phase dans le cœur), lorsque  $\omega$  est très grande devant cette pulsation de coupure :  $\frac{c}{n_2} < v_p^{(m)} < \frac{c}{n_1}$ .

### 3) Modes de propagation TM

a) Dans les modes de propagation TM, c'est le champ magnétique qui est suivant  $y$  :  $\vec{B}(z, x) = B_0(x) \hat{u}_y e^{-i\beta z}$ ,

et le champ électrique est obtenu à l'aide de  $\text{rot } \vec{B} = \frac{n_2^2}{c^2} (i\omega) \vec{E}$  :

$$\begin{cases} E_x(z, x) = \frac{\beta c^2}{n_2^2 \omega} B_0(x) e^{-i\beta z} \\ E_z(z, x) = -i \frac{c^2}{n_2^2 \omega} B_0'(x) e^{-i\beta z} \end{cases}$$

b) Un mode  $\sqrt{\text{TM}}$  symétrique (en  $B_0(x)$ ) est de la forme

$$\begin{cases} B_0(x) = A' e^{-r(x-d/2)} & (x > d/2) \\ B_0(x) = B' \cos k_T x & (-d/2 < x < d/2) \\ B_0(x) = A' e^{r(x+d/2)} & (x < -d/2), \end{cases}$$

où  $r$  et  $k_T$  sont définis au § 1.



$\mathcal{B}_y(z, x)$  doit être continue à la traversée des diélectriques (alors la continuité de  $\mathcal{D}_{zx} = \epsilon n^2 E_{zx}$  est assurée), ainsi que  $\mathcal{E}_z(z, x)$ :

$$\begin{cases} A' = B' \cos k_T \frac{d}{2} \\ r \frac{A'}{n_2^2} = k_T \frac{B'}{n_1^2} \sin k_T \frac{d}{2} \end{cases},$$

d'où l'équation caractéristique des modes TM symétriques:

$$\operatorname{tg} k_T \frac{d}{2} = \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{Y}{k_T},$$

soit:

$$\operatorname{tg} X = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sqrt{\frac{V^2}{X^2} - 1}$$

avec  $X = k_T \frac{d}{2}$ ,  $Y = r \frac{d}{2}$  et  $V = k \sqrt{n_2^2 - n_1^2} \frac{d}{2}$ .

La discussion graphique de cette équation caractéristique est identique à celle du § 2-a, avec pour seul changement un second membre plus grand (car  $n_2 > n_1$ ). On en déduit que les  $X_m$  solutions sont un peu plus grands que pour les modes TE symétriques. Les modes  $TM_m$  ont donc des constantes de propagation  $\beta'_m$  légèrement plus faibles que les  $\beta_m$  des modes  $TE_m$ ; les modes  $TE_m$  et  $TM_m$  ont la même pulsation de coupure  $m \frac{\pi c}{d \sqrt{n_2^2 - n_1^2}}$ , et les relations de dispersion  $\beta'_m(\omega)$  ont les mêmes allures que celles montrées sur la figure du § 2-c.

c) Cette discussion s'étend également aux modes TM antisymétriques.

À  $\omega$  fixée, il y a autant de modes TM que de modes TE:  $M_{TM} = M_{TE}$ .

Dans les modes de propagation  $TM_m$ , les composantes non nulles du champ électromagnétique sont données par

$$\mathcal{B}_y^{(m)}(z, x) = \mathcal{A}'_0 u_m(x) e^{-i\beta'_m z}$$

$$\mathcal{E}_x^{(m)}(z, x) = \frac{\beta'_m c^2 \mathcal{A}'_0}{n(x)^2 \omega} u_m(x) e^{-i\beta'_m z}$$

$$\mathcal{E}_z^{(m)}(z, x) = -i \frac{c^2 \mathcal{A}'_0}{n(x)^2 \omega} u'_m(x) e^{-i\beta'_m z},$$

où  $u_m(x)$  est le profil transverse (continu) de  $\mathcal{B}_y^{(m)}(z, x)$  —  $\sqrt{\text{dans le cœur, } u_m(x) = \cos k_T^{(m)} x}$  pour  $m$  pair,  $u_m(x) = \sin k_T^{(m)} x$  pour  $m$  impair. Si les allures des profils  $u_m(x)$  sont les mêmes (\*) que celles représentées au § 2-c pour les modes  $TE_m$ , les profils des modes TE et TM diffèrent cependant du fait que leurs équations caractéristiques sont différentes, conduisant à des  $k_T^{(m)} = X_m \frac{\omega}{c}$  différents. En outre, dans un mode TM, le champ électrique n'est pas continu à la traversée des diélectriques  $x = \pm \frac{d}{2}$ :  $\mathcal{E}_x$  est discontinue.

#### 4) Remarques

a) On a admis, au § 1-d, qu'il n'y avait pas de mode TE avec  $\beta > k_0 n_1$ . Il est en fait facile de le vérifier. En notant  $k_T = \sqrt{\beta^2 - n_1^2 k_0^2}$ , le même raisonnement que celui du § 2-a mène en effet à l'équation caractéristique  $\text{th } k_T \frac{d}{2} = -\frac{\gamma}{k_T}$  pour les modes TE symétriques, équation qui n'a évidemment aucune solution; de la même façon, l'équation caractéristique  $\text{coth } k_T \frac{d}{2} = -\frac{\gamma}{k_T}$  des modes TE antisymétriques n'a pas de solution non plus. La même démarche permet de vérifier qu'il n'y a pas de modes TM avec  $\beta > k_0 n_1$ .

b) De la même façon qu'au § A-2-e concernant le guide métallique plan, les modes de propagation du guide diélectrique plan forment une base de décomposition de toute onde électromagnétique se propageant dans la structure.

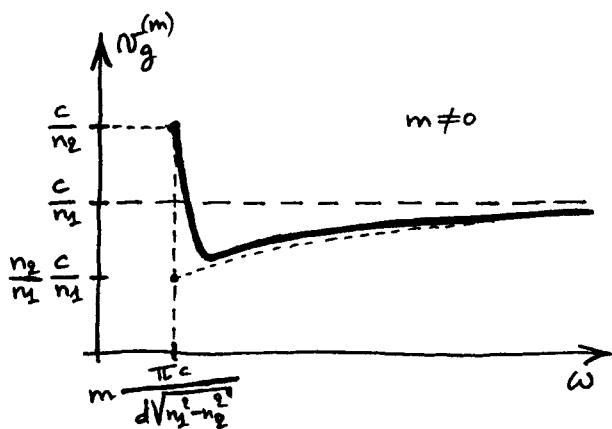
(\*) Dans les modes  $TM_m$ ,  $u'_m(x)$  est discontinue en  $x = \pm \frac{d}{2}$ .

Une onde polarisée linéairement suivant  $y$  est une superposition de modes  $TE_m$ , avec  $m$  de zéro à  $M_{TE}$  (\*); Le champ magnétique de cette onde n'est pas transverse. De même, toute onde polarisée suivant  $x$  est une superposition de modes  $TM_m$ , avec  $m$  de zéro à  $M_{TM} = M_{TE}$ , et elle possède une composante longitudinale non nulle de champ électrique. Dans le cas général, à la fois les modes TE et TM entrent dans la décomposition d'une onde se propageant dans le guide diélectrique plan.

c) Au § 2-c, la figure représentant les relations de dispersion  $\beta_m(\omega)$  des modes TE (celles des modes TM ont même allure) a été tracée en négligeant la dispersion due aux milieux : les indices de réfraction  $n_1$  et  $n_2$  y sont supposés indépendants de la pulsation optique  $\omega$ . Sur la figure en question, la dispersion est purement due au guidage, c'est-à-dire à la présence des dioptries en  $x = \pm \frac{d}{2}$  (cf. § A-3-b pour le cas du guide métallique plan).

En fait, la dispersion touche aussi les indices de réfraction  $n_1(\omega)$  et  $n_2(\omega)$ , et les relations de dispersion s'écrivent, en toute généralité :  $\beta_m = \left\{ \left[ n_2(\omega) \frac{\omega}{c} \right]^2 - \left[ \frac{2}{d} X_m \right]^2 \right\}^{1/2}$ , où  $X_m$  est fonction du paramètre  $V$ , c'est-à-dire de  $\omega \sqrt{n_1(\omega)^2 - n_2(\omega)^2}$ . La figure des  $\beta_m(\omega)$  du § 2-c s'en retrouve légèrement déformée.

d) Pour finir, on remarquera que la vitesse de groupe  $v_g^{(m)} = \frac{d\omega}{d\beta_m}$  du mode  $TE_m$  (ou  $TM_m$ ) possède l'allure suivante. Lorsque  $\omega \gg m \frac{\pi c}{d\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$ ,  $v_g^{(m)} \approx \frac{c}{n_1}$ .



Si  $\omega \rightarrow m \frac{\pi c}{d\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$ , alors  $v_g^{(m)} \rightarrow \frac{c}{n_2}$ , ce qui s'explique par la pénétration du mode dans la gaine, alors très forte. (Pour  $m \rightarrow \infty$ , le minimum de  $v_g^{(m)}$  tend vers  $\frac{n_2}{n_1} \frac{c}{n_1}$ , en étant atteint pour une pulsation  $\omega$  tendant vers la pulsation de coupure  $m \frac{\pi c}{d\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$ .)

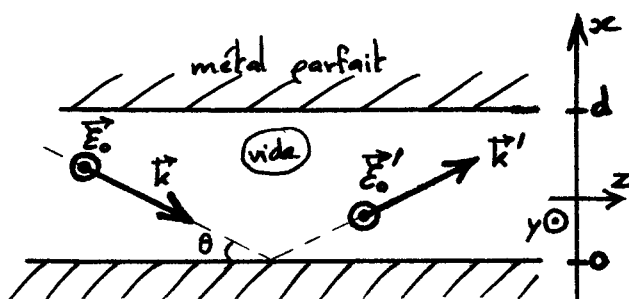
(\*)  $M_{TE} = \mathbb{E}\left(\frac{2V}{\pi}\right) + 1$ , cf. § 2-c.

# INTRODUCTION À LA PHOTONIQUE

## Exercices IX

### 1) Modes TE d'un guide métallique plan.

Une onde plane monochromatique ( $\omega$ ), de vecteur d'onde  $\vec{k}$ , est envoyée vers le plan  $x=0$  d'un guide métallique, avec l'inclinaison  $\theta$ ; elle est polarisée suivant l'axe  $y$ :  $\vec{E}_0 = E_0 \hat{y}$ .



a) Écrire les composantes cartésiennes du vecteur d'onde incident  $\vec{k}$ , ainsi que celles du vecteur d'onde réfléchi  $\vec{k}'$ .

b) Les ondes incidente et réfléchie ont pour amplitudes complexes, respectivement:  $\vec{E}(\vec{r}) = E_0 \hat{y} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$  et  $\vec{E}'(\vec{r}) = E_0' e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}}$ . Que vaut  $E_0'$ , l'enveloppe de l'onde réfléchie?

c) Écrire le champ électrique total régnant dans le guide. En tenant compte de la présence du plan en  $x=d$ , quelles sont les inclinaisons  $\theta_m$  possibles? Quel est le nombre de modes de propagation TE? Trouver leur structure transverse et leur constante de propagation  $\beta_m$ .

d) Montrer que l'onde créée par la réflexion de l'onde  $\vec{k}'$  sur  $x=d$ , de vecteur d'onde  $\vec{k}$ , est en phase avec l'onde incidente primaire, dans le cas d'un mode de propagation. Que se passe-t-il si l'onde incidente primaire est envoyée vers  $x=0$  avec un angle  $\theta$  quelconque, ne coïncidant avec aucun des  $\theta_m$ ?

2) Modes TE d'un guide diélectrique plan. De la même façon qu'à l'exercice précédent, on cherche à décrire les modes de propagation guidée d'un guide diélectrique plan, comme résultat d'interférences constructives entre des ondes réfléchies sur les dioptres cœur-gaine, à l'intérieur du cœur. Une onde plane monochromatique ( $\omega$ ), de vecteur d'onde  $\vec{k}$  ( $|\vec{k}| = n_2 k_0$ ,  $n_2$ : indice de réfraction

du cœur), est envoyée vers un dioptre cœur-gaine avec l'inclinaison  $\theta$ .

a) Montrer que l'angle  $\theta$  doit être plus petit que l'inclinaison critique  $\theta_c$ , avec  $\cos \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$  ( $n_2$ : indice de réfraction de la gaine), afin que la réflexion à l'intérieur du cœur soit totale.

b) Écrire que l'onde obtenue après réflexion sur l'autre dioptre cœur-gaine, de vecteur d'onde  $\vec{k}$ , est en phase avec l'onde incidente primaire. On tiendra compte que le coefficient de réflexion en amplitude, pour une onde polarisée suivant  $y$ , vaut  $E_0'/E_0 = e^{i\varphi_s}$  avec  $0 < \varphi_s < \pi$  et  $\operatorname{tg} \frac{\varphi_s}{2} = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_c}{\sin^2 \theta} - 1}$  (cf. cours, § II). En déduire que les inclinaisons  $\theta$  associés aux modes, sont solutions de  $\frac{\varphi_s(\theta)}{2} = \frac{\pi d}{\lambda_1} \sin \theta - m \frac{\pi}{2}$ , où  $\lambda_1 = \lambda_0/n_1$  ( $m$  entier).

c) En prenant la tangente membre à membre, montrer que les modes sont déterminés par une construction graphique semblable à celle du cours (cf. § IX-B-2). Quel est le nombre de modes TE ?

3) Énergie transportée dans un guide métallique plan. Un champ électromagnétique polarisé suivant  $y$  se propage dans un guide métallique plan (cf. figure de l'exercice 1). Il est donc une superposition de modes TE, et son champ électrique s'écrit:  $E_y(z, x) = \sum_m a_m \sin(m\pi \frac{x}{d}) e^{-i\beta_m z}$ , avec les constantes de propagation  $\beta_m = \sqrt{(\frac{\omega}{c})^2 - (m\frac{\pi}{d})^2}$ .

a) Trouver le champ magnétique  $\vec{B}(z, x)$  associé.

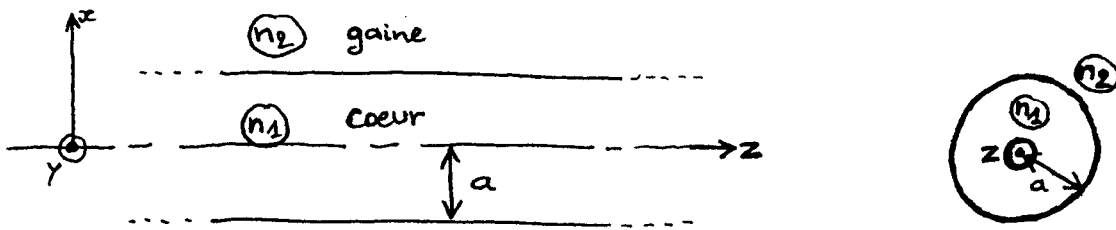
b) Exprimer le vecteur de Poynting moyenné sur le temps  $\langle \vec{S} \rangle$ . (On rappelle que  $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \{ \vec{E}(\vec{r})^* \times \vec{B}(\vec{r}) \}$  pour un champ électromagnétique monochromatique ( $\operatorname{Re} \{ \vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t} \}$ ,  $\operatorname{Re} \{ \vec{B}(\vec{r}) e^{i\omega t} \}$ ).

c) Trouver le flux de  $\langle \vec{S} \rangle$  à travers une section du guide normale à la direction de propagation  $z$ , de largeur  $l$  suivant  $y$ :  $\Phi = \int_0^l dy \int_0^d dx \hat{u}_z \cdot \langle \vec{S} \rangle$ . Montrer que  $\Phi$  se met sous la forme  $\Phi = \sum_m \Phi_m$ , où l'on déterminera  $\Phi_m$ . Interpréter.

## INTRODUCTION À LA PHOTONIQUE

X - Fibres optiques

Une fibre optique est un guide d'onde diélectrique de symétrie cylindrique. Le cœur central, d'indice de réfraction  $n_1$  et de rayon  $a$ , guide la lumière; il est entouré d'une gaine optique d'indice <sup>de réfraction</sup>  $n_2$ ,  $n_2 < n_1$ . La fibre optique est le plus



largement utilisé des guides diélectriques, du fait de son utilisation aujourd'hui systématique <sup>dans les</sup> télécommunications <sup>terrestres</sup> - domaine pour lequel elle a été développée depuis le début des années 1970.

Les principes du guidage de la lumière dans une fibre optique sont essentiellement les mêmes que ceux qui s'appliquent dans un guide diélectrique plan, cf. § IX ; la seule nouveauté est la géométrie cylindrique, qui a l'avantage de confiner la lumière à deux dimensions. Dans les deux types de guide, la lumière se propage sous forme de modes ; chaque mode est caractérisé par sa constante de propagation et sa structure spatiale, qui progresse sans déformation avec une vitesse de groupe qui lui est propre. Lorsque le diamètre  $2a$  du cœur de la fibre est suffisamment petit, un seul mode de propagation est permis et la fibre est dite monomode. Les fibres

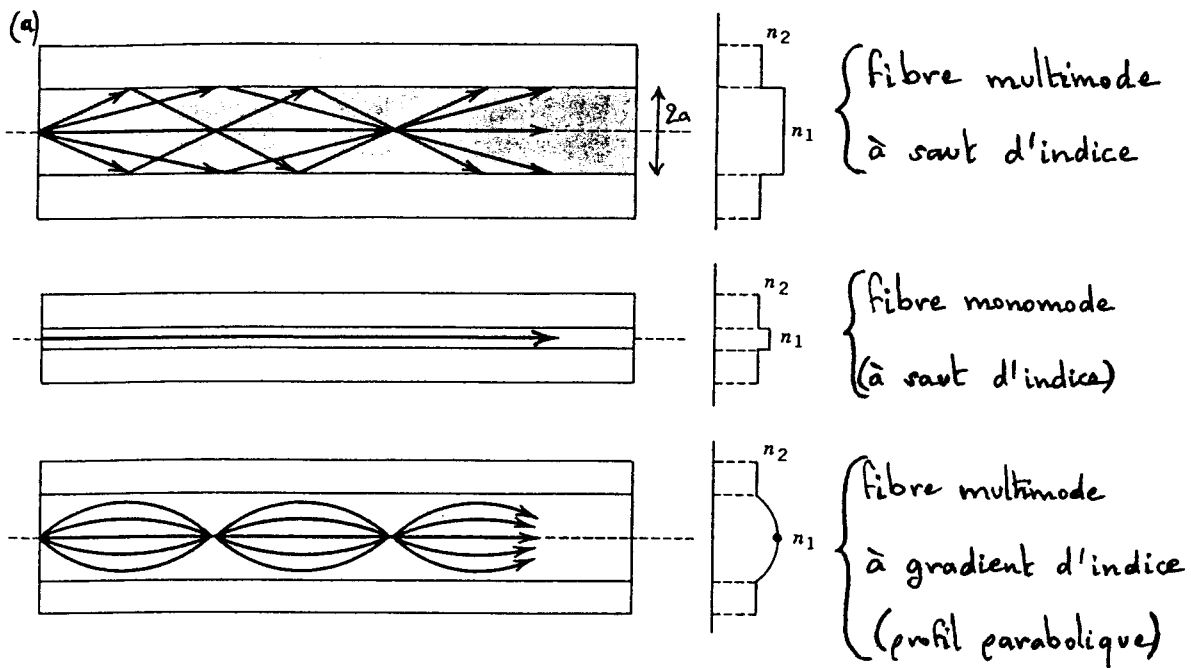
de grand diamètre <sup>de cœur</sup> sont des fibres multimodes.

Un pulse lumineux envoyé dans une fibre multimode répartit sa puissance sur les modes de propagation, qui ont des vitesses de groupe différents dans la fibre. Il en résulte un élargissement temporel du <sup>pulse lumineux</sup> détecté en fin de fibre. Cet effet de dispersion modale limite le taux de répétition avec lequel des pulses lumineux peuvent être envoyés à l'entrée d'une fibre et séparés temporellement en sortie, c'est-à-dire qu'il limite le débit d'information d'un système de communication par fibre optique.

Une façon d'éviter tout à fait le phénomène de dispersion modale consiste à employer une fibre monomode<sup>(\*)</sup>; c'est la solution pratiquée actuellement dans les communications à longue distance. Cependant, une solution intermédiaire consiste à utiliser toujours une fibre multimode, mais dont le cœur a un indice spatialement variable, compris entre une valeur maximale sur son axe  $r=0$  et une valeur minimale, égale à l'indice de gaine, à sa périphérie  $r=a$ . Une telle fibre est appelée fibre à gradient d'indice, tandis qu'une fibre dont l'indice de cœur est uniforme est dénommée fibre à saut d'indice. Les vitesses de groupe des modes d'une fibre à gradient d'indice sont égalisés au mieux lorsque le profil d'indice du cœur est

---

(\*) Une autre forme de dispersion, plus faible, intervient alors.



parabolique ; la dispersion modale est alors fortement réduite par rapport à celle d'une fibre <sup>multimode</sup> à saut d'indice.

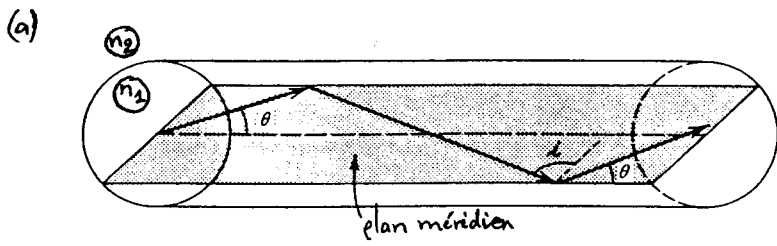
Après une brève description du guidage des rayons lumineux dans une fibre à saut ou à gradient d'indice <sup>(§A)</sup>, ce chapitre traite des modes optiques dans une fibre optique à saut d'indice <sup>(§B)</sup> ; les effets de la dispersion sur la lumière transportée par une fibre optique seront vus en exercices.

## ① Guidage des rayons lumineux dans les fibres optiques multimodes ( $\lambda_0 \lll a$ )

### 1) Fibre à saut d'indice

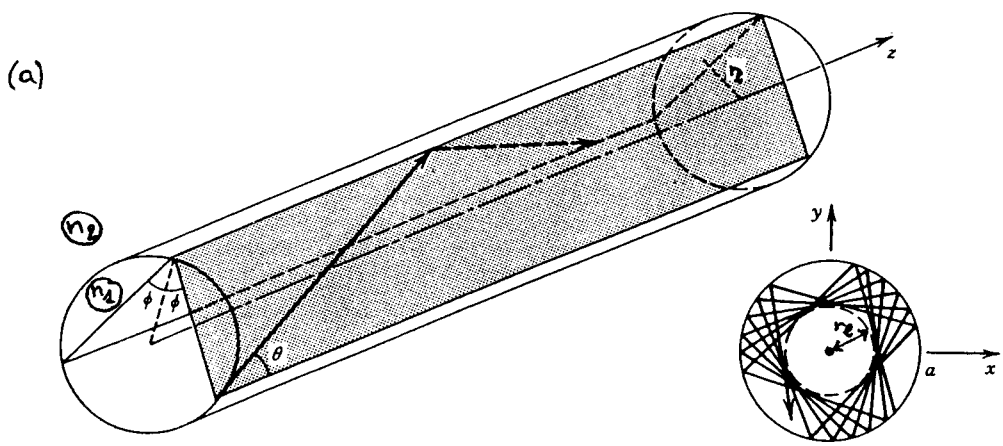
a) La condition de guidage est simple à voir pour un rayon méridien. Le plan méridien qui le contient est le plan d'incidence du rayon sur le dioptré cœur-gaine ; après réflexion,





le rayon reste dans ce même plan, en gardant la même inclinaison  $\theta$  avec l'axe de la fibre. Tout se passe donc comme dans un guide diélectrique plan: un rayon méridien est guidé le long de la fibre si son angle d'incidence  $i = \frac{\pi}{2} - \theta$  est plus grand que l'angle d'incidence critique  $i_c = \text{Arcsin} \frac{n_2}{n_1}$ , (cf. §II-C-3) ie si son inclinaison  $\theta$  est plus faible que l'inclinaison critique  $\theta_c = \text{Arccos} \frac{n_2}{n_1}$ . Les indices de réfraction  $n_1$  et  $n_2$  sont usuellement très proches l'un de l'autre, et les rayons guidés sont paraxiaux (ie: à  $\theta$  petit).

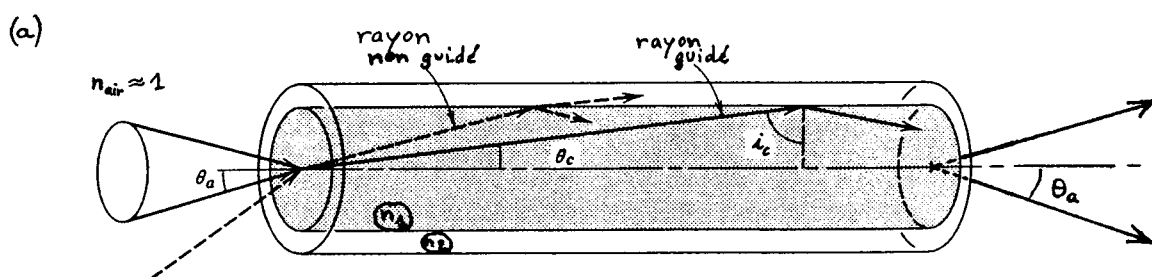
b) Un rayon quelconque dans le cœur est contenu dans un plan parallèle à l'axe de la fibre, faisant un angle  $\phi$  avec la normale au dioptre cœur-gaine. Le rayon est caractérisé par son inclinaison  $\theta$  avec l'axe et par l'angle  $\phi$ ; ses réflexions successives sont contenues dans des plans ayant le même angle  $\phi$ , et ont la même inclinaison  $\theta$ . La projection, dans un plan transverse, de la trajectoire d'un rayon lumineux guidé le long de la fibre, est un polygone régulier, non nécessairement fermé, contenu entre le



cylindre-limite  $r=r_2$  et la frontière cœur-gaine  $r=a$ .

L'angle d'incidence  $i_\phi$  d'un rayon quelconque sur le dioptré cœur-gaine est donné par  $\cos i_\phi = \cos i_{\phi=0} \cos \phi = \sin \theta \cos \phi$  ;  $i_\phi$  est plus grand que  $i_{\phi=0} = \frac{\pi}{2} - \theta$ , et un rayon quelconque est guidé si son inclinaison est plus faible que l'inclinaison critique,  $\theta < \theta_c$  (condition suffisante).

c) Pour être guidé à l'intérieur de la fibre optique, un rayon provenant de l'extérieur doit avoir une incidence sur le cœur inférieure à l'angle d'acceptance  $\theta_a$  tel



que  $\sin \theta_a = n_2 \sin \theta_c$ . L'ouverture numérique de la fibre est

définie par  $on = \sin \theta_a$ , soit  $on = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$  ; lorsque les indices sont proches l'un de l'autre,  $on \approx n_1 \sqrt{2\Delta}$  où  $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$  est la différence relative d'indice ( $\Delta \ll 1$ ).

En fin de fibre, les rayons sont réfractés vers l'extérieur, dans un cône d'angle  $\theta_a$  essentiellement.

Ainsi, non seulement l'angle d'acceptance  $\theta_a$  (ou l'ouverture numérique  $on = \sin \theta_a$ ) renseigne sur la façon de coupler de la lumière dans une fibre, mais il indique également la façon dont la lumière sort de la fibre.

exemple: Dans une fibre en silice ( $\text{SiO}_2$ ), ie une fibre de verre, avec  $n_1 \approx 1,5$  et

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \approx 10^{-2}, \text{ l'inclinaison critique est } \theta_c \approx 8^\circ, \text{ ce qui correspond à une ouverture}$$

numérique  $on \approx 0,2$  et à un angle d'acceptance  $\theta_a \approx 12^\circ$ . En l'absence de gaine

( $n_1 \approx 1,5$ ,  $n_2 = n_{\text{air}} \approx 1$ ), on aurait  $\theta_c \approx 48^\circ$ ,  $on = 1$  et  $\theta_a = 90^\circ$ ; si cette dernière

constitution de fibre peut sembler meilleure que la précédente, puisqu'elle permet que tous les

rayons extérieurs soient guidés quelle que soit leur incidence sur le cœur, elle n'est

cependant pas adaptée aux communications optiques à cause du grand nombre de modes

que la fibre supporte alors (cf. § B-3-d).

## 2) Fibre à gradient d'indice

a) Une fibre à gradient d'indice possède le profil d'indice  $n(r)$  indiqué sur la figure de la page X-3. Sur l'axe de la fibre, l'indice prend sa valeur maximale  $n(r=0) = n_1$ ; il

atteint sa valeur minimale, égale à l'indice <sup>uniforme</sup> de la gaine, à la périphérie du cœur :

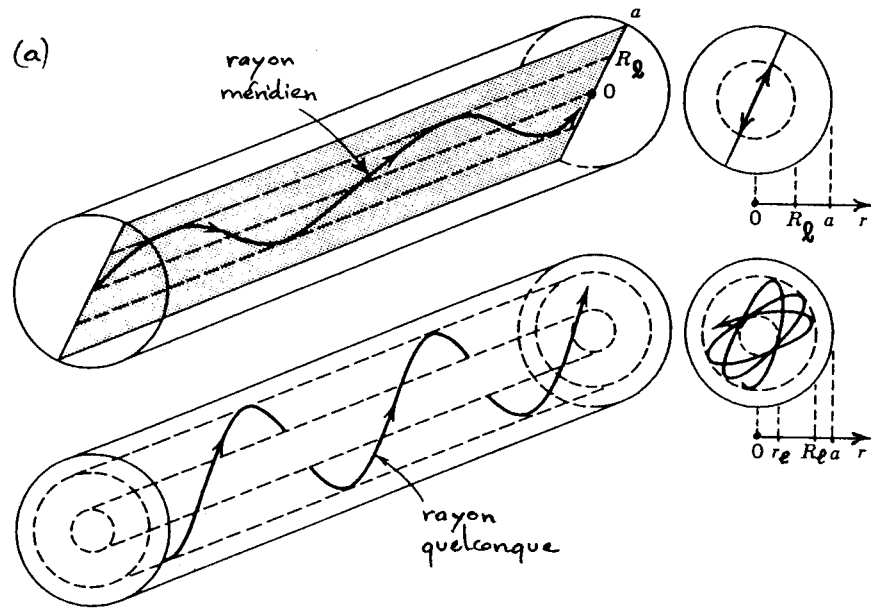
$n(r=a) = n_2$ . Un rayon lumineux dans la fibre, déterminé par  $\vec{r}(z) = [x(z), y(z), z]$ , suit

l'équation  $\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \vec{\text{grad}} n$ , où  $s$  est l'abscisse curviligne le long du rayon.

D'après le profil d'indice  $n(r)$ ,  $\vec{\text{grad}} n$  est centripète, ce qui permet d'assurer le

confinement du rayon le long de l'axe de la fibre. En effet, à l'approximation paraxiale

(approximation utile puisque  $n_1$  et  $n_2$  sont très proches en pratique), on a  $s \approx z$  et le



rayon lumineux est déterminé par  $\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x}$ ,  $\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y}$ ; or  $\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{dn}{dr} \frac{x}{r}$  et  $\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{dn}{dr} \frac{y}{r}$  (car  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ), avec  $\frac{dn}{dr} < 0$ : la courbure  $\frac{d^2x}{dz^2}$  (resp.  $\frac{d^2y}{dz^2}$ ) est de signe opposé à celui de  $x$  (resp.  $y$ ). On en déduit que  $x(z)$  et  $y(z)$  sont des fonctions oscillantes, et que le rayon lumineux peut donc être confiné au voisinage de l'axe de la fibre. Un rayon guidé quelconque suit une trajectoire en hélice, comprise entre les cylindres-limites  $r=r_2$  et  $r=R_2$ , avec  $R_2 < a$ : les rayons guidés sont confinés dans le cœur, et n'atteignent pas la gaine (ceux qui l'atteignent ne sont pas guidés). Pour un rayon méridien,  $r_2 \rightarrow 0$ .

b) Dans le cas particulier d'un profil d'indice parabolique ( $n(r) = n_1 - (n_1 - n_2) \frac{r^2}{a^2}$ ), un rayon est déterminé par  $\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{2\Delta}{a^2} x$ ,  $\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{2\Delta}{a^2} y$  ( $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$ );  $x(z)$  et  $y(z)$  sont donc des fonctions sinusoïdales de  $z$ , dont la période spatiale est une caractéristique de la fibre. La projection, dans un plan transverse, de la trajectoire

d'un rayon guidé est une ellipse. Par ailleurs, en particulier, un rayon méridien intercepte l'axe de la fibre avec l'intervalle régulier  $\frac{2\pi a}{\sqrt{2\Delta}}$ , indépendant de l'inclinaison du rayon avec l'axe; quelques rayons méridiens appartenant au même plan sont représentés sur la figure de la page X-3.

c) La propriété la plus remarquable d'une fibre à profil d'indice parabolique, est que tous les rayons guidés dans cette fibre mettent quasiment le même temps à la traverser. Dans une fibre à gradient d'indice, de manière générale, la célérité de la lumière  $c/n(r)$  croît avec la distance à l'axe (puisque l'indice de réfraction décroît): les rayons les plus inclinés parcourent une plus grande distance, avec une plus grande célérité. D'un rayon à l'autre, l'accroissement de distance à parcourir dans la fibre et <sup>celui</sup> de la célérité se compensent plus ou moins dans le temps de transit de la lumière au travers de la fibre. Il s'avère que cette compensation est réalisée au mieux lorsque le profil d'indice est parabolique; tous les rayons mettent alors approximativement le même temps à traverser la fibre, soit  $n_1 \frac{L}{c}$ , qui est le temps de transit de la lumière sur le rayon axial ( $L$ : longueur de la fibre).

Cette propriété d'une fibre multimode à profil d'indice parabolique, se confirme dans une description électromagnétique de ses modes de propagation (sujet non abordé dans le cadre de ce cours).

## Ⓑ Modes de propagation d'une fibre à saut d'indice

### 1) Distribution spatiale des modes

a) Un champ électromagnétique <sup>monochromatique ( $\omega$ )</sup> se propageant suivant l'axe  $z$  d'une fibre à saut d'indice, est de la forme  $\vec{E}(r, \varphi, z) = \vec{E}_0(r, \varphi) e^{-i\beta z}$ ,  $\vec{B}(r, \varphi, z) = \vec{B}_0(r, \varphi) e^{-i\beta z}$ ;  $\beta$  est la constante de propagation du champ;  $r, \varphi$  sont les coordonnées polaires dans les plans  $z = \text{cte}$ :  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Chaque composante cartésienne des champs électrique et magnétique suit l'équation de Helmholtz  $\Delta U + k_0^2 n^2 U = 0$  (cf. § IX-B-1), soit:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k_0^2 n^2 U = 0,$$

où  $n = n_1$  dans le cœur ( $r < a$ ) et  $n = n_2$  dans la gaine ( $r > a$ );  $k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ .

Puisque  $U$  est de la forme  $U(r, \varphi, z) = U_0(r, \varphi) e^{-i\beta z}$ , et en cherchant à résoudre l'équation précédente par séparation des variables:  $U_0(r, \varphi) = f(r)g(\varphi)$ , il vient:

$$r^2 \frac{f''(r)}{f(r)} + r \frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{g''(\varphi)}{g(\varphi)} + r^2 (k_0^2 n^2 - \beta^2) = 0.$$

b) La dérivation de cette dernière équation par rapport à  $\varphi$  montre que  $\frac{g''(\varphi)}{g(\varphi)}$  est une constante, que l'on écrit  $-\ell^2$ :  $g''(\varphi) + \ell^2 g(\varphi) = 0$ . Lorsque  $\ell^2 > 0$ ,  $g(\varphi)$  s'écrit  $g(\varphi) = \mathcal{A}_1 \cos \ell \varphi + \mathcal{A}_2 \sin \ell \varphi$ ,  $\ell$  réel positif;  $g(\varphi)$  devant être de période  $2\pi$  (le même champ doit être retrouvé si l'on tourne de  $2\pi$  autour de l'axe  $z$ , à  $z$  et  $r$  constants<sup>(\*)</sup>), seules les valeurs entières de  $\ell$  sont acceptables:  $\ell = 1, 2, 3, \dots$ . Le cas  $\ell^2 = 0$

(\*) Et à  $t$  constant.

(ie  $l=0$ ) donne également une solution :  $g''(\psi) = 0$  se résout en  $g(\psi) = \beta_1 + \beta_2 \psi$ , la périodicité imposant  $\beta_2 = 0$  et finalement  $g(\psi) = \beta_1 = Cte$  ; cette solution est retrouvée si l'on fait  $l=0$  dans les solutions oscillantes précédentes. Enfin, le cas  $l^2 < 0$  ne fournit pas de solution : la résolution de  $g''(\psi) - (-l^2)g(\psi) = 0$  donne  $g(\psi) = \beta_1 \text{ch} \sqrt{-l^2} \psi + \beta_2 \text{sh} \sqrt{-l^2} \psi$ , et l'absence de périodicité des fonctions hyperboliques conduit à  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ .

Ainsi, les composantes cartésiennes d'un champ électromagnétique se propageant dans la fibre, s'écrivent sous la forme

$$f(r) \cos l\psi e^{-i\beta z} \quad \text{ou} \quad f(r) \sin l\psi e^{-i\beta z}$$

avec  $l = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ , ou sous la forme d'une superposition linéaire de ces expressions pour différents

$l$ .  $f(r) \cos l\psi e^{-i\beta z}$  ou  $f(r) \sin l\psi e^{-i\beta z}$  s'annulent, dans chaque plan  $z = Cte$ , suivant  $l$  lignes

nodales, les mêmes quel que soit  $z$  ; autrement dit,  $f(r) \begin{cases} \cos l\psi \\ \sin l\psi \end{cases} e^{-i\beta z}$  s'annule sur  $l$  plans

méridiens (qui font entre eux un angle  $\pi/l$ ).

c) L'insertion de l'expression  $f(r) \cos l\psi e^{-i\beta z}$ , ou de  $f(r) \sin l\psi e^{-i\beta z}$ , dans la dernière forme obtenue de l'équation de Helmholtz, donne l'équation suivie par  $f(r) (= f_l(r))$  :

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) + (k_0^2 n^2 - \beta^2 - \frac{l^2}{r^2}) f(r) = 0.$$

Un mode guidé possède une constante de propagation comprise entre les nombres d'onde dans le cœur et dans la gaine :  $n_2 k_0 < \beta < n_1 k_0$ . Les mêmes inégalités ont été rencontrées dans

le guide diélectrique plan (cf. § IX-B-1) ; on admet

qu'elles restent valables dans la fibre à saut d'indice: on ne discutera pas ici des éventualités  $\beta > n_2 k_0$  ou  $\beta < n_2 k_0$ , qui aboutissent à des impossibilités de mode guidé. Il est alors pratique de définir les paramètres  $k_r$  et  $\gamma$ , réels et positifs, par

$$k_r = \sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2} \quad \text{et} \quad \gamma = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_2^2}.$$

Dans le cœur et dans la gaine,  $f(r)$  suit les équations

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) + \left(k_r^2 - \frac{l^2}{r^2}\right) f(r) = 0 \quad (r < a)$$

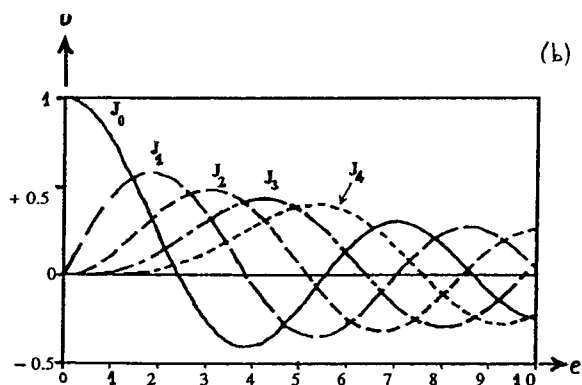
$$\text{et} \quad f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \left(\gamma^2 + \frac{l^2}{r^2}\right) f(r) = 0 \quad (r > a).$$

Ces équations sont des équations différentielles bien connues, dont les solutions appartiennent à la

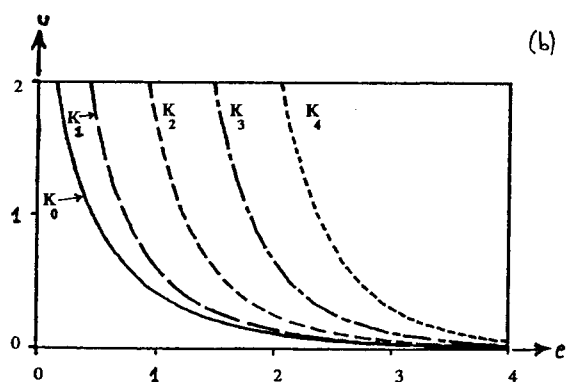
famille des fonctions de Bessel <sup>(\*)</sup> (cf. Annexe X, § 1 et § 2). En écartant les fonctions  $f(r)$  qui divergent en  $r=0$  ou en  $r \rightarrow \infty$ , on obtient

$$f(r) = A J_l(k_r r) \quad \text{dans le cœur} (r < a) \quad \text{et} \quad f(r) = B K_l(\gamma r) \quad \text{dans la gaine} (r > a),$$

où  $J_l$  est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre  $l$ , et  $K_l$  la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce et d'ordre  $l$ .



$$u = J_l(e), \quad l = 0, 1, 2, 3, 4.$$



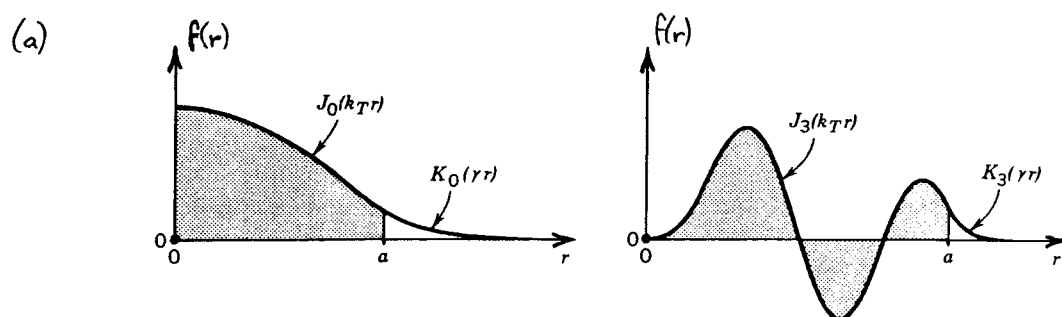
$$u = K_l(e), \quad l = 0, 1, 2, 3, 4.$$

(\*) Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846), astronome; Fonctions de Bessel: 1824.



Les fonctions  $J_l(\rho)$  sont des fonctions oscillant autour de zéro, dont l'amplitude d'oscillation décroît avec  $\rho$ . Les fonctions  $K_l(\rho)$  sont monotones décroissantes; leur décroissance est exponentielle pour les grandes valeurs de  $\rho$ .

Un exemple de distribution radiale  $f(r)$  est donné sur la figure ci-dessous pour  $l=0$ , ainsi qu'un autre pour  $l=3$ ; les paramètres  $k_T$ ,  $\gamma$  et le rapport  $\frac{J_l'}{J_l}$  ont été choisis de façon que  $f(r)$  et sa dérivée  $f'(r)$  soient continues sur le dioptre cœur-gaine  $r=a$  (\*) (il y a plusieurs solutions pour un  $l$  donné).



Les paramètres  $k_T$  et  $\gamma$  déterminent le taux de variation de  $f(r)$  dans le cœur et dans la gaine, respectivement. Plus  $k_T$  est grand, plus les oscillations de  $f(r)$  sont nombreuses dans le cœur; plus  $\gamma$  est grand, plus  $f(r)$  décroît rapidement dans la gaine et y pénètre donc moins. Cependant,  $k_T$  et  $\gamma$  sont liés par

$$k_T^2 + \gamma^2 = k_0^2 \cdot n_2^2 \quad (n_2 = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}, \text{ cf. § A-1-c});$$

donc si  $k_T$  croît, alors  $\gamma$  décroît et le champ pénètre plus profondément dans la gaine, et vice versa.

(\*) Ce sont bien les conditions suivies par les modes de propagation, dans la limite  $n_1 - n_2 \rightarrow 0$  (cf. § 3-a).

## 2) Paramètre de fibre

Dans la suite, il sera pratique de manipuler, plutôt que  $k_T$  et  $\gamma$ , les paramètres sans dimension  $X = k_T a$  et  $Y = \gamma a$ . La relation existant entre  $k_T$  et  $\gamma$  s'écrit

$$X^2 + Y^2 = V^2,$$

avec  $V = k_0 a \omega z = 2\pi \frac{a}{\lambda_0} \omega z$ .

Ce paramètre  $V$  est caractéristique de la fibre et de la fréquence de l'onde électromagnétique qui s'y propage; c'est un paramètre important, qui va contrôler le nombre de modes autorisés dans la fibre.  $V$  est appelé paramètre de fibre (parfois, fréquence réduite).

Pour un mode guidé, on a  $X < V$  (et  $Y < V$ ).

## 3) Modes de propagation LP

a) Les modes de propagation de la fibre optique à saut d'indice peuvent être exactement déterminés, de la façon suivante. Les composantes longitudinales  $E_z$  et  $B_z$  d'un champ électromagnétique étant écrites sous la forme trouvée au § 1, les équations de Maxwell permettent d'exprimer les composantes transverses  $E_r$ ,  $E_\phi$ ,  $B_r$  et  $B_\phi$  comme une somme de dérivées spatiales premières de  $E_z$  et  $B_z$ . Les relations de continuité suivies par  $E_z$ ,  $B_z$ ,  $\sqrt{n^2 E_r}$ ,  $B_r$  et  $B_\phi$  sur le dioptre cœur-gaine  $r=a$ , conduisent alors aux modes se propageant dans la fibre. Cependant, si le principe

de cette démarche est simple, l'extrême lourdeur de son développement la fait sortir du cadre de ce cours.

On décrit ici les modes de propagation d'une fibre à saut d'indice dans l'approximation de guidage faible  $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \ll 1$ ; cette condition est remplie dans une très large majorité de fibres optiques. Les modes sont alors quasiment TEM<sup>(\*)</sup>, avec un champ électrique polarisé suivant  $x$  ou suivant  $y$  (cf. Annexe X, § 3). Pour une polarisation suivant  $x$ , un champ électromagnétique guidé possède, à l'ordre un<sup>inclus</sup> en  $\sqrt{\Delta}$ , la structure suivante:

- le champ électrique a pour composantes transverses  $\tilde{E}_{0y} = 0$  et

$$\begin{cases} \tilde{E}_{0x}(r, \varphi) = \tilde{A}_0 J_\ell(k_r r) \begin{cases} \cos \ell \varphi \\ \text{ou} \\ \sin \ell \varphi \end{cases} & \text{dans le cœur } (r < a) \\ \tilde{E}_{0x}(r, \varphi) = \tilde{A}'_0 K_\ell(\gamma r) \begin{cases} \cos \ell \varphi \\ \text{ou} \\ \sin \ell \varphi \end{cases} & \text{dans la gaine } (r > a); \end{cases}$$

- les composantes transverses du champ magnétique sont  $\tilde{B}_{0x} = 0$ ,  $\tilde{B}_{0y} = \frac{\beta}{\omega} \tilde{E}_{0x}$ ;

- les composantes longitudinales  $\tilde{E}_{0z}$  et  $\tilde{B}_{0z}$  sont plus petites que les composantes transverses  $\tilde{E}_{0x}$  et  $\tilde{B}_{0y}$ , dans un rapport de l'ordre de  $\sqrt{\Delta}$ .

Les relations de continuité du champ électromagnétique sur le diélectrique cœur-gaine

$$r=a \text{ donnent: } \begin{cases} \tilde{A}_0 J_\ell(k_r a) = \tilde{A}'_0 K_\ell(\gamma a) \\ \tilde{A}_0 k_r J'_\ell(k_r a) = \tilde{A}'_0 \gamma K'_\ell(\gamma a). \end{cases}$$

(\*) TEM : transverse électro-magnétique.

Ainsi, à l'approximation  $\Delta \ll 1$ , tout se passe comme si l'on avait manipulé une théorie scalaire de la lumière, d'amplitude  $E_{0x}(r, \varphi) e^{-i\beta z}$ , dans laquelle on aurait imposé des conditions de continuité sur  $E_{0x}$  et ses dérivées spatiales (les calculs sont présentés à l'Annexe X, § 3). Ces conditions sont remplies si

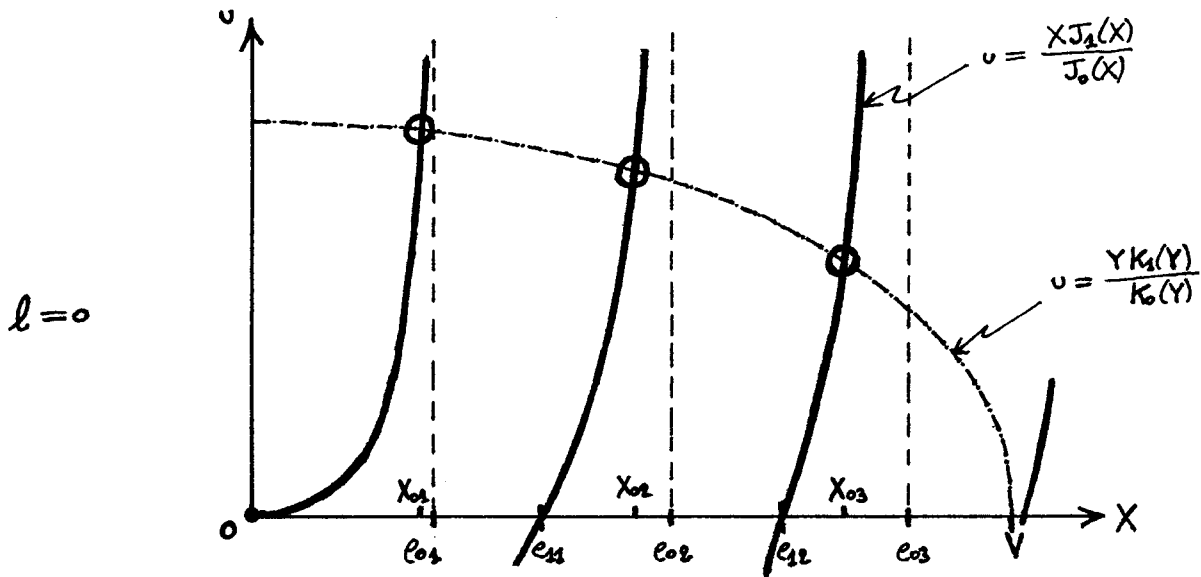
$$\frac{k_r J'_e(k_r a)}{J_e(k_r a)} = \frac{\gamma K'_e(\gamma a)}{K_e(\gamma a)},$$

c'est-à-dire, en utilisant  $X = k_r a$  et  $Y = \gamma a$  :

$$\frac{X J'_e(X)}{J_e(X)} = \frac{Y K'_e(Y)}{K_e(Y)} \quad (\text{Equation caractéristique}).$$

C'est une équation à une seule inconnue  $X$ , puisque  $Y^2 = V^2 - X^2$ . À  $l$  (et  $V$ ) fixé, chaque solution  $X_{lm}$ ,  $m=1, 2, 3, \dots$ , de cette équation correspond à un mode de propagation. Une équation doit être résolue pour chaque valeur de  $l$ .

b) Pour  $l=0$ , en utilisant  $J'_0 = -J_1$  et  $K'_0 = -K_1$ , l'équation caractéristique prend la forme  $\frac{X J_1(X)}{J_0(X)} = \frac{Y K_1(Y)}{K_0(Y)}$ . La courbe  $v = \frac{X J_1(X)}{J_0(X)}$  est formée de branches, d'asymptotes verticales en les zéros de  $J_0$ , qui croisent l'axe des abscisses en les zéros de  $J_1$ . On note  $e_{lm}$ ,  $m=1, 2, 3, \dots$ , les zéros strictement positifs de  $J_l(e)$  <sup>classés par ordre croissant</sup>. Comme  $J_0(e=0) = 1$  et  $J_1(e) \approx \frac{e}{2}$  pour  $e \sim 0$ ,  $v = \frac{X J_1(X)}{J_0(X)}$  démarre comme  $\frac{X^2}{2}$  au voisinage de  $X=0$ . De son côté, la courbe  $v = \frac{Y K_1(Y)}{K_0(Y)}$  est monotone décroissante de  $X=0$  ( $Y=V$ ) à  $X=V$  ( $Y=0$ ). Les points d'intersection des deux courbes, d'abscisses  $X_{0,m}$

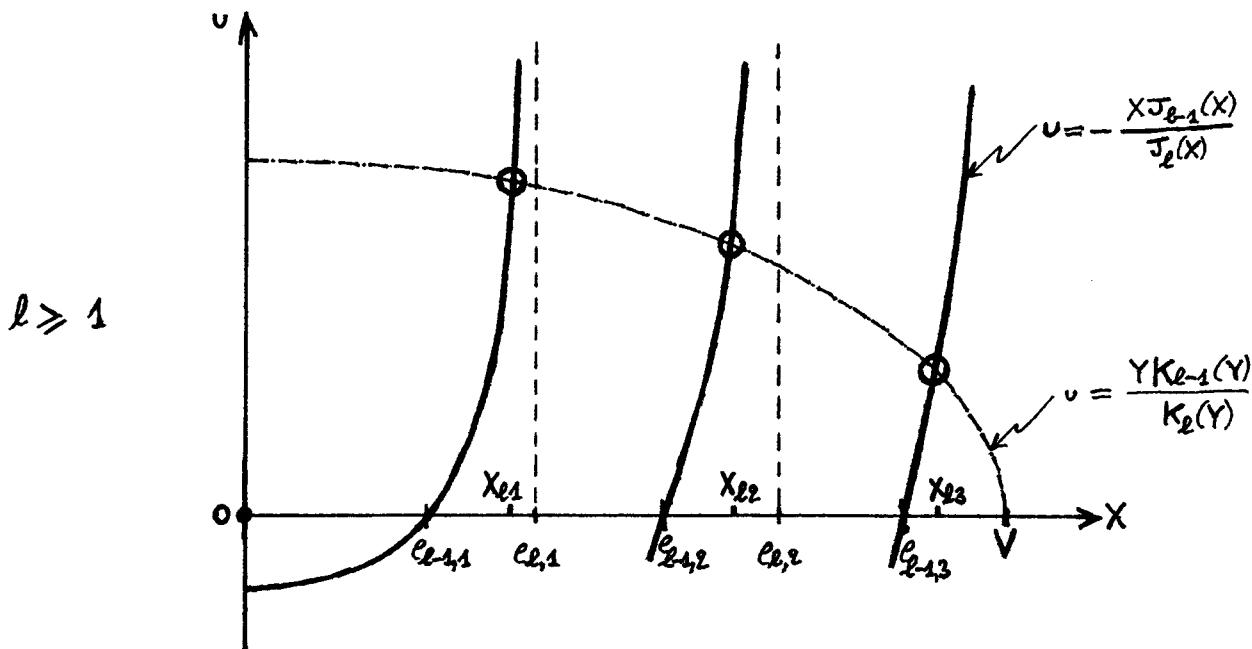


( $m=1, 2, 3, \dots$ ), correspondent aux modes à  $l=0$ . Le mode  $l=0, m=1$  existe toujours, quelle que soit la valeur du paramètre  $V$ ; le mode  $l=0, m=2$  n'existe que si  $V > e_{11}$ ; le mode  $l=0, m=3$  que si  $V > e_{12}$ ; etc.

Pour  $l \geq 1$ , l'équation caractéristique s'écrit, à l'aide des relations

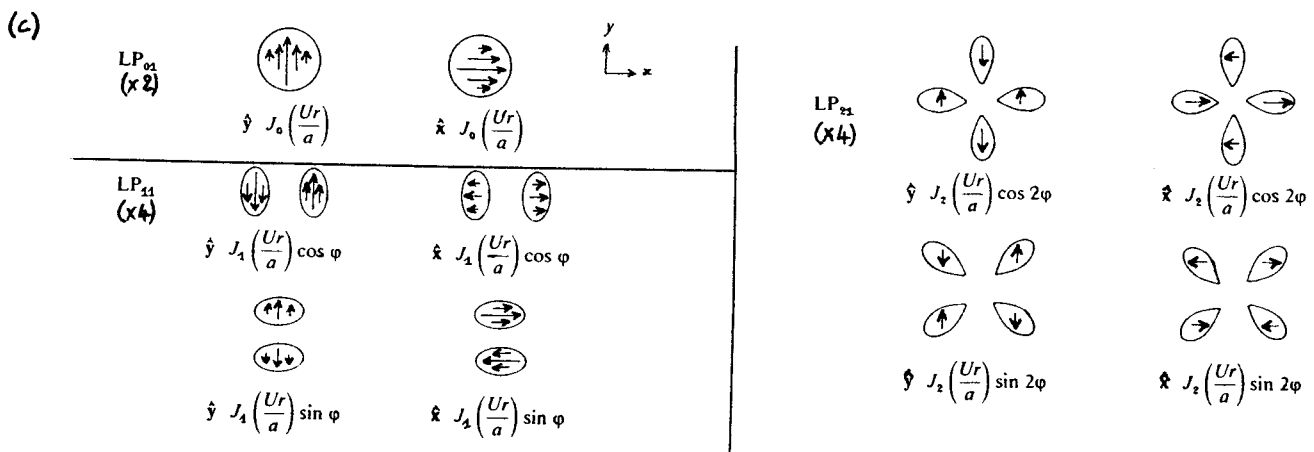
$$J'_l(e) = J_{l-1}(e) - l \frac{J_l(e)}{e} \quad \text{et} \quad K'_l(e) = -K_{l-1}(e) - l \frac{K_l(e)}{e}, \quad \text{sous la forme}$$

$$-\frac{XJ_{l-1}(X)}{J_l(X)} = \frac{YK_{l-1}(Y)}{K_l(Y)}. \quad \text{La résolution graphique de cette équation, obtenue par}$$



intersection des courbes  $u = -\frac{XJ_{l-1}(X)}{J_l(X)}$  et  $u = \frac{YK_{l-1}(Y)}{K_l(Y)}$ , est très semblable à la discussion précédente qui concernait le cas  $l=0$ ; le changement essentiel est maintenant que  $-\frac{XJ_{l-1}(X)}{J_l(X)}$  atteint une valeur finie strictement négative (\*) en  $X=0$ . Le mode  $l, m=1$  n'existe que si  $V > e_{l-1,1}$ ; le mode  $l, m=2$  si  $V > e_{l-1,2}$ ; etc.

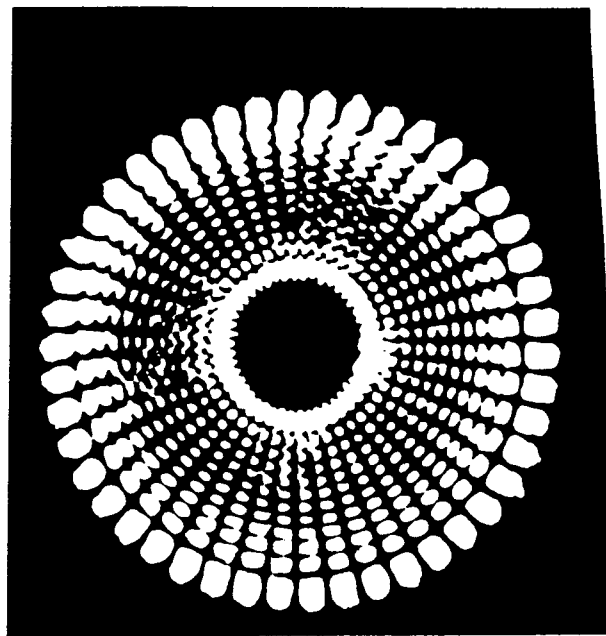
d) Une fois les  $X_{lm}$  trouvés, la structure des modes est fixée : pour une polarisation suivant l'axe  $x$ ,  $E_{0xz}^{lm}(r, \varphi) = J_l^{lm}(k_r r) \begin{cases} \cos l\varphi \\ \sin l\varphi \end{cases}$  dans le cœur ( $r < a$ ) et  $E_{0xz}^{lm}(r, \varphi) = J_l^{lm}(X_{lm}) K_l^{lm}(Y_{lm} r) \begin{cases} \cos l\varphi \\ \sin l\varphi \end{cases}$  dans la gaine ( $r > a$ ), avec  $k_r^{lm} = \frac{1}{a} X_{lm}$  et  $\gamma^{lm} = \frac{1}{a} Y_{lm} = \frac{1}{a} \sqrt{V^2 - X_{lm}^2}$ . Un mode  $lm$  est dégénéré en polarisation (linéaire suivant  $x$  ou suivant  $y$ ) et en dépendance angulaire ( $\cos l\varphi$  ou  $\sin l\varphi$ ); un mode à  $l=0$  est donc dégénéré deux fois, et un mode à  $l \geq 1$  quatre fois. Le mode  $lm$  est traditionnellement noté LP<sub>lm</sub> (LP pour linéairement polarisé). La figure ci-dessous représente trois modes de



(\*)  $J_l(\rho) \approx \left(\frac{\rho}{2}\right)^l \frac{1}{l!}$  pour  $\rho \sim 0$ , d'où  $-\frac{XJ_{l-1}(X)}{J_l(X)} \rightarrow -2l$  lorsque  $X \rightarrow 0$ .

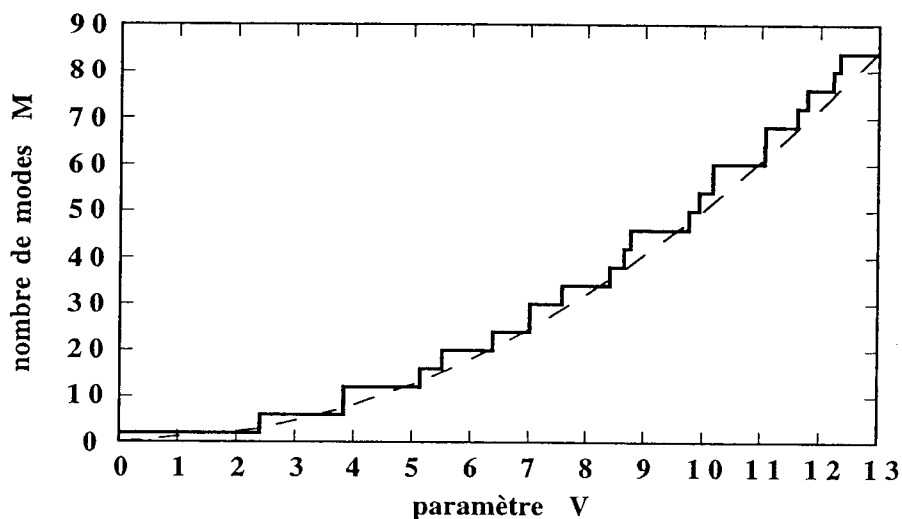
(c)

bas ordre (dans cette figure,  $U = X_{lm}$ ). On notera que l'indice  $l$  d'un mode LP est le nombre de lignes nodales de  $E_{ox}$  (ou  $E_{oy}$ ) dans le plan  $xy$  (cf. § 1. b), et que  $m$  est le nombre d'extrema<sup>( $\neq 0$ )</sup> de  $E_{ox}$  (ou  $E_{oy}$ ) dans une direction radiale; il est facile de constater



que les figures de la p. X-12 correspondent aux modes  $LP_{01}$  et  $LP_{33}$ , un peu plus long de vérifier que la figure ci-dessus représente le mode  $LP_{23,12}$ .

d) Le nombre  $M$  de modes supportés par la fibre à saut d'indice est représenté sur la figure suivante, en fonction du paramètre de fibre  $V$ ; ce dénombrement tient compte de la dégénérescence de chaque mode.



Pour des valeurs de  $V$  croissantes, un nouveau mode LP est autorisé chaque fois que  $V$  dépasse un zéro d'une fonction de Bessel  $J_l$ .  $V = c_{lm}$ ,  $l \neq 1$ ,

est le seuil d'existence du mode  $LP_{l+1,m}$  ;  $V = e_{1,m}$  est à la fois celui du mode  $LP_{2,m}$  et celui du mode  $LP_{0,m+1}$ . Le plus petit zéro  $e_{2m}$  est  $e_{01} = 2,405$ , et donc seul le mode fondamental  $LP_{01}$  est guidé dans la fibre lorsque  $V < 2,405$  : la fibre est alors dite monomode. (La courbe en pointillés sur la figure précédente représente la relation  $M = \frac{V^2}{2}$ , valable lorsque  $V \gg 1$  — résultat non montré dans ce cours.)

exemple : Une fibre à saut d'indice en silice possède un indice de cœur  $n_1 = 1,5$  et un indice de gaine  $n_2 = n_1(1 - \Delta)$  avec  $\Delta = 5 \cdot 10^{-3}$ , à la longueur d'onde  $\lambda_0 = 1,3 \mu\text{m}$ . On calcule  $an = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \approx n_1 \sqrt{2\Delta} = 0,15$ . La fibre est monomode à  $\lambda_0 = 1,3 \mu\text{m}$  lorsque  $2\pi \frac{a}{\lambda_0} an < 2,405$ , c'est-à-dire si son diamètre de cœur  $2a$  est plus petit que  $\frac{2,405}{\pi} \frac{\lambda_0}{an} \approx 6,6 \mu\text{m}$ .

e) La constante de propagation du mode  $LP_{lm}$  s'obtient en inversant la relation de définition de  $k_T$  (cf. § 1.c) :  $\beta_{lm} = \sqrt{k_0^2 n_1^2 - (k_T^{lm})^2}$ , soit, avec

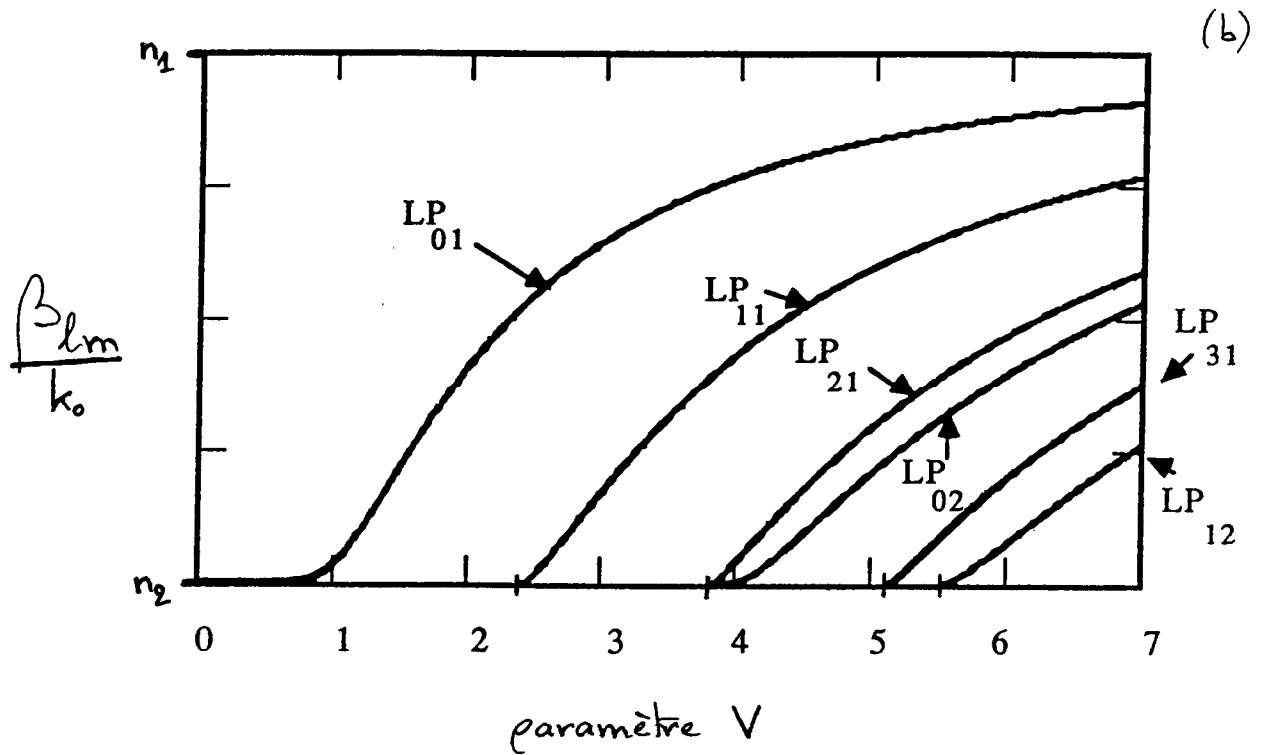
$$k_T^{lm} = \frac{1}{a} X_{lm} \quad \text{et} \quad V = k_0 a an :$$

$$\frac{\beta_{lm}}{k_0} = \sqrt{n_1^2 - \frac{an^2}{V^2} X_{lm}^2} ;$$

dans cette expression,  $X_{lm}$  dépend de  $V$  (cf. la discussion graphique du § b). Le rapport  $\frac{\beta_{lm}}{k_0}$ , appelé indice effectif associé au mode  $LP_{lm}$ , est représenté sur



la figure ci-dessous en fonction du paramètre de fibre  $V$ , pour les modes de plus bas ordres.



Cette figure néglige la dispersion due au matériau : les indices de réfraction  $n_1$  et  $n_2$  y sont supposés indépendants de la pulsation optique  $\omega$ .

On constate que la vitesse de phase  $v_p^{lm} = \frac{\omega}{\beta_{lm}} = \frac{c}{\left(\frac{\beta_{lm}}{k_0}\right)}$  du mode  $LP_{lm}$

est proche de  $\frac{c}{n_2}$  (vitesse de phase dans la gaine) au voisinage du seuil d'existence, et qu'elle tend vers  $\frac{c}{n_1}$  (vitesse de phase dans le cœur) quand

$V$  devient grand;  $v_p^{lm}$  reste comprise entre ces deux bornes:  $\frac{c}{n_2} < v_p^{lm} < \frac{c}{n_1}$ .

La vitesse de groupe  $v_g^{lm} = \left(\frac{d\beta_{lm}}{d\omega}\right)^{-1}$  du mode  $LP_{lm}$  vérifie

$$\frac{1}{v_g^{lm}} = \frac{1}{c} \frac{\beta_{lm}}{k_0} + \frac{V}{c} \frac{d}{dV} \left( \frac{\beta_{lm}}{k_0} \right); \text{ il est alors clair, d'après le graphique ci-dessus,}$$

que les vitesses de groupe sont différentes d'un mode à l'autre.

## Annexe X

### 1) Fonctions de Bessel d'ordre entier

Au § B-1-c, il a été montré que le profil radial  $f(r)$  de toute composante cartésienne d'un champ guidé le long d'une fibre à saut d'indice, suivrait l'équation

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) + \left(k_r^2 - \frac{l^2}{r^2}\right) f(r) = 0 \quad \text{pour } r < a \quad (\text{à l'intérieur du cœur}); \quad k_r \text{ est}$$

réel positif et  $l = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ . En posant  $\rho = k_r r$  et en effectuant le

changement de fonction  $F(\rho) = f(r)$ , il vient :

$$F''(\rho) + \frac{1}{\rho} F'(\rho) + \left(1 - \frac{l^2}{\rho^2}\right) F(\rho) = 0.$$

Cette équation est l'équation différentielle de Bessel, d'ordre  $l$  entier. Sa solution

générale est une superposition linéaire de la fonction de Bessel de première

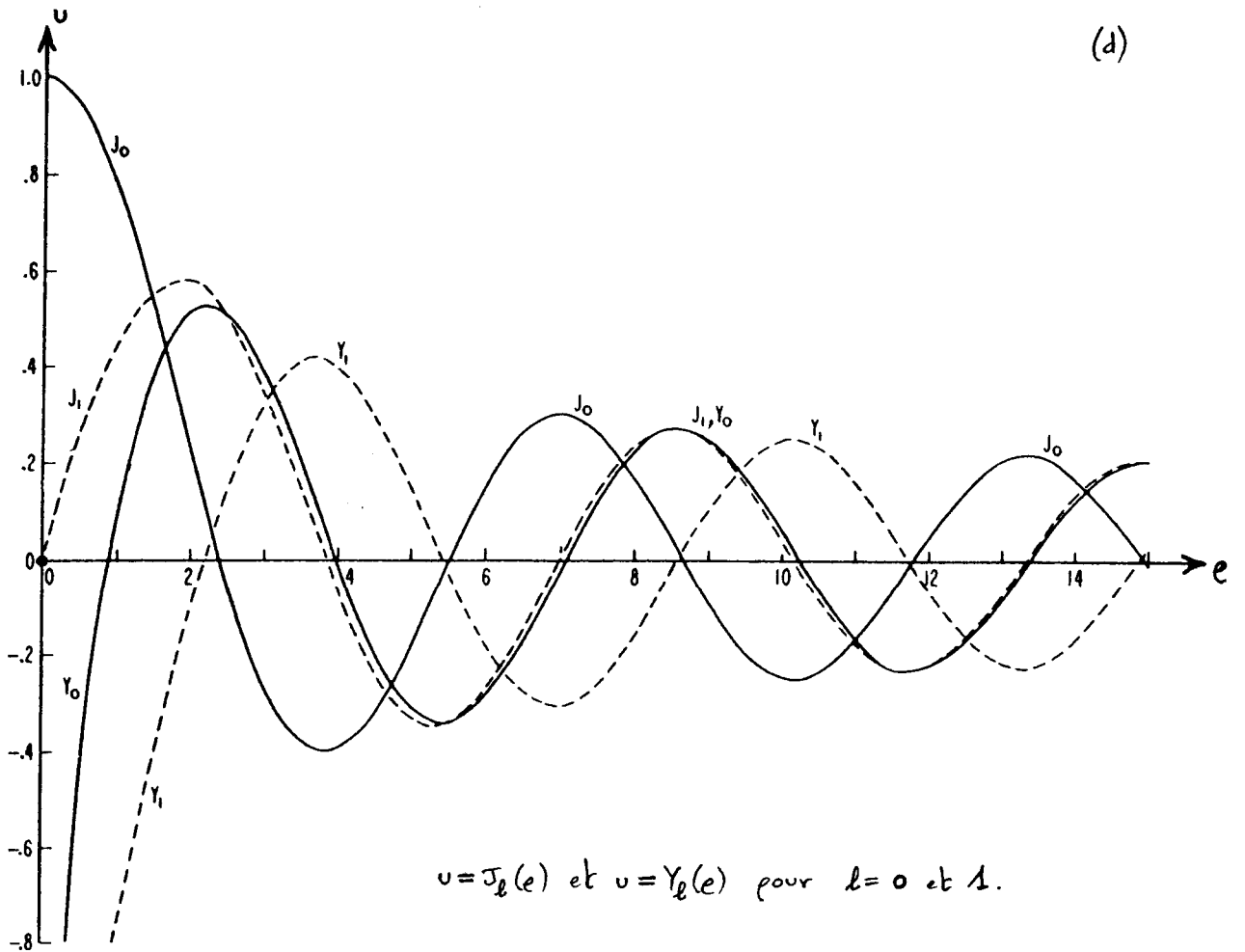
espèce  $J_l(\rho)$  et de la fonction de Bessel de seconde espèce  $Y_l(\rho)$ ; ces fonctions

oscillent autour de zéro, avec une amplitude d'oscillation décroissant avec  $\rho$

(cf. figure p. suivante).

Pour l'étude du champ électromagnétique se propageant dans la fibre à saut d'indice, la solution  $Y_l$  est à écarter car  $Y_l(\rho)$  diverge lorsque  $\rho \rightarrow 0$ . De son côté,  $J_l(\rho)$  est régulière en  $\rho = 0$ , et on a donc

$$f(r) = A J_l(k_r r) \quad \text{dans le cœur de la fibre } (r < a).$$



2) Fonctions de Bessel modifiées, d'ordre entier

Dans la gaine d'une fibre à saut d'indice, le profil radial  $f(r)$  de toute composante cartésienne d'un champ électromagnétique qui se propage suivant l'axe de la fibre, obéit à l'équation (\*) :

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \left(\gamma^2 + \frac{l^2}{r^2}\right) f(r) = 0 \quad (r > a);$$

$\gamma$  est une constante réelle et positive, et  $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ . En posant  $e = \gamma r$  et avec le changement de fonction  $F(e) = f(r)$ , il vient :

$$F''(e) + \frac{1}{e} F'(e) - \left(1 + \frac{l^2}{e^2}\right) F(e) = 0.$$

---

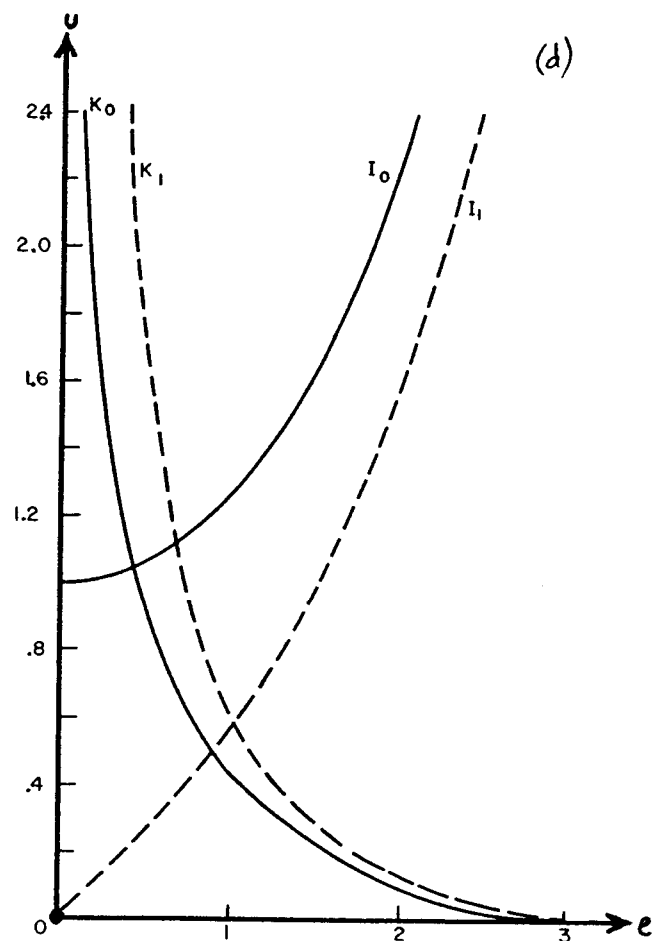
(\*) Cf. § B-1.c.

Cette équation différentielle est l'équation de Bessel modifiée, d'ordre  $l$  entier. Sa solution générale est une superposition linéaire de la fonction de Bessel modifiée de première espèce  $I_l(e)$  et de la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce  $K_l(e)$ .

Pour l'étude du champ se propageant dans la fibre à saut d'indice, la solution  $I_l$  est à écarter car  $I_l(e)$

diverge lorsque  $e \rightarrow \infty$  (la divergence est exponentielle). De son côté,  $K_l(e)$  décroît et tend vers zéro avec  $e$  (exponentiellement pour  $e$  assez grand), et donc

$$f(r) = A' K_l(\gamma r) \text{ dans la gaine } (r > a).$$



$u = I_l(e)$  et  $u = K_l(e)$  ( $l=0, l=1$ )

### 3) Structure des modes guidés à l'approximation de guidage faible

a) Dans l'approximation de guidage faible ( $\Delta = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \ll 1$ , condition remplie dans les fibres optiques courantes), un champ électromagnétique est approximativement TEM, se propageant dans la fibre avec un champ électrique polarisé linéairement suivant  $x$  ou  $y$ . Pour une polarisation

suivant  $x$ ,  $\vec{E}_{0x}$  prend la forme trouvée au paragraphe B-1 :

$$\begin{cases} \vec{E}_{0x}(r, \varphi) = \alpha b J_l(k_r r) \begin{cases} \cos l\varphi \\ \text{ou} \\ \sin l\varphi \end{cases} & \text{dans le cœur } (r < a) \\ \vec{E}_{0x}(r, \varphi) = \alpha b' K_l(\gamma r) \begin{cases} \cos l\varphi \\ \text{ou} \\ \sin l\varphi \end{cases} & \text{dans la gaine } (r > a), \end{cases}$$

et  $\vec{E}_{0y} = \vec{E}_{0z} = 0$ , en première approximation ( $k_r > 0; \gamma > 0; l = 0, 1, 2, 3, \dots$ ).

b) Le champ magnétique associé est calculé avec l'équation de Maxwell  $\text{rot } \vec{E} = -i\omega \vec{B}$ .

Il vient :  $B_{0x} = 0$ ,  $B_{0y} = \frac{\beta}{\omega} E_{0x}$  et  $B_{0z} = -\frac{i}{\omega} \frac{\partial E_{0x}}{\partial y}$ , soit

$$B_{0z}(r, \varphi) = -\frac{i\alpha b}{\omega} \left[ k_r J_l'(k_r r) \begin{cases} \cos l\varphi \sin \varphi \\ \sin l\varphi \sin \varphi \end{cases} + l \frac{J_l(k_r r)}{r} \begin{cases} -\sin l\varphi \cos \varphi \\ \cos l\varphi \cos \varphi \end{cases} \right] \text{ pour } r < a \text{ et}$$

$$B_{0z}(r, \varphi) = -\frac{i\alpha b'}{\omega} \left[ \gamma K_l'(\gamma r) \begin{cases} \cos l\varphi \sin \varphi \\ \sin l\varphi \sin \varphi \end{cases} + l \frac{K_l(\gamma r)}{r} \begin{cases} -\sin l\varphi \cos \varphi \\ \cos l\varphi \cos \varphi \end{cases} \right] \text{ pour } r > a.$$

Sur cette forme,  $B_{0z}(r, \varphi)$  n'apparaît pas comme on aurait pu s'y attendre, d'après

le § B-1. On obtient une expression de  $B_{0z}$  satisfaisante de ce point de vue en

utilisant les propriétés<sup>(\*)</sup> :  $J_l'(e) = \frac{1}{2} [J_{l-1}(e) - J_{l+1}(e)]$ ,  $l \frac{J_l(e)}{e} = \frac{1}{2} [J_{l-1}(e) + J_{l+1}(e)]$ ,

$K_l'(e) = -\frac{1}{2} [K_{l-1}(e) + K_{l+1}(e)]$  et  $l \frac{K_l(e)}{e} = -\frac{1}{2} [K_{l-1}(e) - K_{l+1}(e)]$ ; on trouve :

$$B_{0z}(r, \varphi) = i \frac{k_r \alpha b}{2\omega} \left[ J_{l-1}(k_r r) \begin{cases} \sin(l-1)\varphi \\ -\cos(l-1)\varphi \end{cases} + J_{l+1}(k_r r) \begin{cases} \sin(l+1)\varphi \\ -\cos(l+1)\varphi \end{cases} \right] (r < a)$$

$$\text{et } B_{0z}(r, \varphi) = i \frac{\gamma \alpha b'}{2\omega} \left[ K_{l-1}(\gamma r) \begin{cases} -\sin(l-1)\varphi \\ \cos(l-1)\varphi \end{cases} + K_{l+1}(\gamma r) \begin{cases} \sin(l+1)\varphi \\ -\cos(l+1)\varphi \end{cases} \right] (r > a).$$

(\*) Avec  $J_{-1}(e) = -J_1(e)$  et  $K_{-1}(e) = K_1(e)$ .

La composante longitudinale  $B_{0z}$  apparaît ainsi plus petite que la composante transverse  $B_{0y}$ , dans un rapport de l'ordre de  $\frac{k_r}{\beta}$  dans le cœur et de

$\frac{\gamma}{\beta}$  dans la gaine ; d'après les expressions de  $k_r$  et  $\gamma$  (cf. § B-1-c), et

puisque  $n_2 k_0 < \beta < n_1 k_0$ , on a  $\frac{|B_{0z}|}{|B_{0y}|} \sim \sqrt{\Delta}$  : le champ magnétique

est quasiment transverse à l'approximation de guidage faible.

↳ L'équation de Maxwell  $\text{rot } \vec{B} = i\omega \frac{n^2}{c^2} \vec{E}$  doit permettre de retrouver le champ électrique  $\vec{E}$ . À l'ordre un en  $\sqrt{\Delta}$ , on trouve  $\beta = n \frac{\omega}{c}$  avec  $n = n_1 \approx n_2$  (la différence entre  $n_1$  et  $n_2$  est d'ordre  $(\sqrt{\Delta})^2$ ) et on retrouve  $E_{0y} = 0$  ; cependant,

une composante longitudinale  $E_{0z} = -\frac{i}{\beta} \frac{\partial E_{0x}}{\partial x}$  apparaît :

$$E_{0z}(r, \varphi) = -\frac{i\omega b}{\beta} \left[ k_r J'_l(k_r r) \begin{cases} \cos l\varphi \cos \varphi \\ \sin l\varphi \cos \varphi \end{cases} + l \frac{J'_l(k_r r)}{r} \begin{cases} \sin l\varphi \sin \varphi \\ -\cos l\varphi \sin \varphi \end{cases} \right] \text{ pour } r < a, \text{ et}$$

$$E_{0z}(r, \varphi) = -\frac{i\omega b}{\beta} \left[ r K'_l(\gamma r) \begin{cases} \cos l\varphi \cos \varphi \\ \sin l\varphi \cos \varphi \end{cases} + l \frac{K'_l(\gamma r)}{r} \begin{cases} \sin l\varphi \sin \varphi \\ -\cos l\varphi \sin \varphi \end{cases} \right] \text{ pour } r > a.$$

En suivant la même démarche que celle utilisée au paragraphe b) précédent pour

le champ magnétique, il est possible d'écrire  $E_{0z}(r, \varphi)$  sous la forme attendue

d'après l'étude du § B-1, et d'en déduire que  $\frac{|E_{0z}|}{|E_{0x}|} \sim \sqrt{\Delta}$  : le

champ électrique est quasiment transverse.

d) On a donc obtenu, à l'ordre un <sup>inclus</sup> en  $\sqrt{\Delta}$ , la forme du champ électromagnétique solution des équations de Maxwell dans le cœur et dans la gaine ; en effet,  $\text{div } \vec{E} = 0$

est également vérifiée (car  $\xi_y = 0$  et  $\xi_z = -\frac{i}{\beta} \frac{\partial \xi_x}{\partial x}$ ), ainsi que  $\text{div } \vec{\mathcal{B}} = 0$  (puisque  $\mathcal{B}_{xc} = 0$ ,  $\mathcal{B}_y = \frac{\beta}{k_0} \xi_{xc}$  et  $\mathcal{B}_z = -\frac{i}{\omega} \frac{\partial \xi_{xc}}{\partial y}$ ).

Il reste à écrire les relations de continuité vérifiées par le champ électromagnétique sur le diélectre cœur-gaine. La continuité de  $\xi_y$ ,  $\mathcal{B}_r$  et  $\mathcal{B}_\varphi$  se traduit par

$$J_0 J_\ell(k_r a) = J_0' K_\ell(\gamma a) ;$$

celle de  $\xi_z$  et  $\mathcal{B}_z$  s'écrit

$$J_0 k_r J_\ell'(k_r a) = J_0' \gamma K_\ell'(\gamma a).$$

Finalement, dans le cadre de l'approximation de guidage faible, tout se passe comme s'il on manipulait une théorie scalaire de la lumière, d'amplitude  $\xi_{0xc}(r, \varphi) e^{-i\beta z}$  pour la polarisation suivant  $x$ , en imposant en  $r=a$  des relations de continuité sur  $\xi_{0xc}$  et ses dérivées spatiales.

Sources bibliographiques des figures :

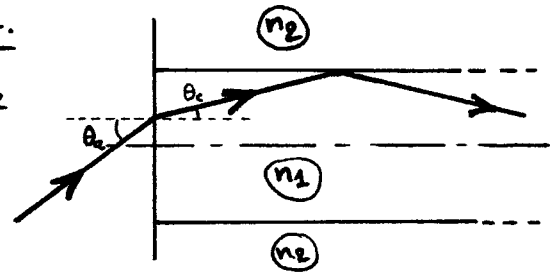
- (a) Saleh, Teich Fundamentals of Photonics (Wiley, 1991)
- (b) Prade, Vinet Optique Guidée (cours de l'ENSTA, années 80)
- (c) Ghatak, Thyagarajan Optical Electronics (Cambridge U.P., 1989)
- (d) Abramowitz, Stegun Handbook of Mathematical Functions (NBS, 1968)

# INTRODUCTION À LA PHOTONIQUE

## Exercices X

### 1) Angle d'acceptance d'une fibre multimode.

Montrer que, pour être guidé à l'intérieur d'une fibre optique à saut d'indice, un rayon lumineux doit y avoir une inclinaison  $\theta$  sur



l'axe inférieure à l'inclinaison critique  $\theta_c$ , car  $\theta_c = \frac{n_2}{n_1}$ . Montrer que l'angle d'incidence maximal  $\theta_a$  d'un rayon guidé, sur la surface d'entrée perpendiculaire à l'axe de la fibre, est donné par  $\sin \theta_a = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$  ( $\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$  est appelé ouverture numérique de la fibre). Sous quels angles sortent les rayons lumineux en fin de fibre? (On raisonnera sur les rayons méridiens.)

### 2) Fibre multimode à gradient d'indice (profil parabolique).

L'équation d'un rayon lumineux dans un milieu d'indice de réfraction inhomogène, est  $\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \vec{\text{grad}} n$ , où  $s$  est l'abscisse curviligne le long du rayon.

a) Montrer que dans une fibre à gradient d'indice, d'axe  $z$  et de profil d'indice  $n(r) = n_1 \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^p \Delta \right]$  dans le cœur de rayon  $a$  ( $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$ ,  $\Delta \ll 1$ ), le rayon  $\vec{r}(z) = x(z)\hat{e}_x + y(z)\hat{e}_y + z\hat{e}_z$  reste confiné au voisinage de l'axe de symétrie de la fibre (on raisonnera dans l'approximation paraxiale  $|x'(z)|, |y'(z)| \ll 1$ ).

b) Déterminer l'équation d'un rayon lumineux lorsque le profil d'indice de la fibre est parabolique,  $p=2$ ; que vaut le pas  $\mu$  de la fibre? Estimer  $\mu$  pour  $a = 50 \mu\text{m}$ ,  $\Delta = 0,005$ .

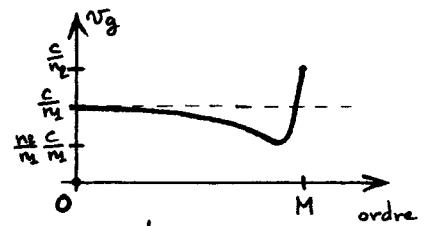
c) Exprimer la durée que met un rayon quelconque à parcourir une fibre à gradient d'indice de longueur  $L$ ; vérifier que l'on obtient la formule  $\Delta t = \frac{n_1}{c} \int_0^L dz \sqrt{1 + x'(z)^2 + y'(z)^2} \left( 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^p \Delta \right)$ , où l'on interprétera les deux facteurs de l'intégrand. Montrer que pour  $p=2$ ,  $\Delta t = n_1 \frac{L}{c} + O(\Delta^2)$ .



3) Temps de réponse d'une fibre multimode à saut d'indice. On considère une fibre optique multimode de longueur  $L$ .

a) Quels rayons mettent une durée minimale  $\Delta t_{\min.}$  à traverser la fibre? Exprimer  $\Delta t_{\min.}$ . Dans un plan méridien, quels rayons mettent une durée maximale  $\Delta t_{\max.}$  à traverser la fibre? Exprimer  $\Delta t_{\max.}$ . En déduire la largeur temporelle  $\sigma_z \approx \frac{1}{2} (\Delta t_{\max.} - \Delta t_{\min.})$  en sortie de fibre, d'une impulsion infiniment étroite temporellement, envoyée en entrée.  $\sigma_z$  est le temps de réponse de la fibre. (On utilisera  $\Delta = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \ll 1$ .) Pour  $n_1 = 1,5$ ,  $\Delta = 0,005$ ,  $\frac{\sigma_z}{L} = ?$

b) Trouver le temps de réponse  $\sigma_z$  de la fibre multimode à saut d'indice en raisonnant sur ses modes de propagation, sachant que la vitesse de groupe  $v_g$  des différents modes possède l'allure suivante en fonction de l'ordre des modes. Pourquoi les modes d'ordres proches de l'ordre maximal n'interviennent-ils pas dans le temps de réponse  $\sigma_z$ ?

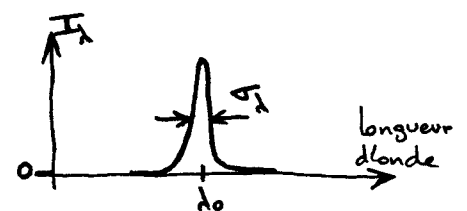


4) Temps de réponse d'une fibre optique monomode. Dans une fibre optique monomode (à saut d'indice), le diamètre de cœur est assez petit et la longueur d'onde optique assez grande pour que seul le mode fondamental  $LP_{01}$  puisse se propager dans la fibre.

a) En admettant que la constante de propagation de ce mode vaille  $\beta \approx n_2(\omega) \frac{\omega}{c}$ , exprimer sa vitesse de groupe  $v_g$ . Montrer que  $v_g = \frac{c}{N}$ , avec l'indice de groupe  $N = n_2 + \omega \frac{dn_2}{d\omega} = n_2 - \lambda_0 \frac{dn_2}{d\lambda_0}$ .

b) Une impulsion lumineuse envoyée en entrée  $z=0$  de la fibre, de durée infiniment petite, possède la largeur spectrale  $\sigma_\lambda$ .

Exprimer la largeur temporelle  $\sigma_z$  de l'impulsion en sortie  $z=L$  de la fibre; montrer que  $\sigma_z$  est



de la forme  $\sigma_z = |\Delta_\lambda| \sigma_\lambda L$ , où l'on exprimera le coefficient de dispersion  $\Delta_\lambda$  de la fibre. Pour la silice à  $\lambda_0 = 1,3 \mu\text{m}$ ,  $\Delta_\lambda = 1 \text{ ps/km.nm}$ ; que vaut alors  $\sigma_z/L$  lorsque  $\sigma_\lambda = 1 \text{ nm}$ ? Comparer avec l'exercice 3.