

# Optique Ondulatoire : Chapitre II - Interférences I

Gérard Rebmann

► **To cite this version:**

Gérard Rebmann. Optique Ondulatoire : Chapitre II - Interférences I. Licence / L3. 2007. <sfo-00287442>

**HAL Id: sfo-00287442**

**<https://hal-sfo.ccsd.cnrs.fr/sfo-00287442>**

Submitted on 12 Jun 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## **Chapitre II**

### ***Interférences I***

*NOTES*

## 1 Introduction

### 1.1 Occurrence

Quel point commun entre une tache d'huile dans un caniveau, une bulle de savon ou les ailes de certains papillons ? Les couleurs : les teintes "interférentielles". Leurs couleurs ne sont pas dues à des pigments qui absorbent les radiations de certaines bandes de longueurs d'onde, elles sont produites par des interférences en lumière blanche : dans les films de faible épaisseur, la lumière réfléchiée par la face arrière "interagit" avec celle qui est réfléchiée par la face avant. Afin de comprendre ce qui se passe il faut décrire l'interaction entre ces deux lumières.

### 1.2 Les champs électriques s'ajoutent

Dans les milieux linéaires, les champs électriques s'ajoutent et plusieurs OEM sont susceptibles de se superposer, de se "traverser" sans altération. La complication, si l'on peut dire, provient de l'observation : pour observer il faut détecter et en général, les détecteurs sont sensibles à l'énergie qu'ils reçoivent, c'est à dire au carré du champ ( $E^2$ ). La situation est donc complètement différente de celle des vagues de houle à la surface de l'eau où l'on observe la hauteur d'eau (équivalente au champ) et le déplacement des vagues à leur vitesse de phase. Pour faire la comparaison, en optique, pratiquement toute onde détectée s'arrête, c'est comme si on ne percevait les vagues qu'au bord de la plage au moment où elles vous déferlent dessus. Pour dire vite, avec les OEM on ne "voit" pas la phase.

### 1.3 Détection de la lumière

Les détecteurs sont sensibles au flux d'énergie qu'ils reçoivent pendant un temps  $T$  caractéristique de leur réponse, on parle plutôt de densité de rayonnement ou d'éclairement en  $W/m^2$  qu'on notera  $I$  comme "intensité". C'est aussi le flux de la moyenne temporelle du vecteur de Poynting à travers une surface unité perpendiculaire à la direction du rayonnement, pendant l'unité de temps :

$$I = \langle \mathbb{P} \rangle_T / 1m^2 / 1s = \langle \vec{E} \wedge \vec{H} \rangle_T = \frac{1}{\mu_o} \langle \vec{E} \wedge \vec{B} \rangle_T$$

Qui avec des champs harmoniques où  $B = \frac{E}{v_\phi}$  s'écrit :

$$I = \frac{n}{\mu_o c} \langle E^2 \rangle_T = \frac{\sqrt{\epsilon_o \mu_o}}{\mu_o} n \langle E^2 \rangle_T = \sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}} n \langle E^2 \rangle_T = \frac{\langle E^2 \rangle_T}{Z_n}$$

où on a introduit l'impédance du milieu :  $Z_n = \frac{Z_v}{n}$

$Z_v$  est l'impédance d'onde (EM) dans le vide et vaut  $Z_v = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} = 120\pi \simeq 377\Omega$

Finalement,

$$I = \frac{\langle E^2 \rangle_T}{Z_n} = \frac{nE_o^2}{2Z_v}$$

Le facteur 1/2 provenant de la valeur moyenne du  $\cos(\omega t)$  comme d'habitude.

À condition de rester à l'intérieur d'un même milieu, on ne retiendra le plus souvent que la proportionnalité de  $I$  à  $E_o^2$ .

On définit aussi la densité de flux de photons :  $I_{ph} = \frac{I}{\hbar\omega}$

la densité de photons :  $D_{ph} = \frac{1}{c} \frac{I}{\hbar\omega}$  et le flux de photons :  $\Phi_{ph} = \frac{IS}{\hbar\omega}$

Quelques ordres de grandeurs repères ( $h = 6.6256 \times 10^{-34} J.s$ ) :

- Laser HeNe à 632.8 nm de 1mW soit  $\Phi = 3.10^{15}$  photons, focalisé sur  $10^{-8}m^2$  :  
 $I = 10^5 W/m^2$  ;  $I_{ph} = 3 \times 10^{23} ph/m^2$
- Soleil au zénith :  $I = 1.4 \times 10^3 W/m^2$  ;  $I_{ph} = 4 \times 10^{21} ph/m^2$

## 2 Composition de deux ondes - Conditions d'interférences

### 2.1 Somme des champs

On ne précise pas  $\varphi(\vec{r})$  pour l'instant cela permettra de s'adapter à différentes situations/symétries. Les champs électriques

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \cos[\varphi_1(\vec{r}) - \omega_1 t] \quad \text{et} \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \cos[\varphi_2(\vec{r}) - \omega_2 t]$$

s'ajoutent :

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_{01} \cos[\varphi_1(\vec{r}) - \omega_1 t] + \vec{E}_{02} \cos[\varphi_2(\vec{r}) - \omega_2 t]$$

Mais on n'observe que  $\langle \vec{E}_{tot}^2 \rangle_T$ , l'éclairement (à l'impédance près) :

$$|E_{01}|^2 \langle \cos^2[\varphi_1 - \omega_1 t] \rangle_T + |E_{02}|^2 \langle \cos^2[\varphi_2 - \omega_2 t] \rangle_T + 2\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \langle \cos[\varphi_1 - \omega_1 t] \cdot \cos[\varphi_2 - \omega_2 t] \rangle_T$$

Les  $\cos^2$  des deux premiers termes donnent des valeurs moyennes de 1/2; le 3ème terme est le terme d'interférence.

### 2.2 Conditions d'interférences

Lors de la composition de plusieurs ondes on peut toujours considérer qu'il y a "interférences". Toutefois on appelle "conditions d'interférences" des conditions d'observation de ces interférences, i.e. des conditions pour que le résultat de leur composition soit suffisamment stable pour être observé. Il est d'usage de parler de visibilité ce qui restreint à la seule observation par l'œil (humain). On généralise ici, à des observations utilisant n'importe quel détecteur caractérisé par son temps d'intégration  $T$ .

Le facteur temporel du terme d'interférences s'écrit :

$$\langle \cos[\varphi_1 - \omega_1 t] \cdot \cos[\varphi_2 - \omega_2 t] \rangle_T = \frac{1}{2} \{ \langle \cos[\varphi_1 + \varphi_2 - (\omega_1 + \omega_2)t] \rangle_T + \langle \cos[\varphi_1 - \varphi_2 - (\omega_1 - \omega_2)t] \rangle_T \}$$

si  $\omega_1 \geq \omega_2 > 0$ , comme

$$\langle a(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} a(t') dt'$$

Le terme en  $\omega_1 + \omega_2$  oscillant rapidement a une valeur moyenne nulle sur tout  $T \gg \frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2}$ , tandis que le terme en  $\omega_1 - \omega_2$ , donne une variation lente au cours du temps si

$$T \ll \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} \iff \nu_1 - \nu_2 \ll \frac{1}{T}$$

on observe une variation lente de l'intensité à la fréquence  $\omega_1 - \omega_2$ .

Pour les détecteurs usuels  $T$  est compris entre  $10^{-6}s$  (pour un photomultiplicateur) à 0.1s pour l'œil. Donc  $\nu_1 - \nu_2 \ll \frac{1}{T} = 10$  dans ce dernier cas, signifie que la fréquence doit être stabilisée à  $10/10^{14} = 10^{-13}$  ce qui matériellement est pratiquement impossible sauf à ce que la source soit en fait **la même**. On en déduit la première condition :

### 2.2.1 1<sup>ere</sup> condition d'interférences : même source primaire

Pour que des interférences soient visibles (observables à l'œil), les sources doivent être synchrones à mieux que  $10^{-13}$  ce qui en pratique amène à ne considérer que des sources absolument synchronisées sur une source unique. De nombreux dispositifs seront vus en travaux pratiques.

### 2.2.2 2<sup>eme</sup> condition d'interférences : composantes parallèles

Le terme d'interférences contient le produit scalaire des champs :  $\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}$ . Pour observer des interférences il faut que ce terme ne soit pas nul. Des ondes polarisées perpendiculairement n'interfèrent pas (ou leur terme d'interférences est nul).

*Remarque : Cette orthogonalité est à prendre au sens large de sorte que des ondes circulaires droite et gauche sont aussi orthogonales.*

{ $\mathfrak{H}$ } L'expérience d'interférences en ondes polarisées réalisée par ARAGO en 1816 et interprétée par FRESNEL a permis d'établir le caractère transverse des ondes électromagnétiques.

### 2.2.3 3<sup>eme</sup> condition d'interférences : recouvrement des trains d'ondes

Dans le modèle précédent, on a négligé le fait qu'une onde réelle est limitée dans le temps. Un photon est représenté par un paquet d'ondes limité. Soit  $\tau$  sa durée, il aura une longueur  $l_c = c\tau$  dans le vide ou dans l'air ( $v_\varphi\tau$  dans un milieu). On appelle  $l_c$  longueur de cohérence temporelle.

Un rayonnement donné est une superposition d'une succession de "trains d'ondes" dont la longueur moyenne est  $l_c$ , les trains d'ondes successifs n'ont pas de relation de phases entre eux : ils ne peuvent pas interférer.

La troisième condition d'interférences s'écrit donc :

$$\varphi_1(\vec{r}) - \varphi_2(\vec{r}) < \omega\tau$$

ou bien, si on introduit la différence de marche  $\delta$  par  $\varphi_1(\vec{r}) - \varphi_2(\vec{r}) = k\delta$ , c'est tout simplement :

$$\delta < l_c$$

A noter toutefois, que la disparition des interférences est progressive, il y a des interférences tant qu'une partie des trains d'onde se recouvrent, on parle alors de cohérence partielle.

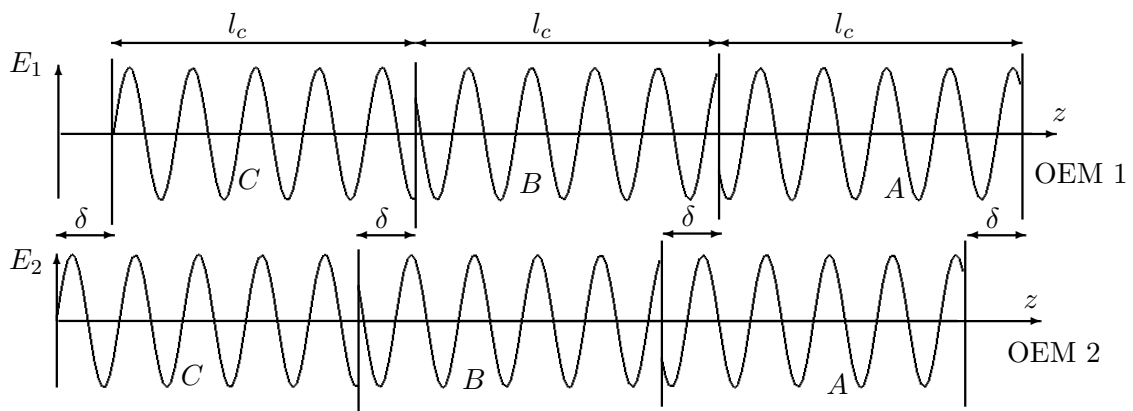


Figure 1 - Cohérence partielle

Les interférences devraient disparaître totalement pour  $\delta > l_c$  (ou  $t' > \tau$ ), mais il faut penser que, dans la réalité, on a une distribution statistique de la longueur des trains

d'ondes de valeur moyenne  $l_c$  ce qui contribue encore à la progressivité de la disparition des interférences.

Lorsque les trois conditions d'interférences sont réalisées, l'éclairement total peut s'écrire sous la forme :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_1(\vec{r}) - \varphi_2(\vec{r}))$$

avec les expressions complexes des champs, le terme d'interférences est proportionnel à :

$$\Re[\tilde{E}_1 \tilde{E}_2^*]$$

## 2.3 Exemples de géométrie simple d'interférences à deux ondes

### 2.3.1 Croisement d'ondes planes - Vélométrie laser

Ce modèle décrit le croisement sous un petit angle de deux faisceaux (laser).

$$\varphi_1(\vec{r}) = \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_{01} \quad \varphi_2(\vec{r}) = \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_{02}$$

avec  $|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = \frac{\omega}{c}$  alors :

$$\varphi_1(\vec{r}) - \varphi_2(\vec{r}) = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} + (\varphi_{01} - \varphi_{02}) = \delta\vec{k} \cdot \vec{r} + \delta\varphi$$

On observera quelque chose de stable si  $\delta\varphi = Cste$  (qu'on prend nulle dans la suite). Alors, les surfaces d'égale intensité (ou d'égal éclairement) sont des plans perpendiculaires à  $\delta\vec{k}$  définis par

$$\delta\vec{k} \cdot \vec{r} = Cste$$

Si on pose  $\theta = (\vec{k}_1, \vec{k}_2)$ , alors

$$\delta k = 2k \sin \frac{\theta}{2}$$

Les plans lumineux seront obtenus pour  $\cos \delta k X = 1$ , soit pour les  $X_p$  particuliers :

$$2k X_p \sin \frac{\theta}{2} = 2p\pi \quad \text{où } p \in \mathbb{N}$$

d'où  $X_p = \frac{p\lambda}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$  et l'interfrange :

$$i = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$$

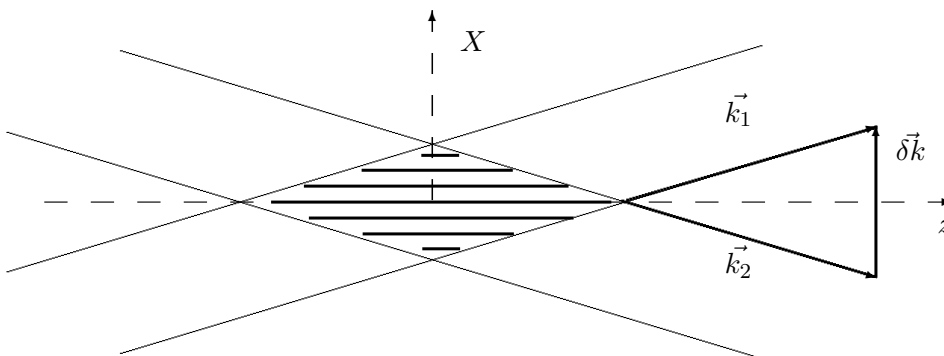


Figure 2 - Champ de franges au croisement des faisceaux

A.N.

Pour avoir  $i = 0.01mm = 10^{-5}m$  avec  $\lambda = 633nm$ , il faut  $\theta = 0.063rad = 3.6^\circ$ .

Application à la vélocimétrie laser : pour mesurer la vitesse d'un fluide, on ensemence le fluide de poussières et on mesure la lumière diffusée par les particules qui traversent le réseau de franges ; on déduit la vitesse du fluide à partir du signal recueilli.

### 2.3.2 Croisement d'ondes sphériques

On considère deux sources ponctuelles émettant chacune une onde sphérique monochromatique de même fréquence ( $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ).

On remplace  $E_{0i}$  par  $\frac{A_i}{|\vec{r} - \vec{r}_{oi}|}$ ,  $i=1,2$  dans l'expression du terme d'interférences, et les  $\varphi_i(\vec{r})$  par  $k_i \|\vec{r} - \vec{r}_{oi}\| + \varphi_{oi}$  avec  $k_i = \frac{\omega}{v_\varphi}$  on se souviendra (cf. Chap. I) que pour ces ondes sphériques  $\vec{k}_1 // P_1\vec{M}$  et  $\vec{k}_2 // P_2\vec{M}$ .

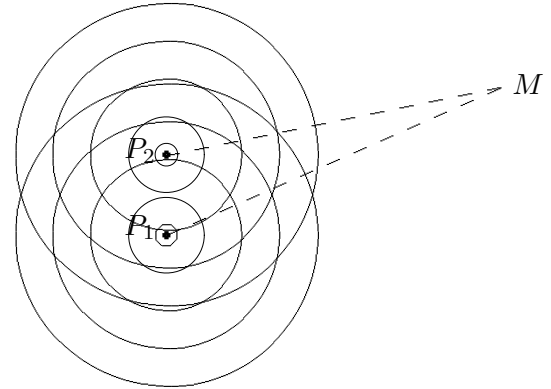


Figure 3 - Ondes sphériques observées en M

Alors,

$$\varphi_1(\vec{r}) - \varphi_2(\vec{r}) = k_1 \|\vec{r} - \vec{r}_{o1}\| - k_2 \|\vec{r} - \vec{r}_{o2}\| + (\varphi_{o1} - \varphi_{o2})$$

Soit encore :

$$\varphi_1(\vec{r}) - \varphi_2(\vec{r}) = \frac{\omega}{c}(n\overline{P_1M} - n\overline{P_2M}) + (\varphi_{o1} - \varphi_{o2})$$

qu'on peut encore écrire en introduisant le "chemin optique"  $[P_1M] = n\overline{P_1M}$  :

$$\varphi_1(\vec{r}) - \varphi_2(\vec{r}) = \frac{\omega}{c}([P_1M] - [P_2M]) + (\varphi_{o1} - \varphi_{o2})$$

Cette dernière expression définit, comme surfaces d'égal éclairissement, des hyperboloïdes de révolution d'axe  $P_1P_2$  et dont les foyers sont  $P_1$  et  $P_2$ .

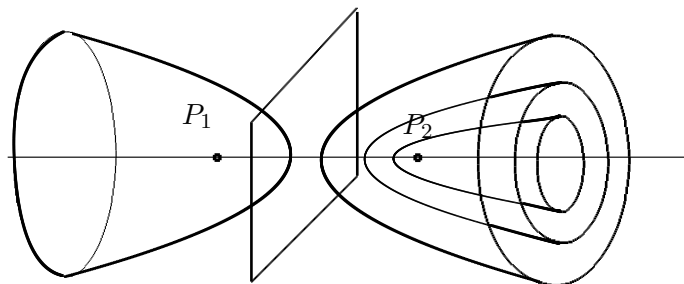


Figure 4 - Interférences de deux sources ponctuelles

Ces surfaces s'étendent dans tout l'espace, il n'y a pas de localisation. Certaines limitations peuvent néanmoins intervenir avec la 3eme condition d'interférences (limitation de la différence de marche à la longueur des trains d'ondes).

Lorsqu'on observe ces interférences dans un plan parallèle à l'axe  $P_1P_2$  on verra des franges hyperboliques tandis que dans un plan perpendiculaire à cet axe on observera des cercles concentriques.



### Interférogramme observé à “grande distance”

On se place dans le vide ou dans l'air ( $n \simeq 1$ ), à une distance  $D$  du plan des sources elles même distantes de  $2a$  selon la figure suivante :

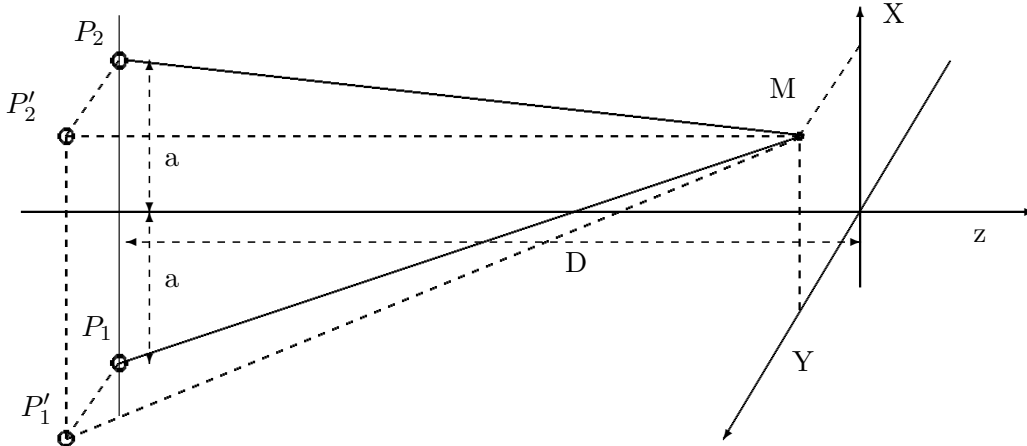


Figure 5 - Géométrie de l'observation

$$P_1M = \sqrt{(X+a)^2 + Y^2 + D^2} \quad \text{et} \quad P_2M = \sqrt{(X-a)^2 + Y^2 + D^2}$$

Comme la distance  $D$  est grande devant les autres distances on peut approximer les  $P_iM$  à l'aide de développements limités :

$$P_1M = D \left[ 1 + \frac{(X+a)^2}{2D^2} + \frac{Y^2}{2D^2} + \mathcal{O}\left(\frac{R^4}{D^4}\right) \right] \quad \text{et} \quad P_2M = D \left[ 1 + \frac{(X-a)^2}{2D^2} + \frac{Y^2}{2D^2} + \mathcal{O}\left(\frac{R^4}{D^4}\right) \right]$$

Finalement :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = k \left( \frac{2aX}{D} + \mathcal{O}\left(\frac{R^4}{D^3}\right) \right) + (\varphi_{01} - \varphi_{02})$$

d'où, pour une différence de phase à l'origine  $(\varphi_{01} - \varphi_{02}) = Cste$  prise arbitrairement nulle (on verra par la suite comment réaliser cette condition),

$$\varphi_1 - \varphi_2 \simeq \frac{2akX}{D}$$

Soit encore pour la différence de marche, en écrivant la distance entre source  $2a = d$

$$\delta = \frac{Xd}{D}$$

On constate que, dans la limite  $R \ll D$ , le champ de franges ne dépend pas de  $Y$  et que  $\delta = Cste$  donne des franges rectilignes dans la direction  $Y$  espacées en  $X$  d'un interfrange  $i$  correspondant à une variation de  $\lambda$  pour  $\delta$  :

$$i = \frac{\lambda D}{d}$$

Considérons un couple de points  $(P'_1, P'_2)$  translaté de  $y = b$  du premier couple  $(P_1, P_2)$ , et possédant le même écart de phase  $\varphi'_{01} - \varphi'_{02} = \varphi_{01} - \varphi_{02}$ , mais pas forcément la même phase ( $\varphi'_{01} \neq \varphi_{01}$ ), il produira la même figure d'interférences que  $(P_1, P_2)$ . On dit qu'il y a cohérence spatiale pour les deux couples.

Conséquence : pour un plan d'observation situé loin des sources ( $D \gg R$ ), on peut utiliser des fentes sources dont les points pris par couples produisent la même figure d'interférences. On obtient ainsi un plus grand éclairement de l'interférogramme.

## 2.4 Réalisations pratiques - Dispositifs à division du front d'onde

Afin de réaliser les conditions d'interférences (notamment CIf 1 et CIf 3), les sources qui produisent le rayonnement susceptible d'interférer sont des sources "secondaires", produites par une seule et même source ("primaire"). Ainsi  $\omega_1 = \omega_2$  (CIf 1) et la différence de phase à l'origine  $\varphi_{01} - \varphi_{02}$  conserve sa valeur pour les différents trains d'onde successifs émis par la source primaire.

En pratique, on réalisera une bonne approximation de source ponctuelle en focalisant un faisceau laser à l'aide d'une lentille convergente de courte focale (cf TP).

### 2.4.1 Expérience d'YOUNG - Trous d'YOUNG

Une source ponctuelle (S. primaire) éclaire un écran percé de deux trous qui diffractent la lumière au delà de l'écran. Les trous diffractant agissent en sources secondaires. On admettra qu'ils peuvent être assimilés à des sources ponctuelles d'ondes sphériques dans certaines conditions qui seront précisées plus tard (cf Diffraction).

On peut le comprendre en utilisant le principe d'HUYGENS-FRESNEL qui permet d'approcher les solutions d'une équation d'ondes de manière graphique.

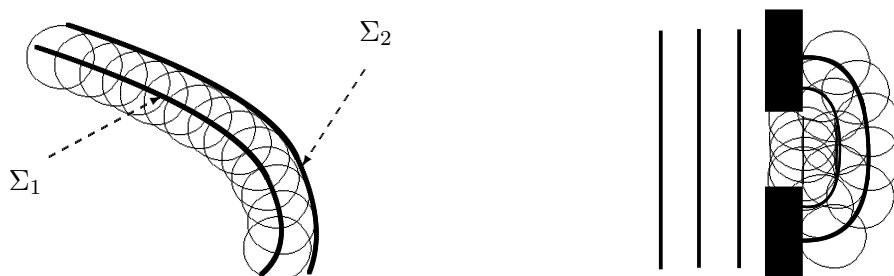


Figure 6 - Principe d'HUYGENS-FRESNEL

Suivant ce principe, étant donnée une surface d'onde  $\Sigma_1$ , on obtient une surface d'onde voisine  $\Sigma_2$  comme l'enveloppe des ondes sphériques (ondelettes) émises par chacun des points de la première surface. Le principe s'applique de proche en proche avec des distances de l'ordre de la longueur d'onde entre surfaces d'ondes. C'est en fait une méthode de résolution graphique de l'équation d'onde, comme une sorte de méthode numérique avant la lettre.

Ainsi, pour un trou, on comprend que les ondelettes émises par les bords du trou vont donner de la lumière dans des directions inclinées par rapport à l'axe du trou.

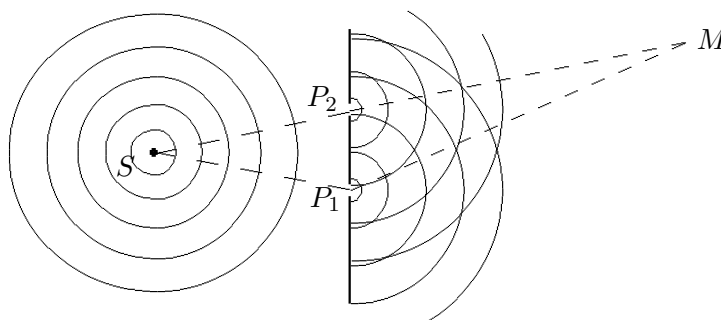


Figure 7 - Trous d'YOUNG

Alors

$$\varphi_{01} = \varphi_o + k\overline{SP_1} \quad \text{et} \quad \varphi_{02} = \varphi_o + k\overline{SP_2}$$

d'où

$$\varphi_{01} - \varphi_{02} = k(\overline{SP_1} - \overline{SP_2})$$

Un tel système donne un déphasage à l'origine qui ne dépend plus de  $\varphi_o$  phase à l'origine d'un train d'onde et il remplit donc la Cif3 si  $\overline{SP_1} - \overline{SP_2} < l_c = c\tau$  longueur de cohérence temporelle. On réalise même facilement  $\varphi_{01} - \varphi_{02} = 0$  en plaçant la source primaire S sur la médiatrice de  $P_1P_2$ .

Les franges lumineuses apparaissent pour  $\delta_t = p\lambda$ , où  $p \in \mathbb{N}$  et où  $\delta_t = [SP_1M] - [SP_2M]$ .

**Définition :** On appelle **ordre d'interférences** la mesure de la différence de marche totale en  $\lambda$ . Il est entier pour les franges brillantes.

L'ordre  $p = 0$  correspond au chemin de l'optique géométrique.

### 2.4.2 Autres dispositifs à division du front d'onde

D'autres dispositifs à base de miroirs ou de lentilles peuvent être utilisés pour produire des interférences à deux ondes, on s'appliquera à titre d'exercice, dans chacun des cas, à retraduire les conditions d'interférences et à délimiter le champ des interférences.

#### Miroirs de FRESNEL

Le système est constitué de deux miroirs faisant un petit angle  $\alpha$  entre eux.

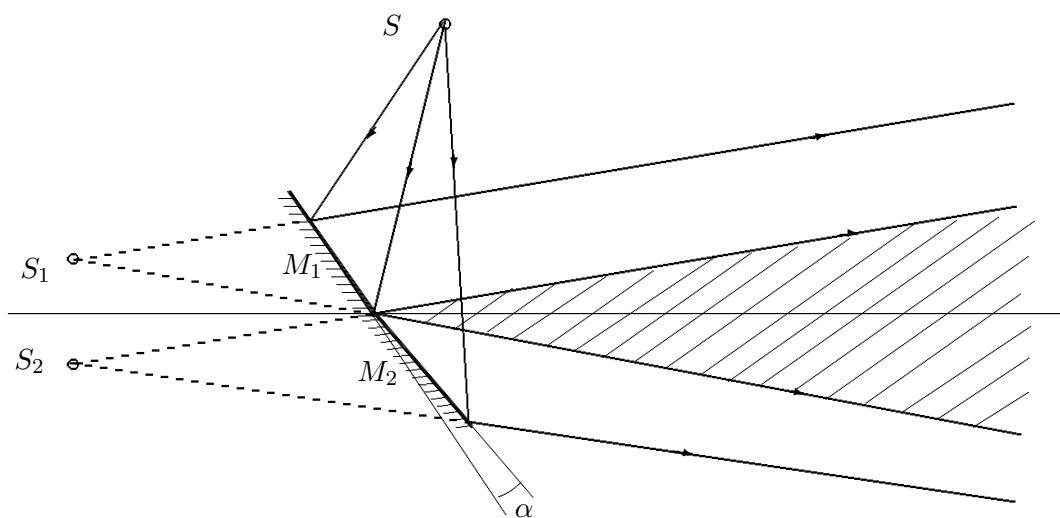


Figure 8 - Miroirs de FRESNEL

#### Miroir de LLOYD

On éclaire en lumière rasante un miroir :

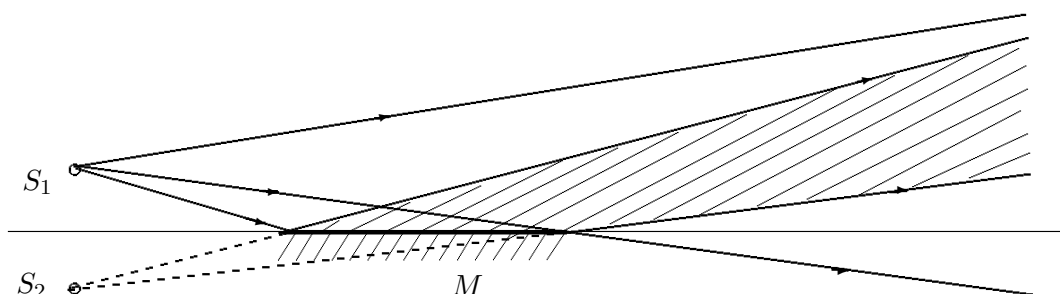


Figure 9 - Miroir de LLOYD

### Bi-prisme de FRESNEL

Le système est constitué de deux prismes de faible angle au sommet, accolés par leur base :

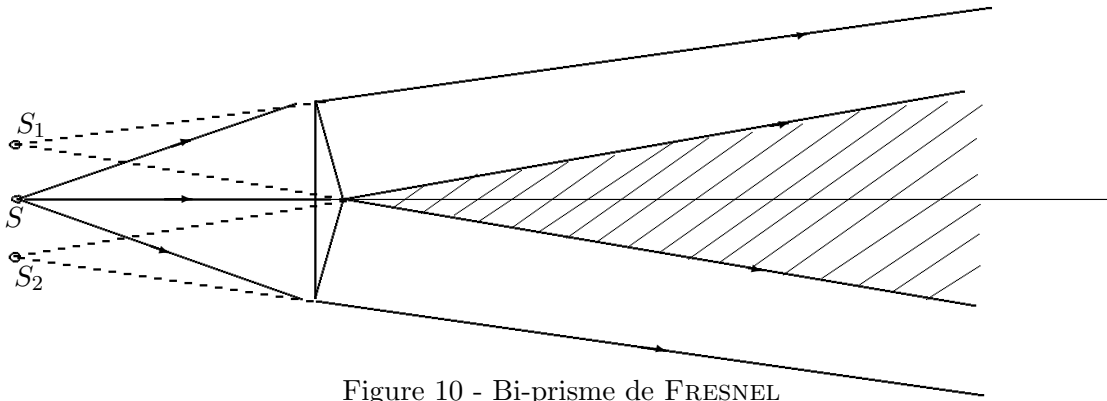


Figure 10 - Bi-prisme de FRESNEL

### Lentilles de BILLET

Après avoir coupée en deux une lentille selon un diamètre, on écarte les deux demi-lentilles perpendiculairement à l'axe optique.

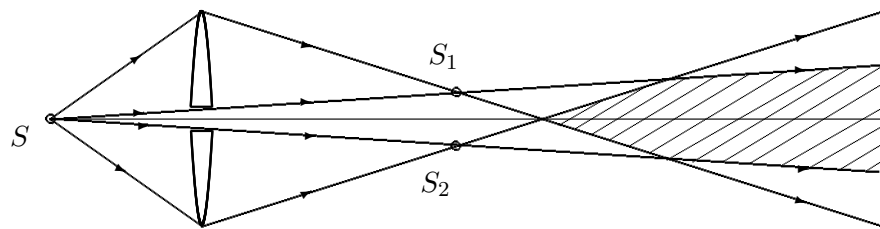


Figure 11 - Lentilles de BILLET

### Lentilles de MESLIN

Après avoir coupée en deux une lentille selon un diamètre, on translate l'une des deux demi-lentilles parallèlement à l'axe optique.

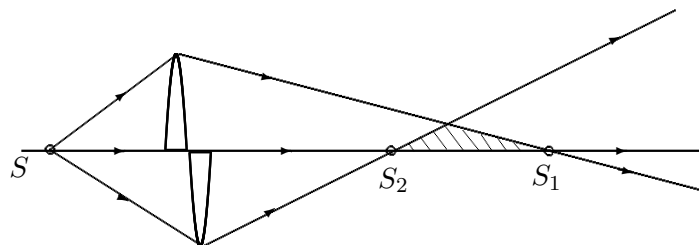


Figure 12 - Lentilles de MESLIN

## 2.5 Cohérence Spatiale

Tous les systèmes précédents font appel à une source primaire ponctuelle. On a vu qu'on pouvait étendre la source dans la direction  $y$  sans nuire à l'observation d'interférences, avec certaines conditions. Ce paragraphe va permettre de préciser cette notion de "ponctuelle" dans le cadre des interférences.

### 2.5.1 Source primaire “double”

Deux sources primaires monochromatiques, de même fréquence mais incohérentes  $S_a$  et  $S_b$  distantes de  $e$  en  $x$  donneront chacune “son” système de franges. Les champs issus des deux sources n’ont pas de relation de phase car les déphasages des trains d’ondes issus de sources incohérentes sont aléatoires. Il faudra donc superposer les interférogrammes c’est à dire ajouter les intensités produites par chacune des sources pour rendre compte des observations.

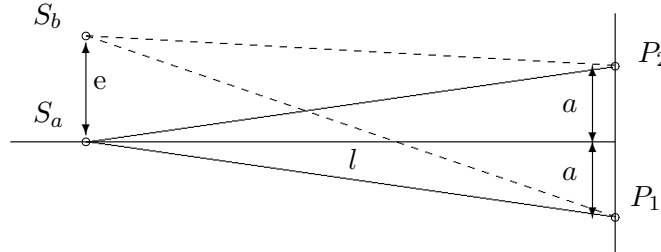


Figure 13 - Géométrie des sources primaires

On calcule le déphasage  $(\varphi_1 - \varphi_2)_b$  pour le champ issu de  $S_b$  :

$$(\varphi_1 - \varphi_2)_b = \frac{kXd}{D} + (\varphi_{01} - \varphi_{02})_b = \frac{kXd}{D} + k(\overline{S_b P_1} - \overline{S_b P_2})$$

or

$$\overline{S_b P_1} - \overline{S_b P_2} = \sqrt{(e+a)^2 + l^2} - \sqrt{(e-a)^2 + l^2}$$

expression qui peut s’approximer si  $e \ll l$  par :

$$\overline{S_b P_1} - \overline{S_b P_2} \simeq \frac{e2a}{l} = \frac{ed}{l}$$

**Définition** : On appelle **largeur de cohérence spatiale**, la distance entre les deux points sources primaires qui produit une différence de marche de  $\lambda$  entre les sources secondaires. Ainsi on déduit la valeur de cette largeur :

$$\frac{l_s d}{l} = \lambda \implies l_s = \frac{\lambda l}{d}$$

On notera qu’un premier brouillage est obtenu pour  $e = \frac{1}{2} l_s$  puisque  $\frac{ed}{l} = \frac{\lambda}{2}$  place les maximums du réseau de franges produit par  $S_b$  à l’endroit des minimums de celui produit par  $S_a$  (cf. étude en TD).

### 2.5.2 Source primaire étendue

On considère maintenant une source primaire S étendue en forme de fente allongée suivant  $y$  et de largeur  $2e$  suivant  $x$ .

On répartit l’intensité en définissant un  $dI$  associé à un élément de largeur  $dx$  :

$$dI = \frac{I_o}{2e} dx$$

C’est à dire que chaque fente infinitésimale de largeur  $dx$  produit une intensité  $dI$ . (Attention ! on distingue  $x$  dans le plan des sources de  $X$  dans le plan d’observation).

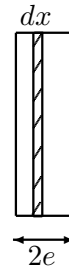


Figure 13 bis - Source primaire étendue

Alors, dans le plan d’observation :

$$I = \int dI_1 + \int dI_2 + 2 \int \sqrt{dI_1 dI_2} \cos k\delta_t$$

où la différence de marche totale  $\delta_t$  comprend outre le terme de différence de chemin des trous au plan d'observation, un autre terme du chemin des sources aux trous :

$$\delta_t = \frac{Xd}{D} + \frac{xd}{l}$$

Alors

$$I = \int_{-e}^e \frac{I_o}{2e} dx + \int_{-e}^e \frac{I_o}{2e} dx + \int_{-e}^e \frac{I_o}{e} \cos k\left(\frac{Xd}{D} + \frac{xd}{l}\right) dx$$

Soit par intégration :

$$I = 2I_o + \frac{I_o l}{e kd} \left[ \sin k\left(\frac{Xd}{D} + \frac{ed}{l}\right) - \sin k\left(\frac{Xd}{D} - \frac{ed}{l}\right) \right]$$

ou encore :

$$I = 2I_o \left( 1 + \frac{l}{ked} \sin \frac{ked}{l} \cos \frac{kXd}{D} \right) = 2I_o \left[ 1 + \text{sinc}\left(\frac{ked}{l}\right) \cos \frac{kXd}{D} \right]$$

Dans le champ d'interférences ( $X$  variable), l'intensité varie entre  $I_{min}$  et  $I_{Max}$ , calculons le contraste défini par

$$C = \frac{I_{Max} - I_{min}}{I_{Max} + I_{min}}$$

On trouve :

$$C = \left| \text{sinc}\left(\frac{ked}{l}\right) \right|$$

C'est à dire la valeur absolue du sinus cardinal de  $ked/l$  qui peut aussi s'exprimer en fonction de la largeur de cohérence spatiale  $l_s = \lambda l/d$  :

$$C = \left| \text{sinc}\left(\pi \frac{2e}{l_s}\right) \right|$$

ce qui confirme que c'est en largeur de cohérence  $l_s$  que se mesure la largeur  $2e$  de la fente, dans l'étude du contraste. On pourra donc considérer comme ponctuelle une source primaire dont l'étendue est négligeable devant  $l_s$  ou encore qui est vue depuis le plan des sources secondaires sous un petit angle

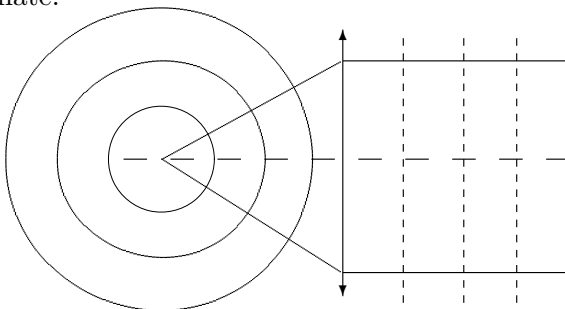
$$\frac{e}{l} \ll \frac{l_s}{l} = \frac{\lambda}{d}$$

## 2.6 Dispositifs d'observation

Dans la pratique, afin de travailler avec le maximum de flux lumineux, on place souvent des lentilles pour collimater les faisceaux.

### 2.6.1 Source primaire "rejetée" à l'infini

La source primaire (ponctuelle ou fente source) est placée au foyer d'une lentille convergente, le plan des sources secondaires (trous dans l'exp.d'YOUNG) reçoit un faisceau collimaté.



La lentille "transforme" les surfaces d'onde sphériques en plans d'onde. Elle introduit la même différence de phase pour tous les chemins optiques allant d'un point-objet au point-image conjugué (ici à l'infini).

Figure 14 - Source primaire à l'infini

Si la source primaire est étendue, le faisceau est une superposition de faisceaux parallèles, d'incidences différentes. Chaque faisceau produit son système de franges, indépendamment l'un de l'autre puisque les points sources d'origine sont incohérents. Les calculs précédents, menés sans lentilles, peuvent être repris avec

$$\varphi_{01} - \varphi_{02} = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta_i$$

pour chaque faisceau d'incidence  $\theta_i$ .

On obtient une nouvelle expression du contraste :

$$C = | \operatorname{sinc}(kd \sin \theta_e) |$$

où  $\theta_e$  est la largeur angulaire définie par  $\sin \theta_e = e/l \simeq \theta_e$  dans la limite des petits angles. Ainsi :

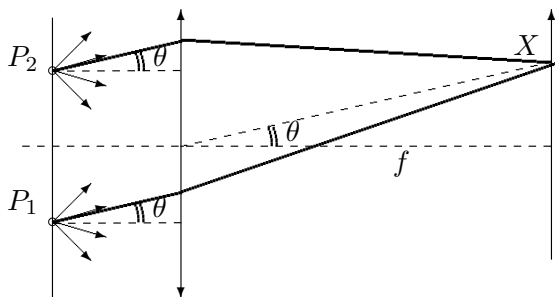
$$C = | \operatorname{sinc}(2\pi \frac{\theta_e}{\theta_s}) |$$

où

$$\theta_s = \frac{\lambda}{d}$$

constitue une "ouverture angulaire de cohérence spatiale".

### 2.6.2 Observation dans le plan focal d'une lentille



Un tel dispositif permet "d'observer à l'infini" c'est à dire de superposer des champs provenant de faisceaux de même incidence et d'observer, le cas échéant, leurs interférences. On retiendra que la lentille n'introduit pas de déphasage entre un plan de référence perpendiculaire aux faisceaux et leur point de convergence.

Figure 15 - Observation à l'infini

Alors

$$\delta = d \sin \theta \simeq d \tan \theta = \frac{Xd}{f}$$

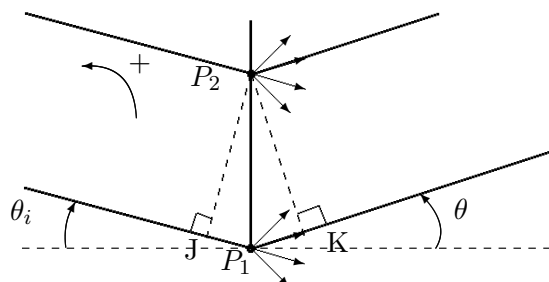
ce qui revient à substituer  $f$  à  $D$  dans les expressions précédentes faisant intervenir la différence de marche.

On en déduit l'interfrange :

$$i = \frac{\lambda f}{d}$$

### 2.6.3 Interférences en lumière parallèle

Lorsqu'on place le système qui produit les interférences (par ex. les trous ou fentes) entre deux lentilles convergentes disposées comme dans les deux précédents paragraphes, on est amené à considérer la différence de marche en lumière parallèle :



Alors

$$\delta = d(\sin \theta - \sin \theta_i)$$

où  $\theta = (\vec{n}, \vec{k})$  et  $\theta_i = (\vec{n}, \vec{k}_i)$  sont mesuré algébriquement. Attention ici  $\theta > 0$  et  $\theta_i < 0$ .

Figure 16 - Géométrie en lumière parallèle

Dans ces conditions :

- Les maximums seront observés pour  $\delta = p\lambda$  avec pour  $p = 0$  le chemin de l'optique géométrique.
- L'intensité sera modulée par la diffraction (étudiée plus tard) et dans le cas de fentes fines, l'interférogramme sera peu étendu dans la direction ( $y$ ) de la longueur des fentes. Plus les fentes seront étroites (en  $x$ ) et plus l'interférogramme sera étendu en  $X$  (mais il sera moins lumineux).

### 3 Réseaux

#### 3.1 Réseaux par transmission

On substitue au système de deux fentes, un réseau de  $N$  fentes qui, supposées infiniment fines, diffractent dans toutes les directions.

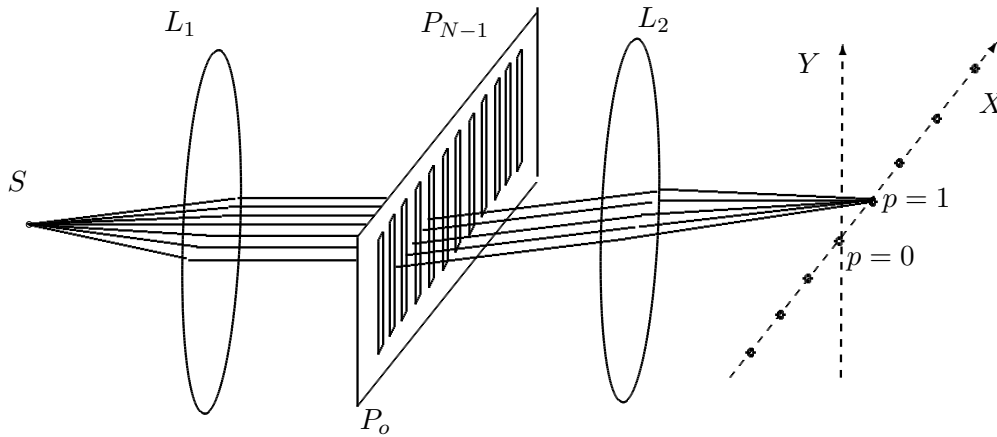


Figure 17 - Réseau en lumière parallèle

La différence de marche entre deux fentes successives est donnée par celle obtenue avec deux fentes seules :

$$\delta = d(\sin \theta - \sin \theta_i)$$

où les angles sont orientés.

Le déphasage entre deux fentes successives s'écrit :

$$\varphi_n - \varphi_{n+1} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$$

On a vu que lorsque les conditions d'interférences sont réalisées, l'interférogramme peut être décrit par

$$|E|^2 = \tilde{E}\tilde{E}^*$$

Le champ provenant de la fente  $n$ , observable dans la direction  $\theta$ , s'écrit :

$$\tilde{E}_n(\theta) = E_{on} \exp i[\vec{k}_\theta \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_n(\theta)]$$

avec

$$\varphi_n(\theta) = n\phi(\theta)$$

où on a pris la phase de la première fente ( $n = 0$ ) comme référence de phase, et où

$$\phi(\theta) = \frac{2\pi}{\lambda} d (\sin \theta - \sin \theta_i)$$



En supposant toutes les amplitudes égales  $E_{on} = A \forall n$ , on somme les champs des faisceaux de la direction  $\theta$  :

$$\tilde{E}_T(\theta) = \sum_n \tilde{E}_n(\theta) = A e^{i(\vec{k}_\theta \cdot \vec{r} - \omega t)} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\phi(\theta)}$$

Soit en sommant la série géométrique :

$$\tilde{E}_T(\theta) = A e^{i(\vec{k}_\theta \cdot \vec{r} - \omega t)} \frac{1 - e^{iN\phi}}{1 - e^{i\phi}}$$

Qui peut encore s'écrire :

$$\tilde{E}_T(\theta) = A e^{i(\vec{k}_\theta \cdot \vec{r} - \omega t)} e^{i(N-1)\phi/2} \frac{\sin N\phi/2}{\sin \phi/2}$$

D'où l'éclairement :

$$I(\theta) \propto \tilde{E}_T \tilde{E}_T^* = |A|^2 \frac{\sin^2 N\phi/2}{\sin^2 \phi/2}$$

En se souvenant que c'est  $\phi$  qui dépend de  $\theta$ .

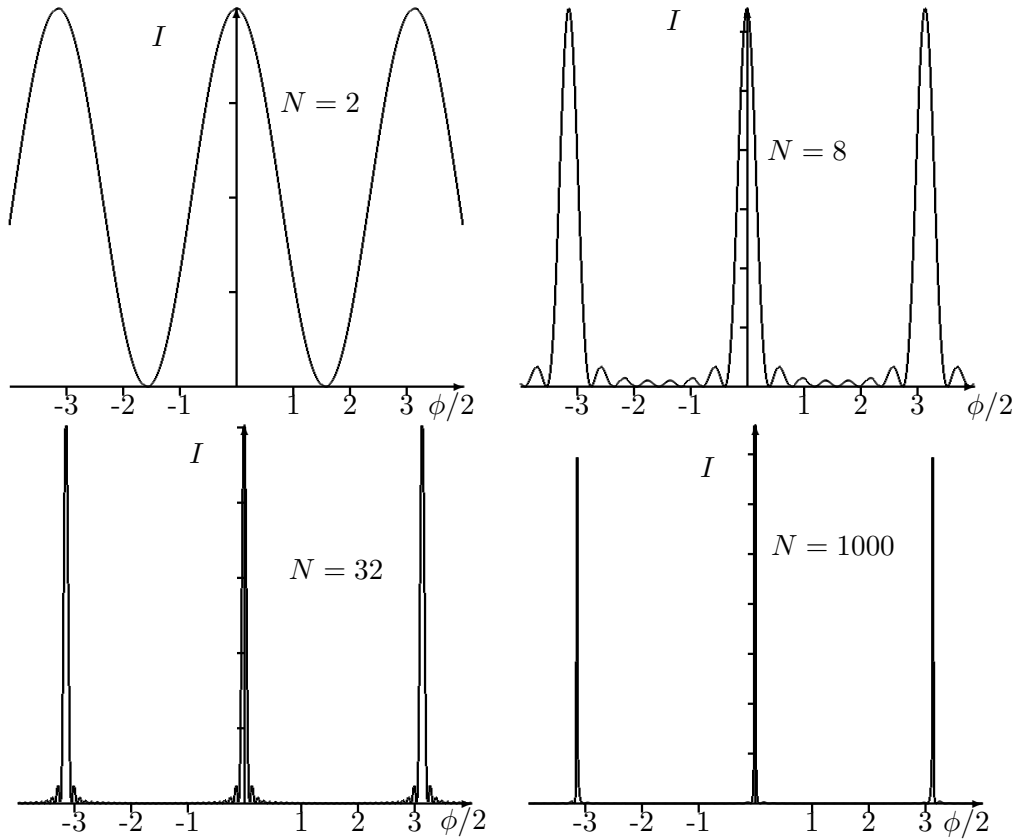


Figure 18 - Allure des  $I(\phi)$

Si on répartit l'intensité  $I_o$  sur les  $N$  fentes, chacune contribue par  $|A|^2 = \frac{I_o}{N}$  et finalement

$$I(\theta) = I_o \frac{\sin^2 N\frac{\phi}{2}}{N \sin^2 \frac{\phi}{2}}$$

**Maximums principaux de I :** ils sont obtenus pour  $\sin^2 \frac{\phi_M}{2} = 0$  soit  $\phi_M = 2p\pi$  (ou  $\delta = p\lambda$ ), phase pour laquelle on calcule par développement :

$$I_{Max} = NI_o$$

On appelle toujours  $p$  l'ordre d'interférences.

**Zéros de I :** ils sont obtenus pour  $\sin N\phi_0/2 = 0$  soit  $\phi_0 = 2\pi q/N$  où  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q \neq Np$  (pour lesquels on aurait un pic principal) ; ils conduisent à une largeur des pics principaux en  $1/N$ .

**Maximums secondaires de I :** il y a  $N - 2$  maximums secondaires entre deux maximums principaux (cf. TD).

### 3.2 Réseaux par réflexion

#### 3.2.1 Géométrie et particularités

Dans une géométrie par réflexion, la disposition est présentée ci-dessous, les lentilles sont alors placées sur des bras articulés dont l'axe de rotation est dans le plan du réseau.

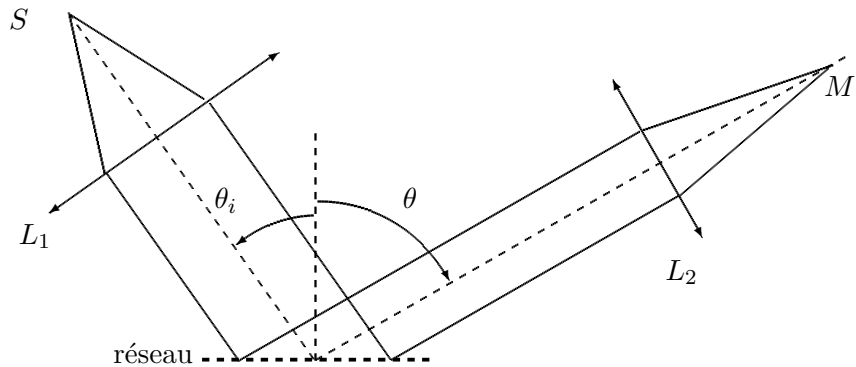


Figure 19 - Géométrie par réflexion

Avec des angles orientés, la différence de marche devient :

$$\delta = d (\sin \theta + \sin \theta_i)$$

La réflexion est susceptible de produire un déphasage (cf. formules de FRESNEL ) mais, comme il est le même pour toutes les facettes, il n'intervient pas au final.

#### 3.2.2 Notion de “blaze”

On peut orienter les facettes de manière à renforcer l'intensité réfléchie dans une direction qu'on choisira correspondre à un ordre d'interférences (réflexion spéculaire).

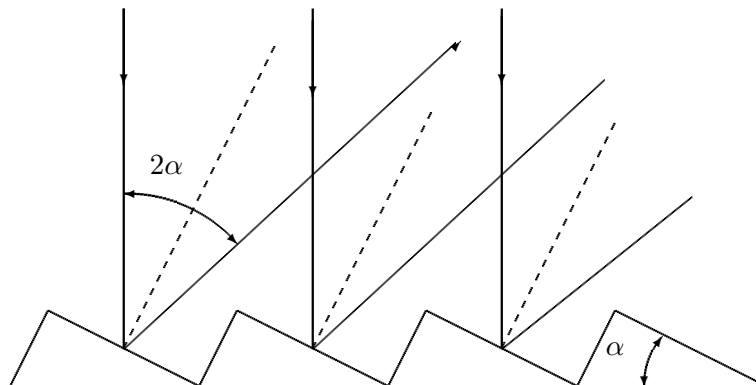


Figure 20 - Réseau “blazé”

Cette direction privilégiée correspond à l'angle de “blaze”.

### 3.2.3 Utilisation : spectrographie

Lorsqu'une source est constituée de plusieurs longueurs d'onde, chacune d'entre elles donne un interférogramme et, pour un ordre  $p$  donné, on observe autant de raies que de  $\lambda$  présentes dans la source, l'ensemble goniomètre et réseau constitue alors un spectroscopie (et si on enregistre, un spectrographe) dont le pouvoir séparateur est directement lié à la largeur des raies (en  $1/N$ ) en se souvenant que l'intensité dépend du nombre de raies  $NI_o$ .