

# Optique ondulatoire: Chapitre VII Optique de Fourier - Filtrage

Gérard Rebmann

► **To cite this version:**

Gérard Rebmann. Optique ondulatoire: Chapitre VII Optique de Fourier - Filtrage. Licence / L3. 2007. <sfo-00292571>

**HAL Id: sfo-00292571**

**<https://hal-sfo.ccsd.cnrs.fr/sfo-00292571>**

Submitted on 1 Jul 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## **Chapitre VII**

### *Optique de Fourier*

#### *Filtrage*

*NOTES*

## 1 Introduction

La diffraction de FRAUNHOFER conduit à l'expression suivante pour l'amplitude diffractée

$$E(M) \propto \int \int_{\Sigma} t(P) e^{-i\vec{K} \cdot \overrightarrow{OP}} d\sigma_P$$

Soit encore, si la transmittance de l'ouverture diffractante s'écrit  $t(x, y)$  :

$$E(M) \propto \int \int_{\Sigma} t(x, y) e^{-i(K_x x + K_y y)} d\sigma$$

qui est l'expression de la transformée de FOURIER à deux dimensions de la transmittance de l'ouverture diffractante. Les variables conjuguées de la transformation sont  $(x, y)$  coordonnées dans le plan diffractant et  $(K_x, K_y)$  composantes du vecteur d'onde dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'optique géométrique.

Plus précisément, en lumière incidente parallèle (par exemple lorsque l'ouverture est placée entre lentilles convergentes),  $\vec{K} = \vec{k} - \vec{k}_i$  où  $\vec{k}_i$  est le vecteur d'onde de l'onde incidente et où  $\vec{k}$  celui de la direction d'observation.

On introduit parfois les cosinus directeurs  $\alpha$  et  $\beta$  des vecteurs d'onde, ainsi  $k_x = \alpha k = \alpha \frac{2\pi}{\lambda}$  et  $k_y = \beta k = \beta \frac{2\pi}{\lambda}$ , et

$$K_x = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha - \alpha_i) \quad \text{et} \quad K_y = \frac{2\pi}{\lambda}(\beta - \beta_i)$$

En observant dans le plan  $(X, Y)$ , plan focal de la lentille de sortie :

$$K_x = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X}{f} \quad \text{et} \quad K_y = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{Y}{f}$$

où  $f$  est la distance focale de la lentille convergente.

### Remarque

On trouvera dans certains ouvrages d'autres variables conjuguées comme  $(x, y)$  et  $(\sigma_x, \sigma_y)$  où  $\sigma$  est le "vrai" nombre d'onde :

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}$$

et avec les mêmes cosinus directeurs  $(\alpha, \beta)$  :  $\sigma_x = \alpha\sigma$  et  $\sigma_y = \beta\sigma$  on a

$$E(\sigma_x, \sigma_y) \propto \int \int_{\text{ouverture}} t(x, y) e^{-2\pi i(\sigma_x x + \sigma_y y)} dx dy$$

## 2 Transformée de Fourier des fonctions et des distributions (rappel)

### 2.1 La distribution $\delta$ ( ou fonction de DIRAC)

Si on considère un espace de fonctions tests  $\varphi$  à support borné  $\Omega$ ,  $\delta$  est telle que :

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

qu'on écrit parfois

$$\int \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

## 2.2 Transformée de Fourier d'une fonction

La transformée de Fourier d'une fonction  $f(x)$  s'écrit :

$$F(k) = \mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx$$

à deux dimensions cela devient :

$$F(k_x, k_y) = \mathcal{F}[f(x, y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(k_x x + k_y y)} f(x, y) dx dy$$

Dans le cas particulier, souvent rencontré en pratique où les variables se séparent :

$$f(x, y) = g(x)h(y)$$

si

$$\mathcal{F}[g] = G \quad \text{et} \quad \mathcal{F}[h] = H$$

Alors :

$$\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[gh] = \mathcal{F}[g]\mathcal{F}[h] = G(k_x)H(k_y)$$

On obtient le produit simple de la transformée en  $x$  par la transformée en  $y$  (produit tensoriel d'espace)

## 2.3 Transformée de Fourier d'une distribution

Si  $T$  est une distribution sur l'espace des fonctions tests  $\varphi$ , la transformée de  $T$  est définie par :

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle$$

**Cas particulier de  $\delta_a = \delta(x - a)$**

$$\langle \mathcal{F}\delta_a, \varphi \rangle = \langle \delta_a, \mathcal{F}\varphi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) e^{-ikx} dk dx$$

qui devient, si on admet l'inversion de l'ordre des intégrations :

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) e^{-ikx} \delta(x - a) dx dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) e^{-ika} dk$$

D'où par identification :

$$\mathcal{F}[\delta(x - a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ika}$$

avec le cas particulier :

$$\mathcal{F}[\delta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

## 2.4 Transformée inverse

Si  $F(k) = \mathcal{F}[f(x)]$ , on admettra que

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(k)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ikx} F(k) dk$$

Conséquence pour  $\delta$  :

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right] = \delta$$

ou encore :

$$\mathcal{F}^{-1}[1] = \sqrt{2\pi}\delta$$

Par une démonstration identique à celle du paragraphe précédent on montre que :

$$\mathcal{F}^{-1}\delta(k - \kappa) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\kappa x}$$

d'où on déduit le cas particulier :

$$\mathcal{F}[1] = \sqrt{2\pi}\delta$$

## 2.5 Transformée de transformée

On sera amené à considérer la transformée de Fourier d'une transformée de Fourier, elle s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\mathcal{F}[f(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-iku} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikx} f(x) dx \right] dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \int e^{-ik(u+x)} f(x) dx dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \int e^{-iks} f(s-u) ds dk\end{aligned}$$

or

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-iks} dk = \sqrt{2\pi}\delta(s)$$

d'où

$$\mathcal{F}\mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \sqrt{2\pi}\delta(s) f(s-u) ds$$

soit finalement :

$$\mathcal{F}\mathcal{F}[f(x)] = f(-x)$$

## 2.6 Convolution et transformation de Fourier

On note le produit de convolution des fonctions  $f$  et  $g$  :

$$f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)du$$

Le produit de convolution est défini pour les distributions par

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_{\xi} * T_{\eta}, \varphi(\xi + \eta) \rangle$$

La transformée de Fourier d'un produit de convolution s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)dudx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} g(x-u)dx \right] f(u)du\end{aligned}$$

posons  $x - u = v$ , alors  $x = u + v$  et

$$\mathcal{F}[f * g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iku} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikv} g(v)dv \right] f(u)du$$

et finalement

$$\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$$

Inversement, calculons

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\kappa-k)s} g(s) ds \right] dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \int \int e^{-i\kappa s} e^{-ik(x-s)} f(x) g(s) dx ds dk\end{aligned}$$

or

$$\int e^{-ik(x-s)} dk = 2\pi \delta(x-s)$$

$$\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g] = \int e^{-i\kappa s} f(s) g(s) ds = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[fg]$$

d'où finalement

$$\mathcal{F}[fg] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]$$

### 3 Application à la diffraction de Fraunhofer

#### 3.1 Cas du réseau sinusoidal

Dans les préliminaires de l'holographie, on a montré comment réaliser un réseau dont la transmittance possédait une composante sinusoidale.

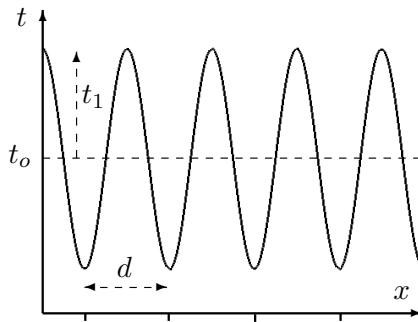


Figure 1 - Réseau sinusoidal

$$\begin{aligned}t &= t_0 + t_1 \cos \frac{2\pi x}{d} \\ t &= t_0 + \frac{t_1}{2} e^{2\pi i x/d} + \frac{t_1}{2} e^{-2\pi i x/d}\end{aligned}$$

Si on éclaire ce réseau (considéré dans un premier temps infini en  $x$  et en  $y$ ) par un faisceau de lumière parallèle, l'amplitude diffractée sera proportionnelle à :

$$E(k_x, k_y) \propto \mathcal{F}[t(x, y)] = \left\{ \mathcal{F}[t_0] + \mathcal{F}\left[\frac{t_1}{2} e^{2\pi i x/d}\right] + \mathcal{F}\left[\frac{t_1}{2} e^{-2\pi i x/d}\right] \right\} \mathcal{F}[1(y)]$$

où on a noté  $1(y)$  pour la constante 1 en  $y$  afin de marquer la transformation  $y \rightarrow k_y$ .

$$\mathcal{F}[t(x, y)] = \frac{1}{2\pi} \left\{ t_0 \delta(k_x) + \frac{t_1}{2} \delta\left(k_x - \frac{2\pi}{d}\right) + \frac{t_1}{2} \delta\left(k_x + \frac{2\pi}{d}\right) \right\} \delta(k_y)$$

#### Interprétation

En  $k_y$  il y a seulement de la lumière sur l'axe  $X'X$  ( $k_y = 0$ )

en  $k_x$  il y a seulement trois composantes : en  $-\frac{2\pi}{d}$ ,  $0$ ,  $\frac{2\pi}{d}$

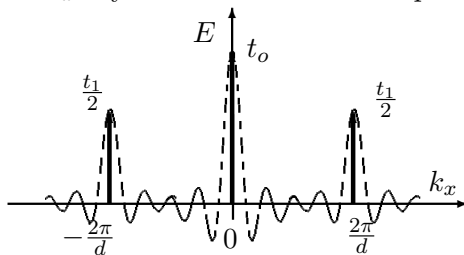


Figure 2 - Diffraction par un réseau sinusoidal

Ce réseau particulier ne diffuse de la lumière que dans les ordres 0 et  $\pm 1$ , l'amplitude est proportionnelle à  $t_0$  et à  $t_1/2$ .

La courbe en pointillé correspond au cas du réseau fini traité plus loin.

Dans la réalité ce réseau n'est pas infini ni en  $x$ , ni en  $y$ , mais un rectangle  $a \times b$ . Alors :

$$t_R = ab t(x, y) \operatorname{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{y}{b}\right) = ab [t(x) \operatorname{rect}\left(\frac{x}{a}\right)] [t(y) \operatorname{rect}\left(\frac{y}{b}\right)]$$

et

$$\mathcal{F}[t_R] \propto ab \mathcal{F}[t(x) \operatorname{rect}\left(\frac{x}{a}\right)] \mathcal{F}[1(y) \operatorname{rect}\left(\frac{y}{b}\right)] = ab \{ \mathcal{F}[t(x)] * \operatorname{sinc}(k_x a/2) \} \{ \mathcal{F}[1(y)] * \operatorname{sinc}(k_y b/2) \}$$

finalement

$$E(k_x, k_y) \propto ab \{ t_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{k_x a}{2}\right) + t_1 \operatorname{sinc}\left(\left(k_x - 2\pi/d\right)\frac{a}{2}\right) + t_1 \operatorname{sinc}\left(\left(k_x + 2\pi/d\right)\frac{a}{2}\right) \} \operatorname{sinc}\left(\frac{k_y b}{2}\right)$$

### Interprétation

L'amplitude diffractée est le produit d'une fonction de  $k_x$  par une fonction de  $k_y$ . Pour une observation dans le plan focal d'une lentille convergente, la lumière "déborde" de l'axe  $X'X$ , l'étendue en  $Y/f$  est en  $\lambda/b$ , d'autant plus étroite que le réseau est haut. En  $k_x$ , il y a toujours les trois pics principaux correspondant aux ordres  $p = 0, \pm 1$  mais ils sont élargis par le sinus cardinal de largeur  $\lambda/a$  en  $X/f$  qui remplace la "fonction"  $\delta$ .

### 3.2 Cas d'un réseau de fentes

On considère un réseau de  $2N + 1$  fentes (donc  $2N$  intervalles) de largeur  $a$  et de hauteur  $b$ , distantes de  $d > a$ . Sa transmittance peut être représentée par

$$t = ab \left[ \sum_{-N}^N \delta(x - nd) \right] * \operatorname{rect}(x/a) \operatorname{rect}(y/b)$$

Calculons d'abord la transformée de Fourier du "peigne" de  $\delta$  :

$$\mathcal{F}\left[\sum_{-N}^N \delta(x - nd)\right] = \sum_{-N}^N \mathcal{F}[\delta(x - nd)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \sum_{-N}^N e^{-inkd} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \sum_{n=0}^{-N} e^{-inkd} + \sum_{n=0}^N e^{-inkd} - 1 \right\}$$

Le  $-1$  rectifie le doublement du terme en  $n = 0$  présent dans chaque somme qui vaut 1. Ainsi en posant  $\phi = kd$  :

$$\mathcal{F}\left[\sum_{-N}^N \delta(x - nd)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \sum_0^N e^{in\phi} + \sum_0^N e^{-in\phi} - 1 \right\}$$

soit

$$\sqrt{2\pi} \mathcal{F}\left[\sum_{-N}^N \delta(x - nd)\right] = \frac{1 - e^{i(N+1)\phi}}{1 - e^{i\phi}} + \frac{1 - e^{-i(N+1)\phi}}{1 - e^{-i\phi}} - 1$$

ou encore

$$= \frac{e^{i(N+1)\phi/2} \sin(N+1)\phi/2}{e^{i\phi/2} \sin\phi/2} + \frac{e^{-i(N+1)\phi/2} \sin(N+1)\phi/2}{e^{-i\phi/2} \sin\phi/2} - 1$$

qui peut aussi s'écrire :

$$= \frac{2 \cos N\phi/2 \sin(N+1)\phi/2}{\sin\phi/2} - 1 = \frac{\sin(2N+1)\phi/2}{\sin\phi/2} = \mathcal{R}(2N+1, \phi)$$

où  $\mathcal{R}$  est la fonction "réseau" de fentes déjà rencontrée au chapitre sur les interférences. On notera que

$$\mathcal{R}(N \rightarrow \infty, kd) \rightarrow N \sum_p \delta\left(k - p \frac{2\pi}{d}\right)$$



On retrouve bien la fonction du réseau qui donne un peigne en  $k$  de pas  $\frac{2\pi}{d}$  lorsque le nombre de fentes augmente indéfiniment.

Par transformation de Fourier à deux dimensions de la transmittance, on obtient l'amplitude diffusée :

$$\begin{aligned} E(k_x, k_y) &\propto ab \mathcal{F}_x \left\{ \left[ \sum_{-N}^N \delta(x - nd) \right] * \text{rect}(x/a) \right\} \mathcal{F}_y [\text{rect}(y/b)] \\ &\propto ab \mathcal{F}_x \left[ \sum_{-N}^N \delta(x - nd) \right] \mathcal{F}_x [\text{rect}(x/a)] \mathcal{F}_y [\text{rect}(y/b)] \end{aligned}$$

finalemet

$$E(k_x, k_y) \propto ab \mathcal{R}(2N + 1, k_x d) \text{sinc} \left( \frac{k_x a}{2} \right) \text{sinc} \left( \frac{k_y b}{2} \right)$$

On aurait tout aussi bien pu écrire la transmittance comme un peigne infini limité par une "porte" de largeur  $L = (2N + 1)d$ , ensemble convolué avec le motif (fente de largeur  $a$ ) :

$$t = \left\{ \left[ \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - nd) \right] L \text{rect} \left( \frac{x}{L} \right) \right\} * a \text{rect} \left( \frac{x}{a} \right) b \text{rect} \left( \frac{y}{b} \right)$$

alors :

$$\begin{aligned} E(k_x, k_y) &\propto \mathcal{F}_x \left[ \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - nd) \right] * \mathcal{F}_x \left[ L \text{rect} \left( \frac{x}{L} \right) \right] \mathcal{F}_x \left[ a \text{rect} \left( \frac{x}{a} \right) \right] \mathcal{F}_y \left[ b \text{rect} \left( \frac{y}{b} \right) \right] \\ E(k_x, k_y) &\propto \left\{ L \left[ \sum_p \delta \left( k_x - p \frac{2\pi}{d} \right) \right] * \text{sinc} \left( \frac{k_x L}{2} \right) \right\} ab \text{sinc} \left( \frac{k_x a}{2} \right) \text{sinc} \left( \frac{k_y b}{2} \right) \end{aligned}$$

L'équivalence des deux expressions mène à la conclusion suivante :

$$\frac{L}{d} \left[ \sum_p \delta \left( k_x - p \frac{2\pi}{d} \right) \right] * \text{sinc} \left( \frac{k_x L}{2} \right) = \mathcal{R}(2N + 1, k_x d)$$

où on a tenu compte de la limite  $N \rightarrow \infty$  pour ajuster les constantes multiplicatives.

### Remarques

- On constate que la limitation du réseau à une longueur  $L$  est responsable de l'élargissement des pics de  $\delta$  en  $\mathcal{R}(L/d, k_x d)$ . Ce résultat est tout à fait général, on le retrouve en holographie où la taille de l'hologramme joue sur la définition des points de l'image obtenue : n'importe quel fragment d'un hologramme permet d'obtenir l'image, mais la taille des points - on dit la définition de l'image - dépend des dimensions de l'hologramme, plus il est grand et plus les points sont "fins".

- À une dimension, une transmission  $t(x) = [\text{porte}] \cdot [\text{peigne}] * [\text{motif}]$  conduit à une amplitude diffractée :

$$E \propto \mathcal{F}[t] = \mathcal{F}[\text{porte}] * \mathcal{F}[\text{peigne}] \cdot \mathcal{F}[\text{motif}]$$

Il faut toutefois faire attention à l'ordre des facteurs et aux associations; elles doivent avoir un sens et représenter la situation physique :

$$t(x) = [\text{porte}] \cdot [\text{peigne}] * [\text{motif}] = \{[\text{porte}] \cdot [\text{peigne}]\} * [\text{motif}] = [\text{porte}] \cdot \{[\text{peigne}] * [\text{motif}]\}$$

La première association convolue un peigne limité avec un motif, tandis que la seconde limite le résultat de la convolution d'un peigne infini avec le motif. Mais

$$t(x) \neq [\text{peigne}] * \{[\text{motif}].[\text{porte}]\}$$

car  $[\text{motif}].[\text{porte}]$  ne reflète pas la situation physique.

- À deux dimensions, si les variables se séparent (ce qui est souvent le cas), on obtient simplement le produit de la transformée en  $x$  par la transformée en  $y$ . De nombreux exemples seront présentés en TD et en TP.

Une fente rectangulaire donne une figure de diffraction du type de la figure ci-contre.

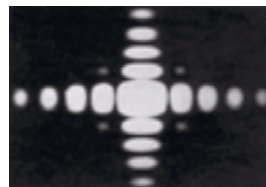


Figure 3 - Diffraction par une ouverture rectangulaire

## 4 Filtrage

### 4.1 Dispositifs “en lumière parallèle”

Un objet partiellement transparent (type diapositive) éclairé en lumière parallèle, diffracte la lumière dans différentes directions (définies par  $\frac{X}{f}, \frac{Y}{f}$ ) qui correspondent à des “fréquences spatiales”  $(k_x, k_y)$ .

Si on place une lentille convergente après l'objet diffractant, on aura dans le plan focal de la lentille, la “figure de diffraction” de l'objet, c'est à dire qu'à chaque point de ce plan correspond une fréquence donnée  $(X, Y) \longleftrightarrow (k_x, k_y)$ . On peut sélectionner certaines de ces fréquences avec un filtre placé dans le plan de la figure de diffraction. L'image de l'objet sera modifiée après un tel “filtrage”. On considère le montage suivant :

a) du point de vue “diffraction”

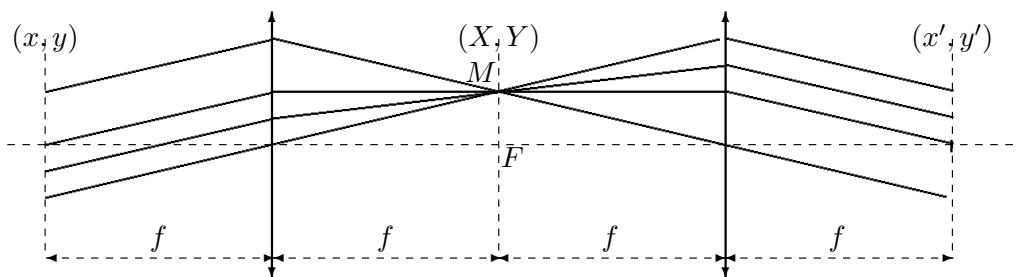


Figure 4 - Lumière diffractée

b) du point de vue “optique géométrique”

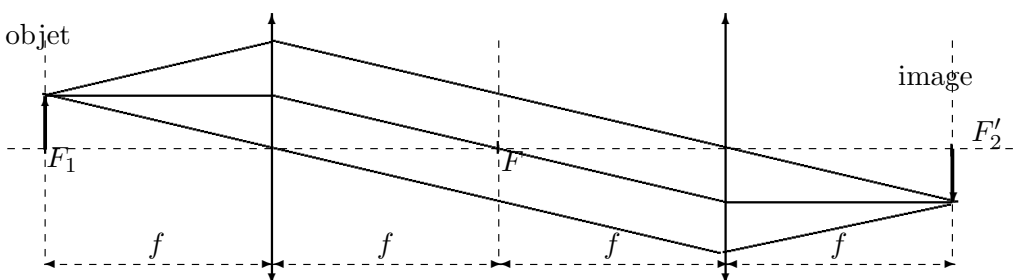


Figure 5 - Construction de l'image

On a vu que la première lentille “produisait” la TF en  $F$  :

$$E(k_x, k_y) \propto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \int t(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy = \mathcal{F}[t]$$

On notera que la seconde lentille “agit” de même sur la figure de diffraction éventuellement modifiée par le filtre  $F$ .

$$E_2(k_x, k_y) \propto \mathcal{F}[F\mathcal{F}[t]]$$

Dans le cas  $F = 1$  on a  $E_2 \propto \mathcal{F}[\mathcal{F}[t]] = t(-x, -y) = \bar{t}$

On retrouve l’image de l’objet, inversée par le système afocal que constituent les deux lentilles.

Dans le cas  $F \neq 1$  on observera l’image filtrée c’est à dire dans laquelle on a sélectionné certaines fréquences spatiales.

### Exemples

1) Filtre passe-bas : on laisse passer les fréquences “centrales” :

$$E_2 \propto \mathcal{F}[B\mathcal{F}[t]]$$

où  $B = ab \operatorname{rect}(x/a) \operatorname{rect}(y/b)$  représente une “porte” rectangulaire en  $x$  et  $y$ .

$$E_2 = \mathcal{F}[B] * \mathcal{F}\mathcal{F}[t] = [(\operatorname{sinc}(\pi a X/\lambda) \operatorname{sinc}(\pi b Y/\lambda))] * t(-x, -y)$$

où la convolution s’entend à deux dimensions.

2) Filtre passe-haut : on occulte le centre de la figure de diffraction : H=1-P

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[H\mathcal{F}[t]] &= \mathcal{F}[(1 - B)\mathcal{F}[t]] = \mathcal{F}[1] * \mathcal{F}\mathcal{F}[t] - \mathcal{F}[B] * \mathcal{F}\mathcal{F}[t] \\ \mathcal{F}[H\mathcal{F}[t]] &= \delta * \bar{t} - \mathcal{F}[B] * \bar{t} \end{aligned}$$

Expression complémentaire de celle obtenue avec un passe bas, qui ne donne de lumière que sur les contours puisque les deux termes se compensent sur les aplats.

3) Tramage/ détramage

Certains travaux d’impression nécessitent un tramage de l’image qui transforme les aplats en traits (ou points) plus ou moins serrés. Lorsqu’on souhaite “retrouver” l’image initiale il faut lisser ces points afin de rétablir une continuité, on perd néanmoins les détails des contours qui sont de la dimension des points.

4) Recherche d’information

On réalise un filtre “signature” (de Fourier) de l’information recherchée, par exemple un caractère dans un texte, en enregistrant sa figure de diffraction. Soit  $t_o$  la transmittance du caractère et  $\mathcal{F}[t_o]$  le filtre correspondant. Dans le texte si le caractère est décalé en  $x$ , on aura  $t_c(x) = t_o(x + u)$  et dans le plan de diffraction :

$$E_c \propto \mathcal{F}[t_c] = e^{-ik_x u} \mathcal{F}[t_o]$$

Si on procède en noir et blanc  $(\mathcal{F}[t_o])^2 = \mathcal{F}[t_o]$ , et dans le plan de l’image :

$$E_2 = \mathcal{F}[e^{-ik_x u} \mathcal{F}[t_o]] = \mathcal{F}[e^{-ik_x u}] * \mathcal{F}\mathcal{F}[t_o] = \delta(x - u) * t_o(-x, -y)$$

Le caractère sera seul (nettement) visible sur l’image, à l’endroit où il se trouve dans le texte ; l’intensité reçue dépend du nombre d’occurrences du caractère.

### Remarques

1) Avec l’essor du numérique, tramage et filtrage sont aussi devenus numériques, mais nombre de procédés restent basés sur la transformation de Fourier.

2) Les conditions d’observation peuvent être différentes de celles décrites jusqu’ici, l’essentiel est de concilier la condition de Fraunhofer avec un montage “imageur”.

## 4.2 Dispositif en “lumière convergente”

On considère un objet diffractant éclairé dans les conditions du 4.1.2 (Chap. VI - Diffraction), avec lesquelles  $S$  et  $M$  sont dans le même plan. Comme précédemment on place un filtre  $F$  dans ce plan ainsi qu’une lentille convergente  $L_2$  et on observe dans le plan  $P'$  conjugué de  $P$  par cette dernière lentille  $L_2$ . Le schéma ci-dessous a été réalisé avec  $\overline{PF} = \overline{FP'} = 2f_2$  qui donne un grandissement  $\gamma = -1$ .

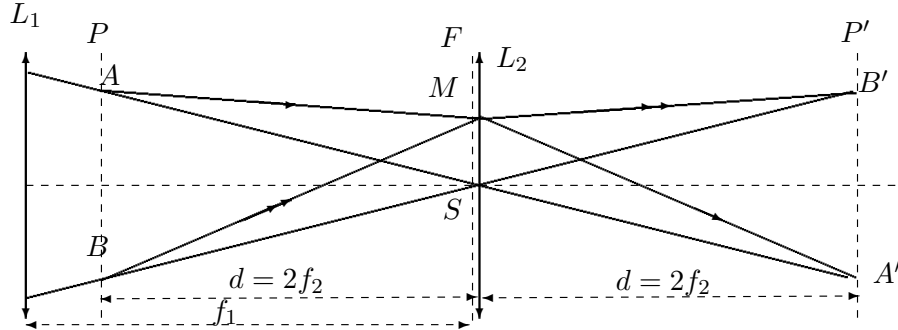


Figure 6 - Filtrage en lumière convergente

Le même formalisme que celui développé au paragraphe précédent, lié au filtrage dans le plan de Fourier, s’applique dans cette géométrie. Il est possible de modifier le montage afin d’obtenir un grandissement différent, ce qui compte c’est de travailler entre points conjugués et de vérifier la condition de Fraunhofer.

## 4.3 Lentille convergente et filtrage de Fourier

On considère un objectif de microscope de focale  $f$ , pour lequel l’image intermédiaire se forme à une “bonne distance”  $L$  du foyer image.

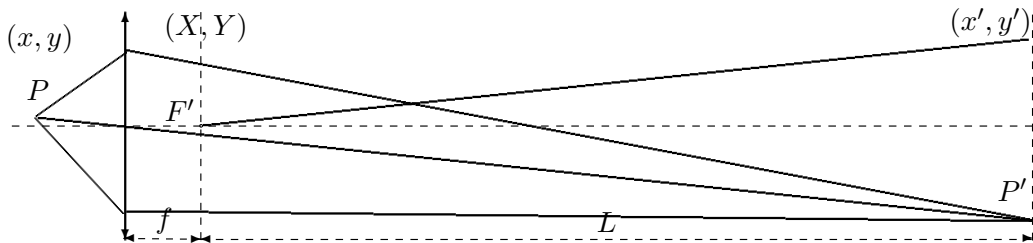


Figure 7 - Microscope et filtrage

Dans le plan focal image de l’objectif, l’amplitude s’écrit :

$$E(X, Y) \propto \iint t(x, y) e^{-i\frac{k}{f}(Xx+Yy)} dx dy$$

Si on considère le plan de formation de l’image assez éloigné du foyer et qu’on s’intéresse à la lumière qui y est diffractée dans l’approximation de Fraunhofer, l’amplitude dans le plan image  $(x', y')$  s’écrit :

$$E(x', y') \propto \iiint \iint t(x, y) e^{-i\frac{k}{f}(Xx+Yy)} e^{-i\frac{k}{L}(x'X+y'Y)} dx dy dX dY$$

soit encore

$$= \iiint \iint t(x, y) e^{-i\frac{kX}{f}(x+\frac{f}{L}x')} e^{-i\frac{kY}{f}(y+\frac{f}{L}y')} dx dy dX dY$$

que l’intégration en  $x, y$  transforme en :

$$E(x', y') \propto \iint \mathcal{F}[t] e^{-i\frac{k}{f}(X\frac{f}{L}x'+Y\frac{f}{L}y')} dX dY$$

finalement

$$E(x', y') \propto t\left(-\frac{f}{L}x', -\frac{f}{L}y'\right)$$

qui signifie que l'amplitude observable en  $P'$  est semblable à celle de  $P$ , au grandissement  $\gamma = -\frac{L}{f}$  près.

Le plan focal de l'objectif permet un filtrage de Fourier pour autant que la condition de Fraunhofer soit justifiée.

#### 4.4 Microscope à contraste de phase

On considère un objet de phase dont la transmittance s'écrit :

$$t(x, y) = e^{i\phi(x, y)}$$

On sépare l'intégrale représentant l'amplitude dans le plan focal en deux parties :

$$E_o = C \int \int e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

et

$$E_1 = C \int \int [t(x, y) - 1] e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

$E_o$  représente l'amplitude observable dans le plan focal lorsqu'aucun objet n'est présent, tandis que  $E_1$  représente les effets de la diffraction produite par l'objet de phase.

La lumière directe se concentre au centre dans une petite région autour de l'axe, très peu de la lumière diffractée par un objet atteint cette région. On place dans une petite zone autour du foyer principal, une lame quart d'onde dont la transmission s'écrit :

$$t_l = ae^{i\frac{\pi}{2}} = ia$$

avec  $a < 1$  pour tenir compte de l'absorption. La lumière émergente après traversée de la lame sera

$$E_f = t_l E_o + E_1 = t_l \delta_o + \mathcal{F}[t(x, y)] - \delta_o$$

Dans le plan conjugué  $(x', y')$  on obtient par  $\mathcal{FF}$  :

$$E'_o(x', y') = Ct_l \quad \text{et} \quad E'_1 = C\left[t\left(\frac{x'}{\gamma}, \frac{y'}{\gamma}\right) - 1\right]$$

$$E' = E'_o + E'_1 \quad \text{et} \quad I' \propto |E'|^2 = C^2 \left| ia + t\left(\frac{x'}{\gamma}, \frac{y'}{\gamma}\right) - 1 \right|^2$$

or

$$t\left(\frac{x'}{\gamma}, \frac{y'}{\gamma}\right) = t(x, y) = e^{i\phi(x, y)}$$

et  $I' = C^2 |ia + i \sin \phi + \cos \phi - 1|^2$

si  $\phi \ll \pi$  alors  $\cos \phi \simeq 1$  et  $I' \simeq a^2 + 2a\phi$ . Si  $a = 1$ ,  $I' = 1 + 2\phi$  contient un terme proportionnel à  $\phi$ .

Si  $a < 1$  (lame absorbante) le contraste  $\mathcal{C} \simeq \frac{2\phi}{a}$  augmente lorsque  $a$  diminue.

Par exemple une lame qui laisse passer  $\frac{1}{9}$  de l'intensité multiplie le contraste par 3.

Dans les réalisations commerciales on préfère un éclairage "annulaire" plutôt que ponctuel et central, c'est possible en donnant à la lame quart d'onde placée dans le plan focal de l'objectif, une forme homothétique de celle de la source.

- - -