



HAL
open science

Optique Ondulatoire : Chapitre VI - Diffraction

Gérard Rebmann

► **To cite this version:**

| Gérard Rebmann. Optique Ondulatoire : Chapitre VI - Diffraction. Licence / L3. 2007. sfo-00292569

HAL Id: sfo-00292569

<https://hal-sfo.ccsd.cnrs.fr/sfo-00292569>

Submitted on 1 Jul 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Chapitre VI

Diffraction

NOTES

1 Introduction

Les solutions de l'équation d'onde de type ondes planes ou ondes sphériques sont des solutions qui occupent tout l'espace. Qu'advient-il lorsqu'on limite le champ de l'onde par une ouverture placée devant une source : quelle lumière ? Quelle ombre ? Quelle description en donner ?

Les faisceaux gaussiens qui permettent une certaine limitation latérale montrent néanmoins une divergence angulaire en λ/w_o .

Il existe des approches "rigoureuses" c'est à dire vectorielles de la diffraction, recherches de solutions pour les champs \vec{E} et \vec{B} des équations de propagation avec les conditions aux limites dépendant des matériaux utilisés. Notre propos est différent, on se préoccupe ici de résoudre l'équation d'onde dans une approximation scalaire de l'optique, elle sera néanmoins tout à fait valable dans la limite où on s'intéresse à des régions qui sont toujours situées à des distances suffisamment grandes devant la longueur d'onde.

Si on compare l'équation d'onde sur une corde à l'équation de d'ALEMBERT :

Problème à 1 dimension

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

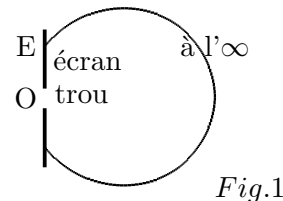
C.L. $u(0, t) = 0$
 $u(l, t) = 0$

C.I. $u(x, 0) = f_o(x)$
 $\frac{\partial u}{\partial t} |_{t=0} = f_1(x)$

Problème à 3 dimensions

$$\Delta u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

C.L. $u(\vec{r}_i, t)$ sur :



C.I. $u(\vec{r}, 0) = f_o(\vec{r})$
 $\frac{\partial u}{\partial t} |_{t=0} = f_1(\vec{r})$

Pour résoudre l'équation aux dérivées partielles il faut des conditions aux limites et des conditions initiales. Le passage de 1D à 3D complexifie considérablement le problème.

2 Résolution de l'équation d'onde pour la diffraction

Au début, la démarche est identique : on recherche des solutions de la forme :

$$u(\vec{r}, t) = f(\vec{r})h(t)$$

Ainsi

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{v^2} \frac{h''}{h} = -k^2$$

en effet si une fonction qui ne dépend que de \vec{r} est égale à une fonction qui ne dépend que de t , elles sont constantes. La constante a été prise négative pour retrouver une dépendance harmonique :

$$h'' = -\omega^2 h \implies h(t) = h_o e^{\pm i\omega t}$$

Il reste à résoudre $\Delta f + k^2 f = 0$ (HELMHOLTZ) avec les conditions aux limites. Une condition initiale qui demanderait de connaître la valeur de la fonction dans tout l'espace

est à peu près irréalisable, on va donc “ruser” avec le théorème de GREEN :

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) d\tau = \oint_{\Sigma} (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) d\sigma$$

où \vec{n} est la normale orientée dans le sens sortant de la surface Σ entourant le volume Ω , $\frac{\partial v}{\partial n} = \vec{\nabla} v \cdot \vec{n}$ et où u et v sont deux fonctions deux fois dérivables telles que les intégrales soient définies.

2.1 Théorème intégral d'HELMHOLTZ-KIRCHHOFF

On suppose que les deux fonctions u et v vérifient l'équation d'HELMHOLTZ, on prend

$$u = \frac{1}{r} e^{ikr}$$

et v la solution cherchée, qu'on ne suppose connue que sur la surface Σ entourant Ω .

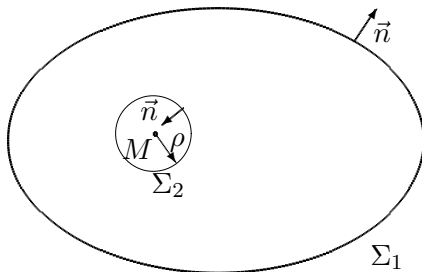


Figure 2 - Géométrie des surfaces Σ

La fonction $u(\vec{r})$, qui représente une onde sphérique vérifie l'équation d'onde (cf. Ch. I). On considère un point M du volume contenu dans Σ_1 . On le prend comme origine des coordonnées. Pour éviter la divergence de u en M , on l'entoure d'une surface sphérique Σ_2 de rayon ρ .

Les équations $\Delta u + k^2 u = 0$ et $\Delta v + k^2 v = 0$ mènent à

$$u\Delta v - v\Delta u = k^2(uv - vu) = 0$$

et l'intégrale de volume est nulle. Exprimons celle de surface (qui est aussi nulle!) :

$$\oint_{\Sigma_1} (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) d\sigma + \oint_{\Sigma_2} (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) d\sigma = 0$$

Sur Σ_2 :

$$I_2 = \oint_{\Sigma_2} [\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial}{\partial n} (\frac{e^{ikr}}{r})] d\sigma$$

or puisque \vec{n} est centripète sur Σ_2 :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = (\vec{n} \cdot \frac{\vec{r}}{r}) \frac{du}{dr} = -\frac{du}{dr}$$

alors

$$I_2 = [\frac{e^{ik\rho}}{\rho} \frac{\partial v}{\partial n} - v(\rho) (\frac{1}{\rho^2} - \frac{ik}{\rho}) e^{ik\rho}] 4\pi\rho^2$$

qui tend vers $-4\pi v(M)$ lorsque $\rho \rightarrow 0$.

Comme $I_1 + I_2 = 0$ on en déduit l'expression du théorème intégral de HELMHOLTZ-KIRCHHOFF :

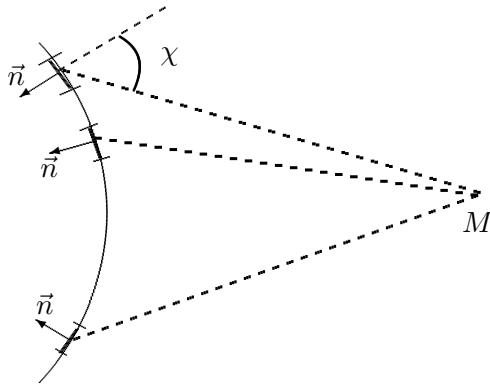
$$v(M) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma_1} [\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial}{\partial n} (\frac{e^{ikr}}{r})] d\sigma$$

Expression qui donne $v(M)$ lorsqu'on connaît v et $\frac{\partial v}{\partial n}$ sur une surface entourant le point M : on est passé d'un problème différentiel à sa solution intégrale.

2.2 Principe d'HUYGENS-FRESNEL

On connaît déjà la construction d'HUYGENS, avec les ondelettes issues des différents points d'un front d'onde, FRESNEL a ajouté que ces ondelettes étaient susceptibles d'interférer entre elles.

Considérons une surface d'onde comme surface Σ_1 du th. d'H-K précédent :



$$v(M) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \left[\frac{\partial v}{\partial n} - v \left(ik - \frac{1}{r} \right) \right] \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma$$

$$v(M) = \oint_{\Sigma} A(\vec{r}) \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma$$

$$v(M) = \oint_{\Sigma_1} A(r) K(\chi) \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma + \oint_{\Sigma_2} () d\sigma$$

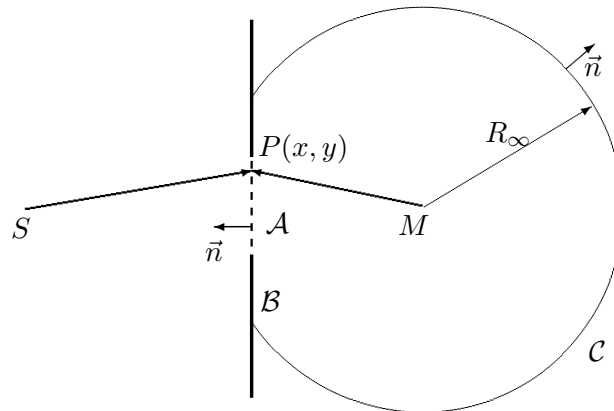
Expression qui montre que l'amplitude en M, est due à la contribution de chaque $d\sigma$ par une onde sphérique avec une amplitude qui dépend de v sur Σ_1 et d'un coefficient lié à l'angle entre la normale et le rayon dirigé vers M.

Figure 3 - HUYGENS - FRESNEL

En outre, il faudra penser à fermer Σ par Σ_2 à l'infini et regarder avec attention ce qui s'y passe pour pouvoir le négliger.

2.3 Formule de FRESNEL - KIRCHHOFF

On applique les résultats précédents à une situation de diffraction :



\mathcal{A} : ouverture diffractante

\mathcal{B} : écran

\mathcal{C} : contour à "l'infini"

Figure 4 - Géométrie de diffraction - contour d'intégration

On applique le théorème H-K sur la surface $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\}$:

$$v(M) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int \int_{\mathcal{A}} + \int \int_{\mathcal{B}} + \int \int_{\mathcal{C}} \right\} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] d\sigma$$

On fait les hypothèses suivantes :

- 1) sur l'écran :

$$v_{\mathcal{B}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\mathcal{B}} = 0$$

- 2) et dans l'ouverture :

$$v_{\mathcal{A}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\mathcal{A}}$$

sont supposés identiques à ce qu'ils seraient en l'absence de l'écran (c'est faux dans l'absolu, mais reste néanmoins une bonne approximation pour des distances s et r grandes devant λ).

Comme \mathcal{B} a une étendue finie, $\int \int_{\mathcal{B}} = 0$. On éclaire le trou \mathcal{A} par une onde sphérique issue de S . Sur \mathcal{A} :

$$v = A \frac{e^{iks}}{s} e^{-i\omega t}$$

Ainsi :

$$v(M) = \frac{Ae^{-i\omega t}}{4\pi} \int \int_{\mathcal{A}} \left\{ \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{iks}}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} d\sigma$$

Afin de tenir compte de l'orientation de la normale, on écrit :

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{iks}}{s} = \vec{n} \cdot \nabla_s \left(\frac{e^{iks}}{s} \right) = \cos(\vec{n}, \vec{s}) \left[ik - \frac{1}{s} \right] \frac{e^{iks}}{s}$$

avec une expression semblable en \vec{r} . Si $\lambda \ll r, s$ alors on peut négliger $\frac{1}{r}, \frac{1}{s} \ll \frac{1}{\lambda}$ d'où la formule de FRESNEL-KIRCHHOFF :

$$v(M) = -\frac{ikAe^{-i\omega t}}{4\pi} \int \int_{\mathcal{A}} \frac{e^{ik(r+s)}}{rs} [\cos(\vec{n}, \vec{r}) - \cos(\vec{n}, \vec{s})] d\sigma$$

Remarques

1) Si les dimensions de \mathcal{A} sont faibles devant la distance \vec{r} , $\cos(\vec{n}, \vec{r}) \simeq 1$ tandis que $\cos(\vec{n}, \vec{s}) \simeq -1$ pour $s \gg \rho$, alors

$$v(M) \simeq -\frac{ikAe^{-i\omega t}}{2\pi} \int \int_{\mathcal{A}} \frac{e^{ik(r+s)}}{rs} d\sigma = \frac{Ae^{-i\omega t}}{i\lambda} \int \int_{\mathcal{A}} \frac{e^{ik(r+s)}}{rs} d\sigma$$

- 2) Pour un point M situé du côté de S , $[\cos(\vec{n}, \vec{r}) - \cos(\vec{n}, \vec{s})] \simeq 0$ en accord avec la construction d'Huygens qui prévoit une construction seulement vers l'avant du front d'onde.
3) Le coefficient $(-i)$ exprime un déphasage de $\pi/2$ entre l'onde source et l'onde diffractée.

3 Diffraction de FRESNEL et diffraction de FRAUNHOFER

Si on place les points S et M assez loin de l'ouverture diffractante, de sorte que les $\cos(\vec{n}, \vec{r})$ et $\cos(\vec{n}, \vec{s})$ soient constants ainsi que r et s , soit $P(x, y)$ un point de l'ouverture, alors l'amplitude diffractée en M s'écrit :

$$E(M) = \frac{e^{-i\omega t}}{i\lambda rs} \int \int_{\mathcal{A}} A(P) e^{ik(r+s)} d\sigma$$

Soit encore :

$$E(M) = \frac{V_o}{\lambda} \int \int_{\mathcal{A}} A(P) e^{i\varphi(P)} d\sigma$$

où $\varphi(P) = \frac{2\pi}{\lambda}(r+s)$. Pour un point S sur l'axe, si $P(x, y)$ et $M(X, Y)$, alors $s^2 = x^2 + y^2 + l^2$ et $r^2 = (x-X)^2 + (y-Y)^2 + D^2$ d'où

$$\begin{aligned} \varphi &= k(\sqrt{D^2 + (x-X)^2 + (y-Y)^2} + \sqrt{l^2 + x^2 + y^2}) \\ \varphi &= k(D\sqrt{1 + \frac{(x-X)^2}{D^2} + \frac{(y-Y)^2}{D^2}} + l\sqrt{1 + \frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{l^2}}) \end{aligned}$$

Qui peut s'approcher par un développement limité aux premiers termes en x^2 et y^2 , par :

$$\varphi \simeq k[D(1 + \frac{(x-X)^2}{2D^2} + \frac{(y-Y)^2}{2D^2}) + l(1 + \frac{x^2}{2l^2} + \frac{y^2}{2l^2})]$$

Si on peut négliger les termes en $\frac{X^2}{D^2}$, considérés comme négligeables devant ceux en $\frac{X}{D}$, l'expression se simplifie :

$$\varphi = \varphi_o(M) - k \frac{xX + yY}{D} + k \frac{x^2 + y^2}{2L}$$

où on a regroupé les termes indépendants de x, y dans $\varphi_o(M)$ et où on a posé :

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{D} + \frac{1}{l}$$

On nomme traditionnellement le terme linéaire en x, y , terme de FRAUNHOFER et le terme suivant, terme de FRESNEL.

3.1 Condition de FRAUNHOFER

Pour pouvoir se limiter au premier terme dépendant de (x, y) il faut que

$$\frac{\rho^2}{\lambda L} \ll \frac{\rho}{\lambda} \tan \theta_M \iff \frac{\rho}{L} \ll \frac{\lambda}{\rho}$$

car on verra plus tard que l'intensité de la lumière diffractée n'est significative que dans une région où $\theta = \sqrt{X^2 + Y^2}/D$ est de l'ordre de λ/ρ .

En admettant ce résultat (qui sera établi à la fin du chapitre), on trouve que la condition pour valablement négliger le terme de FRESNEL, c'est à dire la condition de FRAUNHOFER s'écrit :

$$(x^2 + y^2)_{Max} \ll \lambda L$$

Il faut aussi que les conditions qui ont permis d'établir ces expressions soient vérifiées ($l, D \gg x, y$). Toutes ces conditions sont remplies lorsque S et M sont à l'infini (chacun de son côté).

• Si la condition de FRAUNHOFER est remplie, on peut négliger le terme de FRESNEL et :

$$E(M) = \frac{V_o}{\lambda} \int \int_{\text{ouverture}} A(P) e^{-i(k_X x + k_Y y)} d\sigma$$

où on a posé

$$k_X = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X}{D} \quad \text{et} \quad k_Y = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{Y}{D}$$

composantes de \vec{k} dans la direction $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$.

On peut ainsi récrire ce résultat en terme de transformation de FOURIER à deux dimensions de la transmittance de l'ouverture $A(P)$ sur les coordonnées de $P(x, y)$ et de \vec{k} , soit :

$$E(k_X, k_Y) \propto \mathcal{F}[A(x, y)]$$

$A(x, y)$ peut éventuellement être complexe afin de tenir compte de déphasage dans l'ouverture (par ex. objet de phase). La diffraction de FRAUNHOFER et cet aspect "transformation de FOURIER" sera développé ultérieurement.

• Si la condition de FRAUNHOFER n'est pas remplie, il faut regarder les termes suivants, on parle alors de diffraction de FRESNEL. C'est notamment le cas sur l'axe puisqu'alors $X/D = Y/D = 0$

3.2 Zones de FRESNEL et points de POISSON

On a vu que, dans la formule de F-K, le terme de déphasage est en $r + s$. Si on découpe le plan diffractant en zones circulaires telles qu'on change de zone lorsque $r + s$ augmente de $\lambda/2$:

$$r + s = \sqrt{D^2 + \rho^2} + \sqrt{l^2 + \rho^2} \simeq D(1 + \frac{\rho^2}{2D^2}) + l(1 + \frac{\rho^2}{2l^2})$$

$$r + s = D + l + \frac{\rho^2}{2}(\frac{1}{D} + \frac{1}{l}) = Z + \frac{\rho^2}{2L}$$

où $Z = D + l$ et $\frac{1}{L} = \frac{1}{D} + \frac{1}{l}$, alors si

$$r + s - Z = m \frac{\lambda}{2}, \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\frac{\rho^2}{2L} = m \frac{\lambda}{2}$$

d'où on tire le rayon des cercles limitant les zones :

$$\rho_m = \sqrt{m\lambda L}$$

Une zone qui s'étend entre ρ_{m-1} et ρ_m a pour aire :

$$A_m = \pi(\rho_m^2 - \rho_{m-1}^2) = \pi\lambda L(m - (m-1)) = \pi\lambda L$$

Toutes les zones ont la même aire, elles contribueront également à l'amplitude en M , mais le terme de déphasage apporte un signe qui alterne d'une zone à la suivante.

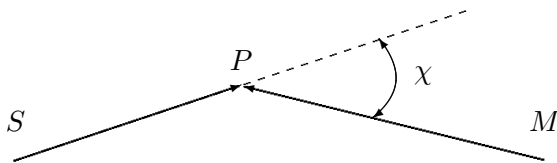


Figure 5 - Influence de l'inclinaison

De plus, lorsque m augmente, les amplitudes diminuent en module du fait du terme

$$K(\chi) = \cos(\vec{n}, \vec{r}) - \cos(\vec{n}, \vec{s})$$

lié à l'inclinaison des rayons sur l'axe.

Afin d'obtenir l'amplitude en M en l'absence d'écran, il faut sommer sur toutes les zones :

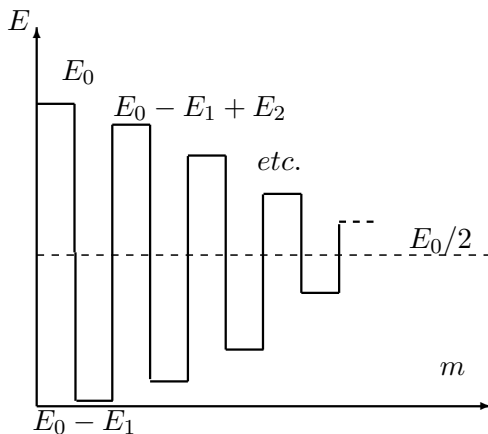


Figure 6 - Contributions des différentes zones

Comme le module des amplitudes E_m diminue lorsque m augmente

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m E_m = \frac{E_0}{2}$$

Il en résulte les paradoxes suivants :

- 1) Un diaphragme qui laisse seulement passer la première zone permet d'avoir $E_o = 2E_T$ soit le double de ce qu'on obtiendrait sans diaphragme!
- 2) Un diaphragme qui laisse passer les deux premières zones (soit une aire double de la précédente) produit un point pratiquement obscur!
- 3) Si on place un disque qui occulte les zones 1 à m_l , on somme à partir de $m_l + 1$ et on obtient $\frac{1}{2}E_{m_l+1}$ en M soit de la lumière au centre de l'ombre géométrique!
O.G. : $L = 1m$, $\lambda = 0.633\mu m$ donne $\rho_1 = 0.77mm$
- 4) Si on construit un réseau (de SOROT) qui laisse passer une zone sur deux, on obtient une amplitude beaucoup plus grande que celle de $E_T = E_o/2$ qui est obtenue sans écran! Un type de réseau donne la même intensité que son complémentaire :

$$E_o + E_2 + E_4 + \dots + E_{2n} + \dots \simeq E_1 + E_3 + E_5 + \dots + E_{2n+1} + \dots$$

Un faisceau de lumière parallèle qui arrive sur ce réseau converge en L tel que $\frac{1}{L} = \frac{1}{D} + \frac{1}{l}$
Un tel réseau est évidemment très "chromatique" (dépendance en λ) puisque pour ρ donné, $L = \frac{\rho_o^2}{\lambda}$.

{5} Polémique sur la nature ondulatoire de la lumière (1818-1824)

Plusieurs de ces paradoxes furent utilisés par POISSON pour réfuter la thèse présentée par FRESNEL sur la nature ondulatoire de la lumière, arguant qu'on n'observe pas de lumière au centre de l'ombre géométrique. Hélas pour POISSON, ARAGO confirma les prévisions de FRESNEL par l'expérience et on nomma (par dérision?) "Points de Poisson" les points lumineux ainsi observables, après tout c'est bien lui qui en prédit l'existence!

3.3 Principe de BABINET

On considère deux écrans "complémentaires", *i.e.* tel que l'ouverture de l'un (E_1) correspond à la partie obscure de l'autre (E_2). Si l'amplitude en l'absence d'écran est E_T , la formule de FRESNEL-KIRCHHOFF conduit, de part sa linéarité, à :

$$E_1(M) + E_2(M) = E_T(M)$$

Dans toutes les régions où $E_T(M)$ est négligeable devant E_1 ou E_2 , on peut écrire :

$$E_1(M) \simeq -E_2(M)$$

de sorte que l'intensité observée sera la même.

C'est notamment le cas pour les réseaux de SOROT et pour la diffraction de FRAUNHOFER en dehors de la direction de l'optique géométrique.

3.4 Diffraction de FRESNEL

Lorsque le terme de FRESNEL est prépondérant :

$$E(M) = \frac{V_o}{\lambda} \iint_{\text{ouverture}} A(x, y) e^{ik\frac{(x^2+y^2)}{2L}} dx dy$$

Pour une ouverture rectangulaire l'intégrale se "sépare" :

$$E(M) = \frac{V_o}{\lambda} \int_{x_1}^{x_2} e^{ik\frac{x^2}{2L}} dx \int_{y_1}^{y_2} e^{ik\frac{y^2}{2L}} dy$$

on pose

$$u = x\sqrt{\frac{k}{\pi L}} = x\sqrt{\frac{2}{\lambda L}} \quad \text{et} \quad v = y\sqrt{\frac{k}{\pi L}} = y\sqrt{\frac{2}{\lambda L}}$$

alors

$$E(M) = \frac{V_o}{\lambda} \int_{u_1}^{u_2} e^{i\pi \frac{u^2}{2}} du \int_{v_1}^{v_2} e^{i\pi \frac{v^2}{2}} dv$$

On introduit alors les intégrales de FRESNEL :

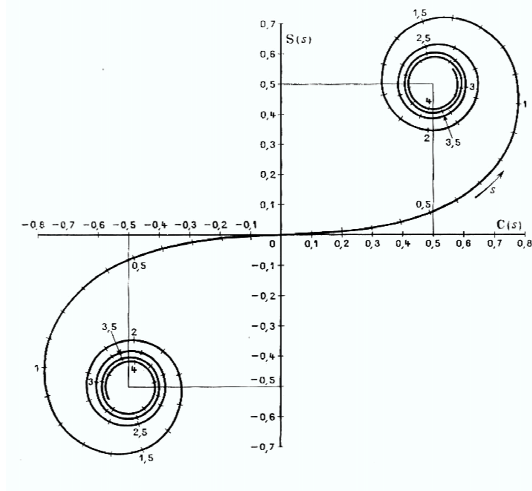
$$F(s) = \int_0^s e^{i\pi \frac{u^2}{2}} du = C(s) + iS(s)$$

où

$$C(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \quad \text{et} \quad S(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du$$

Spirale de CORNU

On représente les fonctions $S(s)$ et $C(s)$ par une courbe paramétrique $S(C)$



Alors le module de l'intégrale

$$\left| \int_{s_1}^{s_2} e^{i\pi u^2/2} du \right| = |C(s_2) - C(s_1) + iS(s_2) - iS(s_1)|$$

est représenté par la longueur du segment qui joint les points associés à s_1 et s_2 .

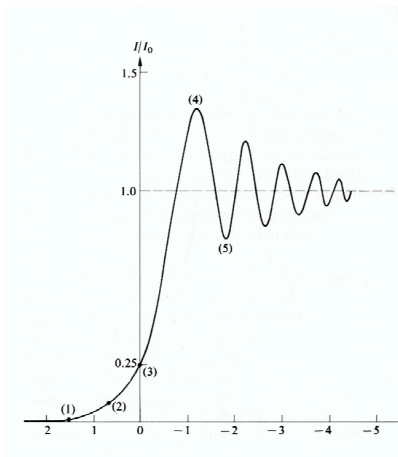
$$\text{Alors } |dC|^2 + |dS|^2 = ds^2$$

Figure 7 - Spirale de CORNU

Application à un bord d'écran

Si on s'intéresse à l'amplitude observable dans la région du bord d'un écran, considéré indéfini dans les autres directions, l'intégrale s'écrit :

$$E(M) = A \int_{-\infty}^b e^{i \frac{kx^2}{2L}} dx$$



Si les points S (source) et M (observation) sont fixes et qu'on déplace l'écran, on fait varier la limite d'intégration b et on obtient l'intensité ci-contre.

- 1) il y a de la lumière dans la zone d'ombre géométrique ;
- 2) il y a des franges dans la zone éclairée ;
- 3) la dimension caractéristique en x est $\sqrt{\frac{\lambda L}{2}}$ (cf. changement de variable).

O.G. : $\sqrt{0.633 \times 10^{-6} \times 0.5} = 0.56 \text{ mm}$ pour $L = 1 \text{ m}$.

Figure 8 - Bord d'écran

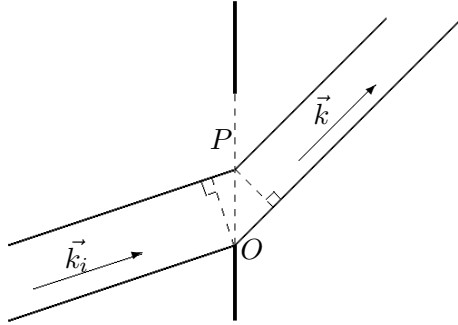
4 Diffraction de FRAUNHOFER

Afin que la condition de FRAUNHOFER soit remplie, on éloigne la source et le plan d'observation de la surface diffractante en les rejetant à l'infini. Cela peut se faire en plaçant la surface diffractante entre lentilles convergentes.

4.1 Conditions d'observation

4.1.1 Éclairage en lumière parallèle et observation à l'infini

Une onde incidente plane de vecteur d'onde \vec{k}_i arrive sur l'ouverture diffractante Σ , on cherche l'amplitude dans une direction donnée \vec{k} (M à l'infini).



Le déphasage est le même que dans le cas des réseaux :

$$\varphi(P) = \varphi(O) - k \overline{OP} (\sin \theta - \sin \theta_i)$$

$$\varphi(P) = \varphi(O) - (\vec{k} - \vec{k}_i) \cdot \overline{OP}$$

Figure 9 - Diffraction en lumière parallèle

Ainsi l'amplitude diffractée en M s'écrit :

$$E(M) = A e^{-i\omega t} e^{i\varphi(O)} K(\chi) \int \int_{\Sigma} t(P) e^{-i(\vec{k} - \vec{k}_i) \cdot \overline{OP}} d\sigma_P$$

soit encore :

$$E(M) = E_o e^{-i\omega t} \int \int_{\Sigma} t(P) e^{-i\vec{K} \cdot \overline{OP}} d\sigma_P$$

où $\vec{K} = \vec{k} - \vec{k}_i$, ainsi $K_x = k_x - k_{ix}$ et $K_y = k_y - k_{iy}$.

Dans le plan de P , (x, y) :

$$E(K_x, K_y) = E_o e^{-i\omega t} \int \int_{\Sigma} t(x, y) e^{-i(K_x x + K_y y)} dx dy$$

L'amplitude diffractée est proportionnelle à la transformée de FOURIER de la transmittance de l'ouverture $t(x, y)$.

Remarques

- En prenant comme origine des coordonnées du plan d'observation, le point O' où convergeraient les rayons en l'absence de l'objet diffractant :

$$K_x = \frac{2\pi X}{\lambda f} \quad \text{et} \quad K_y = \frac{2\pi Y}{\lambda f}$$

Ce plan est aussi le plan focal de la lentille convergente (distance focale f).

- Si $\vec{k}_i \perp \overline{OP}$, alors $\vec{K} \cdot \overline{OP} = \vec{k} \cdot \overline{OP}$.

4.1.2 Éclairage en lumière convergente - S et M dans le même plan

Si on envoie une onde sphérique convergente sur l'ouverture diffractante, alors on peut reprendre la formule de FRESNEL-KIRCHHOFF en plaçant S du côté de M , dans le même plan d'observation. Ainsi $r = \overline{MP}$ et $s = \overline{SP}$ où P est le point courant du plan (x, y) de l'ouverture.

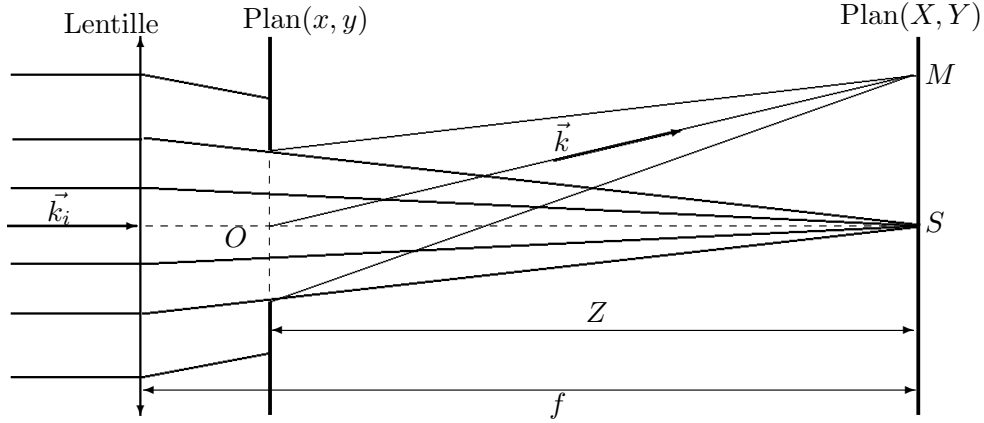


Figure 10 - Géométrie en lumière convergente

L'onde "rentrante" vers S s'écrit :

$$\frac{e^{-i(ks+\omega t)}}{s}$$

Il suffit de prendre pour déphasage $r - s$ au lieu $r + s$, les normales et directions d'ondes n'ont toutefois pas changé mais le $\cos(\vec{n}, \vec{s})$ est maintenant affecté du + en raison du changement de l'onde de iks en $-iks$.

$$E(M) = -\frac{ik e^{-i\omega t}}{4\pi} \int \int_{\Sigma} A(P) \frac{e^{ik(r-s)}}{rs} [\cos(\vec{n}, \vec{r}) + \cos(\vec{n}, \vec{s})] d\sigma$$

Soit encore, avec $[\cos(\vec{n}, \vec{r}) + \cos(\vec{n}, \vec{s})] \simeq 2$:

$$E(M) = \frac{e^{-i\omega t}}{i\lambda Z^2} \int \int_{\Sigma} A(P) e^{ik(r-s)} d\sigma$$

où on a pris $r \simeq s \simeq Z$ constante, abscisse du plan d'observation. Il suffit comme d'habitude de faire un développement limité pour la phase :

$$r - s = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + Z^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + Z^2} \simeq Z + \frac{(X-x)^2 + (Y-y)^2}{2Z} - Z - \frac{x^2 + y^2}{2Z}$$

qui devient :

$$r - s \simeq \frac{X^2 + Y^2}{2Z} - \frac{xX + yY}{Z}$$

Le terme de FRESNEL est éliminé (au premier ordre en ρ^2) et l'expression suivante de $E(M)$ est **valable même dans la direction de l'optique géométrique** :

$$E(K_x, K_y) = \frac{e^{-i\omega t} e^{ik \frac{X^2 + Y^2}{2Z}}}{i\lambda Z^2} \int \int_{\Sigma} t(x, y) e^{-i(K_x x + K_y y)} dx dy$$

4.2 Exemples de diffraction de FRAUNHOFER

4.2.1 Diffraction par une lentille convergente

L'expression précédente représente l'amplitude diffractée par une lentille convergente si on fait $Z = f$ où f est la focale de la lentille :

$$E(K_x, K_y) = \frac{e^{-i\omega t} e^{ik \frac{X^2+Y^2}{2f}}}{i\lambda f^2} \iint 1 e^{-i(K_x x + K_y y)} dx dy$$

Cette expression doit être identique à celle qu'on obtiendrait en éclairant en lumière parallèle une lentille convergente de transmittance $t(x, y)$ et en regardant à distance finie. En reprenant la formule de F-K adaptée à ce cas : S à l'infini incite à remplacer l'onde sphérique par une onde plane :

$$E_o e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{s}}$$

qui est indépendant de P si k_i est suivant l'axe optique.

$$E(M) = -\frac{E_o e^{-i\omega t}}{4\pi} i k e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{s}} \iint t(x, y) \frac{e^{ikr}}{r} K(\chi) d\sigma \simeq \frac{E_o e^{-i\omega t} e^{i\varphi_o}}{i\lambda f} \iint t(x, y) e^{ikr} dx dy$$

avec $r^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + f^2$ qui donne par un développement limité :

$$r \simeq f + \frac{X^2 + Y^2}{2f} + \frac{x^2 + y^2}{2f} - \frac{xX + yY}{f}$$

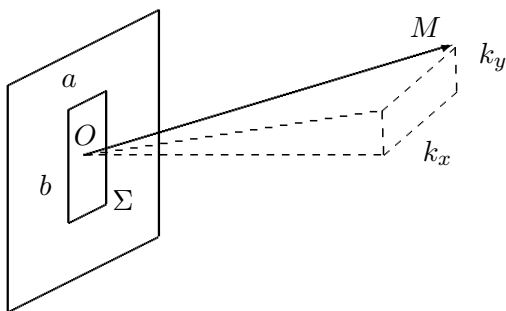
de sorte qu'en identifiant les deux expressions équivalentes : un trou en lumière convergente et une lentille en lumière parallèle, on obtient la transmittance d'une lentille convergente de focale f :

$$t = [t_o e^{-i\varphi_o}] \frac{e^{-ik(f + \frac{x^2+y^2}{2f})}}{f}$$

qui correspond bien au déphasage introduit par la lentille pour passer d'une onde plane à une onde sphérique rentrante.

4.2.2 Diffraction par une ouverture rectangulaire

On considère une ouverture rectangulaire de transmittance :



$$t = 1 \text{ si } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \text{ et } -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$$

et $t = 0$ sinon.

Figure 11 - Ouverture rectangulaire

$$E(k_x, k_y) \propto \iint_{\Sigma} t(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy = \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ik_x x} dx \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik_y y} dy$$

$$E(k_x, k_y) \propto \frac{1}{(-ik_x)} [e^{-ik_x x}]_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{(-ik_y)} [e^{-ik_y y}]_{-b/2}^{b/2} = \frac{4}{k_x k_y} \sin \frac{k_x a}{2} \sin \frac{k_y b}{2}$$

qui peut aussi s'écrire :

$$E(k_x, k_y) \propto ab \frac{\sin(k_x a/2)}{k_x a/2} \frac{\sin(k_y b/2)}{k_y b/2} = ab \operatorname{sinc}\left(\frac{k_x a}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{k_y b}{2}\right)$$

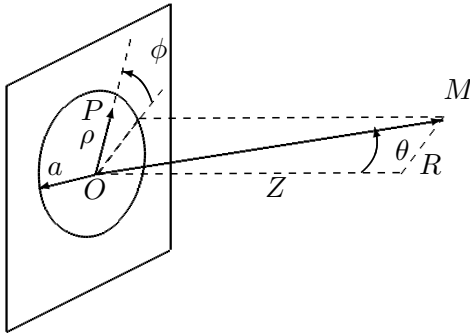
ou encore :

$$E(k_x, k_y) \propto ab \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a X}{\lambda Z}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi b Y}{\lambda Z}\right)$$

Dont les zéros donnent $\frac{\pi a X}{\lambda Z} = \pi$ d'où $\frac{X}{Z} = \frac{\lambda}{a}$ et une largeur à mi-hauteur du même ordre.

4.2.3 Diffraction par une ouverture circulaire

On choisit de paramétrer l'ouverture par des coordonnées polaires (ρ, ϕ) ,



alors le produit scalaire s'écrit :

$$\vec{k} \cdot \vec{OP} = k \sin \theta \rho \cos \phi$$

et l'intégrale pour l'amplitude diffractée dans la direction θ :

$$E(\theta) = \frac{E_o e^{-i\omega t}}{i\lambda} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-ik \sin \theta \rho \cos \phi} \rho d\rho d\phi$$

Figure 12 - Ouverture circulaire

Le calcul sera mené en TD. L'intégrale conduit à des fonctions de Bessel de première espèce, d'ordre 0 et 1 :

$$E(\theta) = \frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta}$$

fonction qui ressemble au sinus cardinal et dont la largeur est donnée par le premier zéro de J_1 à environ 3.83.

soit

$$\frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta_o \simeq 3.83$$

d'où

$$\sin \theta_o = 1.22 \frac{\lambda}{2a}$$

On retrouve la divergence du faisceau de l'ordre de λ/d .

4.3 Transformation de la pupille

On s'intéresse aux changements de la figure de diffraction produits par une modification de la pupille.

4.3.1 Translation de la pupille

La pupille est tradatée d'un vecteur de composantes (u, v) : $x' = x + u$; $y' = y + v$ l'amplitude diffractée s'écrit :

$$E'(k_x, k_y) \propto \int \int_{\Sigma} e^{-i(k_x x' + k_y y')} dx dy = e^{-i(k_x u + k_y v)} \int \int_{\Sigma} e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

$$E'(k_x, k_y) = e^{-i(k_x u + k_y v)} E(k_x, k_y)$$

Une translation de la pupille induit la multiplication par un facteur de phase de l'amplitude diffractée, l'intensité de la figure de diffraction n'est pas modifiée.

4.3.2 Rotation de la pupille

Par un simple changement de coordonnées on déduit que la figure de diffraction tourne avec la pupille, du même angle.

4.3.3 Dilatation, contraction de la pupille

Si l'amplitude diffractée d'une pupille donnée s'écrit :

$$E(k_x, k_y) = \int \int_{\Sigma} t(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

et si on transforme : $x' = \alpha x$ et $y' = \beta y$ alors

$$E_{\alpha\beta}(k_x, k_y) = \int \int_{\Sigma} t(\alpha x, \beta y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy = \frac{1}{\alpha\beta} \int \int_{\Sigma} t(x', y') e^{-i(k_x \frac{x'}{\alpha} + k_y \frac{y'}{\beta})} dx' dy'$$

d'où

$$E_{\alpha\beta}(k_x, k_y) = \frac{1}{\alpha\beta} E\left(\frac{k_x}{\alpha}, \frac{k_y}{\beta}\right)$$

4.3.4 Symétries

Si la pupille possède un centre de symétrie : $t(x, y) = t(-x, -y)$, alors

$$E(-k_x, -k_y) = \int \int t(x, y) e^{+i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

$$E(-k_x, -k_y) = (-1)^2 \int \int t(-x, -y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy = E(k_x, k_y)$$

La figure de diffraction possède aussi un centre de symétrie.

4.4 Association de pupilles

4.4.1 Plusieurs ouvertures identiques

Si les pupilles se déduisent les unes des autres par translation d'un vecteur (u_j, v_j) : on pose :

$$\varphi_j = k_x u_j + k_y v_j$$

et en M l'amplitude totale s'écrit :

$$E_T(k_x, k_y) = \sum_j e^{-i\varphi_j} E(k_x, k_y)$$

Elle conduit à une intensité :

$$I_T = |E_T(k_x, k_y)|^2 = \left| \sum_{j=1}^N e^{-i\varphi_j} \right|^2 |E(k_x, k_y)|^2$$

Qui est le produit d'un terme d'interférences par un terme représentant la figure de diffraction d'une ouverture isolée.

Si la distribution de pupilles est aléatoire, le terme d'interférences s'écrit :

$$\sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N e^{-i[k_x(u_l - u_m) + k_y(v_l - v_m)]}$$

les termes $m = l$ donnent 1 (N fois), tandis que les autres termes ($m \neq l$) se moyennent par le hasard à 0.

$$I_T = N |E(k_x, k_y)|^2$$

Si les pupilles sont distribuées au hasard, l'intensité résulte de la somme des intensités.

4.4.2 Réseaux par transmission

Considérons un réseau à une dimension, de N pupilles rectangulaires, alignées suivant la direction x . Chaque pupille est de largeur a et de hauteur b , leurs axes sont éloignés d'une distance d .

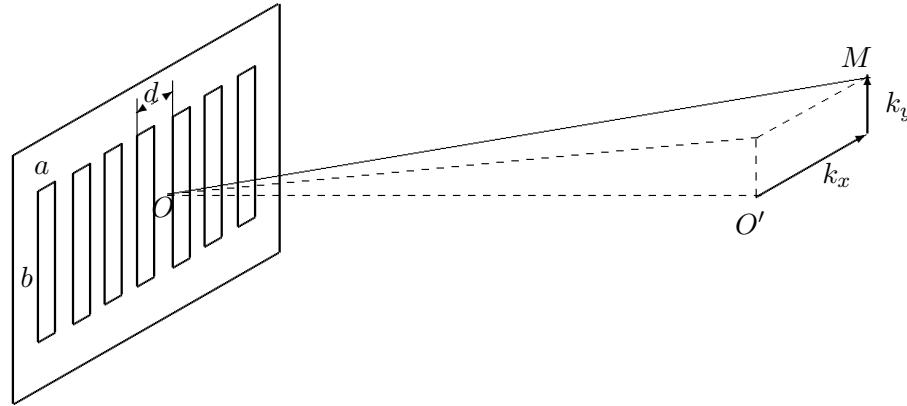


Figure 13 - Réseau par transmission

D'après le calcul précédent, l'intensité diffractée par ce système est donc :

$$I(k_x, k_y) = \left| \frac{\sin(Nk_x d/2)}{\sin(k_x d/2)} \right|^2 \text{sinc}^2\left(\frac{k_x a}{2}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{k_y b}{2}\right)$$

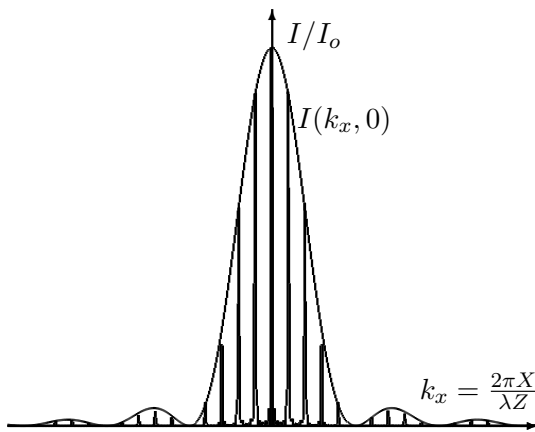


Figure 14 - $I(k_x, 0)$

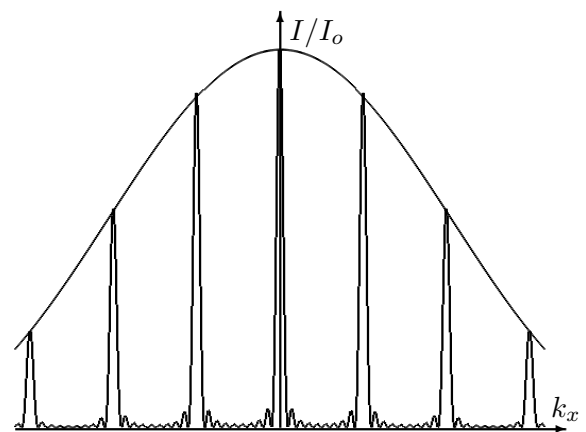


Figure 15 - Pic central de $I(k_x, 0)$

Nous reconnaissons la figure de diffraction d'un rectangle multipliée par la figure d'interférence d'un réseau à N trous où le déphasage ϕ entre deux fentes est simplement ici :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X}{Z} d = k_x d$$

Ce résultat se généralise aux réseaux à deux dimensions. Il y aura alors, dans la tache de diffraction de la pupille, un quadrillage de pics qui correspondra aux pas du réseau dans les différentes directions et qui sera observé en TP.