



HAL
open science

Optique ondulatoire: Chapitre I Propagation de la lumière dans les milieux linéaires homogènes et isotropes

Gérard Rebmann

► **To cite this version:**

Gérard Rebmann. Optique ondulatoire: Chapitre I Propagation de la lumière dans les milieux linéaires homogènes et isotropes. Licence / L3. 2006. sfo-00256987

HAL Id: sfo-00256987

<https://hal-sfo.ccsd.cnrs.fr/sfo-00256987>

Submitted on 4 Sep 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Chapitre I

Propagation de la lumière

dans les milieux

linéaires homogènes et isotropes

NOTES

1 Introduction

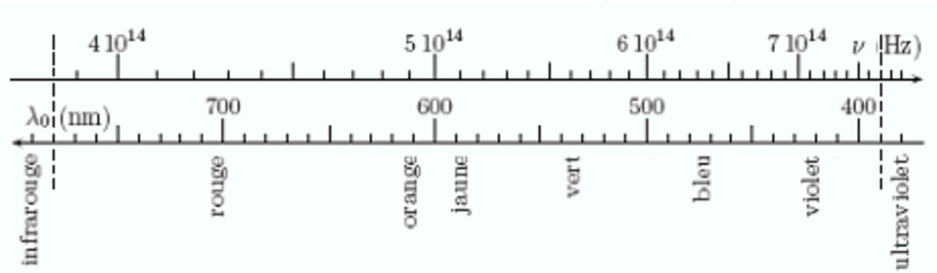
Le cours de ce semestre est consacré à l'optique ondulatoire : l'étude des phénomènes où la lumière intervient en tant qu'onde électromagnétique (notée OEM). On sait aujourd'hui que le rayonnement électromagnétique est quantifié (photons), et que la lumière présente les deux aspects : ondulatoire et corpusculaire. Comme son nom l'indique, on se centrera dans ce cours, sur les aspects ondulatoires, néanmoins, on n'hésitera pas à avoir recours à des modèles plus quantiques si une explication le demande ou une hypothèse le justifie. D'une manière générale on considèrera des flux de photons importants pour lesquels la quantification ($N\hbar\omega$) n'est généralement pas essentielle.

1.1 Gamme de fréquences

La lumière "visible" ne couvre qu'une petite partie du spectre des fréquences : de $3,8.10^{14}Hz$ à $7,7.10^{14}Hz$. La tradition en optique est de caractériser une onde non pas par sa fréquence mais plutôt par sa longueur d'onde dans le vide.

$$\lambda_v = \frac{c}{\nu}$$

où c est la vitesse de la lumière et ν la fréquence ($\omega = 2\pi\nu$).



Ainsi on dira que le visible s'étend de $390nm$ (violet) à $780nm$ (rouge). En deçà (en fréquence) on parle d'infrarouge jusque vers $100\mu m$ et au delà d'ultraviolet ($0.1\mu m$). Les propriétés décrites pourront parfois s'étendre en dehors de l'optique pour d'autres gammes de fréquences d'OEM, pour autant que l'on retrouve des conditions favorables (milieu, détecteur).

!! Lorsque l'onde passe du vide dans un milieu d'indice n sa fréquence ne change pas mais sa longueur d'onde vaut $\lambda_n = \lambda_v/n$ néanmoins, on continue de "nommer" l'onde par la valeur de sa longueur d'onde du vide : c'est une "étiquette" et pas la longueur d'onde susceptible d'être mesurée dans le milieu.

(On emploie parfois le nombre d'onde $\sigma = \nu/c = 1/\lambda_v$)

1.2 Matériaux homogènes

Pour pouvoir parler de grandeurs caractéristiques (densité, indice, etc.) d'un milieu, il est nécessaire de se poser la question de l'étendue sur laquelle on considère le milieu : on ne peut en effet dire qu'une onde s'y propage que si elle est observable sur "quelques" longueurs d'onde. Les grandeurs en questions seront donc considérées sur une étendue d'une dizaine de longueurs d'onde au moins.

Afin d'établir les équations de propagation d'une OEM dans un milieu assez étendu on fait l'hypothèse que ce milieu est homogène sur la "traversée de l'onde". Or on sait que la matière est constituée d'atomes avec lesquels la lumière est susceptible d'interagir. On doit donc veiller à pouvoir "moyenner" les grandeurs physiques (densité de charges, potentiel) de manière à traiter valablement le milieu.

Les distances interatomiques dans un solide ou un liquide sont de l'ordre de quelques angstroms ($1\text{Å} = 10^{-10}m$) c'est dire que pour le visible, sur une "longueur d'onde cube"

on compte de l'ordre de 10^8 atomes i.e. cent millions d'atomes par λ^3 , ce qui justifie de considérer le milieu comme continu. Ce n'est plus le cas pour les rayons X et à fortiori gamma.

Dans le cas d'un gaz les fluctuations de densité représentent des irrégularités variables, susceptibles de perturber la propagation (diffusion).

Toute limitation du milieu peut être considérée comme une "forte inhomogénéité" ; elle produit des phénomènes optiques, que la limite soit plutôt longitudinale : réfraction, réflexion, ou plutôt latérale : diffraction.

1.3 Absorption / émission / dispersion

Les OEM sont susceptibles d'interagir avec les constituants - atomes ou molécules - du milieu dans lequel elles se propagent. Le rayonnement est fortement modifié lorsque la fréquence de l'onde est accordée avec des fréquences caractéristiques (modes) de vibrations ou rotations moléculaires, pour autant qu'un couplage soit possible, ou bien lorsque le rayonnement peut produire des transitions entre des niveaux électroniques des atomes. Nous verrons qu'on ne peut jamais tout à fait échapper à ces interactions mais que dans certains cas, lorsqu'on est loin des fréquences critiques, on peut se limiter à des modèles approchés qui les négligent ou les "moyennent".

1.4 Symétries

Les solutions de l'équation de propagation peuvent avoir différentes symétries selon les conditions aux limites (onde plane, cylindrique, sphérique). On rappelle qu'une onde plane est indéfinie dans toutes les directions, c'est à dire qu'elle dure depuis un temps infini et continuera indéfiniment et qu'elle occupe tout l'espace ce qui se rencontre rarement mais constitue néanmoins une bonne approximation, bien utile dans de nombreux cas.

Pour se rapprocher de la réalité on pourra considérer des faisceaux dits gaussiens qui modélisent fidèlement le rayonnement émis par des sources LASER.

1.5 Polarisation

Nous verrons que dans les milieux isotropes étendus, les OEM sont des ondes transverses c'est à dire que les vecteurs champ électrique et champ magnétique sont partout perpendiculaires à la direction de propagation de l'onde. Ainsi pour caractériser une OEM il faut, en plus de la fréquence et de la direction ou de sa symétrie, préciser la direction d'un des champs. On a choisi de repérer la direction du champ électrique qu'on appelle pour des raisons historiques, direction de polarisation de l'onde. Certains milieux, possèdent des propriétés caractéristiques (indice ou vitesse de propagation) qui dépendent de la polarisation et sont alors dits "biréfringents". Dans le présent cours nous nous limiterons aux milieux isotropes comme les gaz, les liquides isotropes et les cristaux cubiques.

Dans ces conditions le caractère vectoriel n'apparaît qu'aux limites des matériaux et nous utiliseront très souvent un modèle scalaire lorsqu'il est suffisant.

!! Une OEM est toujours polarisée mais

a) selon le déphasage ϕ entre ses composantes, sa polarisation peut être rectiligne ($\phi = 0$ ou π), circulaire ($\phi = \pm\pi/2$) ou elliptique (ϕ quelconque)

b) une OEM peut être une superposition d'OEM de polarisations différentes

c) on dit parfois de certaines qu'elles ne sont pas polarisées mais, c'est une attrape!

Les ondes dites "non-polarisées" sont en fait une superposition d'ondes polarisées avec une distribution d'angles de polarisation dont la moyenne est nulle. On parle aussi dans ce cas de "lumière naturelle".

2 Des équations de Maxwell aux équations de propagation

2.1 Rappel des équations de Maxwell

Avec les valeurs moyennes de densité de charges libres ρ_{lib} et de charges de polarisation (appelées parfois charges "liées") ρ_{pol} et la densité totale de charges : $\rho = \rho_{lib} + \rho_{pol}$ et avec de même les densités de courants : $\vec{j} = \vec{j}_{lib} + \vec{j}_{pol} + \vec{j}_{amp}$, on rappelle la forme des équations de Maxwell entre les champs électrique et magnétique :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{B} &= 0 & \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{et} & & & \\ \text{div} \vec{D} &= \rho_{lib} & \text{rot} \vec{H} &= \vec{j}_{lib} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

et où ϵ_o est la permittivité du vide et μ_o la perméabilité du vide reliées par $\epsilon_o \mu_o c^2 = 1$

2.2 Propriétés caractéristiques du milieu

Afin de décrire la polarisation électrique du milieu soumis à un champ électrique, on introduit un vecteur polarisation :

$$\vec{P} = N \vec{p}$$

où N est le nombre de dipôles par unité de volume et \vec{p} le moment dipolaire électrique. Le vecteur déplacement s'écrit

$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P}$$

De même pour les propriétés magnétiques, on introduit le vecteur aimantation $\vec{M} = N \vec{m}$ où \vec{m} est le moment dipolaire magnétique.

Le vecteur champ magnétique est alors relié au champ auxiliaire par :

$$\vec{B} = \mu_o \vec{H} + \vec{M}$$

Les vecteurs \vec{P} et \vec{M} décrivent les propriétés diélectriques et magnétiques du milieu en réponse à l'excitation des champs \vec{E} et \vec{H} ; ainsi pour les propriétés électriques :

$$\vec{P} = \epsilon_o (\chi_e^{(1)} \vec{E} + \chi_e^{(2)} \vec{E} \vec{E} + \chi_e^{(3)} \vec{E} \vec{E} \vec{E} + \dots)$$

ou encore avec les composantes :

$$P_i = \epsilon_o (\chi_{ij}^{(1)} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots)$$

Pour relier deux vecteurs entre eux il faut tenir compte non seulement de leurs normes mais aussi de leurs directions car ils ne sont pas nécessairement colinéaires et les χ sont alors des tenseurs. En toute rigueur il faut, pour connaître l'état de $\vec{P}(t)$, intégrer sur tous les instants qui ont précédé l'instant t où l'on considère le milieu. Néanmoins, dans le cas de champs harmoniques dont la période est assez grande devant les temps de relaxation atomique, on se contentera de la réponse instantanée et notre étude ne portera ce semestre que sur des milieux dits linéaires (on néglige les $\chi^{(2)}$ et $\chi^{(3)}$) et isotropes, c'est à dire dont la réponse est dans la direction de l'excitation et dont on rend compte avec un $\chi^{(1)}$ scalaire (\vec{P}/\vec{E}).

Finalement un milieu linéaire et isotrope est décrit,

- pour ses propriétés diélectriques par : $\vec{P} = \epsilon_o \chi_e^{(1)} \vec{E}$ où $\chi_e^{(1)}$, susceptibilité diélectrique du premier ordre, est scalaire

- pour ses propriétés magnétiques par : $\vec{M} = \chi_m^{(1)} \vec{H}$ où $\chi_m^{(1)}$, susceptibilité magnétique, est aussi scalaire.

Ainsi, le champ de déplacement est proportionnel au champ électrique :

$$\vec{D} = \epsilon_o \epsilon_r \vec{E}$$

et l'induction magnétique proportionnelle au champ magnétique :

$$\vec{B} = \mu_o \mu_r \vec{H}$$

avec $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ et $\mu_r = 1 + \chi_m$

Ce cours se limitera à l'étude des matériaux non-magnétiques pour lesquels $\mu \approx 1$. C'est le cas de la plupart des matériaux transparents courants, dont μ ne diffère de l'unité que de quelques 10^{-4} .

2.3 Polarisabilité atomique

Afin de décrire un atome plongé dans du rayonnement électromagnétique, on a recours à une théorie des perturbations dépendantes du temps où l'atome de départ est décrit par son hamiltonien habituel (électron dans potentiel coulombien) :

$$\hat{H}_o = \hat{p}^2/2m + V(r)$$

et son interaction avec le champ électromagnétique, par un hamiltonien dipolaire électrique :

$$\hat{H}_I = -\hat{D} \cdot \vec{E}(r_o, t)$$

où \hat{D} représente le moment dipolaire $q\hat{r}$ ($q = -e$)

et où $\vec{E} = \vec{\epsilon} E_o \cos(\omega t)$ avec $\vec{\epsilon}$ "vecteur polarisation" (éventuellement complexe pour décrire une polarisation circulaire).

La fonction d'onde électronique à chaque instant s'écrit :

$$|\psi(r, t)\rangle = \gamma_o \exp(-i\omega_o t) |0\rangle + \sum_j \gamma_j(t) \exp(-i\omega_j t) |j\rangle$$

Expression qui placée dans l'équation de Schroedinger dépendant du temps :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = (\hat{H}_o + \hat{H}_I) |\psi\rangle$$

mène, par un calcul de perturbation du premier ordre à l'expression des $\gamma_j(t)$

$$\gamma_j(t) = \frac{E_o}{2i\hbar} \langle j | \hat{D}_\epsilon | 0 \rangle \left\{ \frac{1 - e^{i(\omega + \omega_{oj})t}}{\omega + \omega_{oj}} - \frac{1 - e^{-i(\omega - \omega_{oj})t}}{\omega - \omega_{oj}} \right\}$$

après intégration à partir de l'instant initial $t=0$ pour lequel l'atome était dans l'état fondamental noté $|0\rangle$ et où $\omega_{oj} = \omega_j - \omega_o$. Avec l'évolution ainsi décrite on peut calculer la valeur de la composante suivant la direction de polarisation $\vec{\epsilon}$ de l'opérateur "moment dipolaire atomique" \hat{D}_ϵ dont on ne conserve que la partie oscillant à la fréquence ω :

$$\langle \psi | \hat{D}_\epsilon | \psi \rangle = \frac{E_o}{2\hbar} \sum_j |\langle j | \hat{D}_\epsilon | 0 \rangle|^2 \left\{ \frac{1}{\omega_{oj} - \omega} + \frac{1}{\omega_{oj} + \omega} \right\} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

d'où on tire la polarisation d'un milieu constitué de N atomes par unité de volume :

$$P = \frac{N}{\hbar} \sum_j \frac{2\omega_{oj} |\langle j | \hat{D}_\epsilon | 0 \rangle|^2}{\omega_{oj}^2 - \omega^2} E_o (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

Afin de rejoindre le résultat du calcul obtenu par une théorie d'électron élastiquement lié, il est d'usage d'introduire une "force d'oscillateur" de transition :

$$f_{on} = \frac{2m\omega_{on}}{\hbar e^2} |\langle n | \hat{D}_\epsilon | 0 \rangle|^2$$

On en déduit l'expression de χ_e :

$$\chi_e = \frac{Ne^2}{m\epsilon_o} \sum_n \frac{f_{on}}{\omega_{on}^2 - \omega^2 - i\omega/\tau_n}$$

où on a introduit un amortissement lié au temps de vie de l'état excité.

Cette valeur de χ , complexe, conduit à un $\epsilon_r = 1 + \chi$ également complexe, dont on verra que le terme imaginaire traduit une absorption de la lumière.

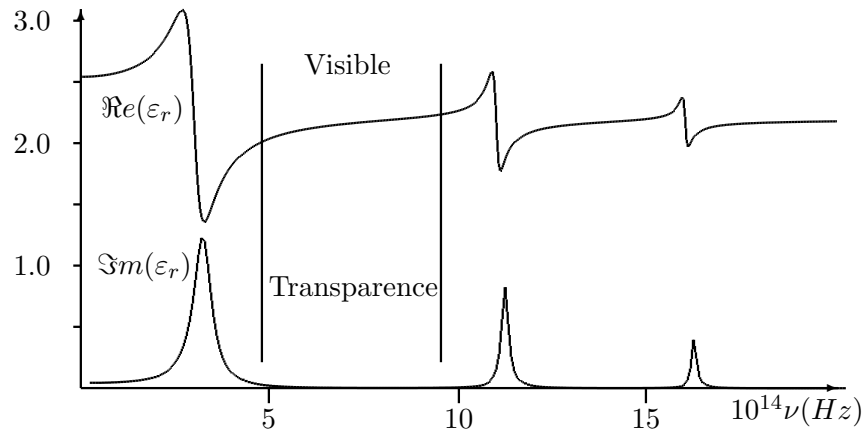


Fig 2 - Partie Réelle et Imaginaire de ϵ_r

Néanmoins on se placera dans une zone dite de transparence où l'on considèrera négligeable cette absorption pour établir les équations de propagation.

2.4 Equations de propagation

Les propriétés des milieux linéaires homogènes et isotropes qui viennent d'être rappelées, permettent de simplifier les équations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{B} &= 0 & \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \text{et} & & & & \text{avec} & \\ \text{div} \vec{E} &= 0 & \text{rot} \vec{B} &= \mu_o \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \vec{B} &= \mu_o \vec{H} \end{aligned}$$

Dans cet ensemble d'équations, les deux équations de la colonne de droite décrivent les propriétés du milieu de propagation.

On en déduit, en se souvenant que les opérateurs sur le temps et l'espace commutent :

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{B} = -\mu_o \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

or $\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta(\vec{E})$, et puisque $\text{div}(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon} \text{div}(\vec{D}) = 0$:

$$\Delta \vec{E} = \mu_o \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Ce qui signifie que chacune des composantes de \vec{E} vérifie l'équation d'onde :

$$\Delta E_i - \frac{1}{v_\phi^2} \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0$$

avec

$$v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_o}}$$

Un raisonnement analogue avec le vecteur \vec{B} mène à une équation semblable pour ses composantes, avec la même vitesse.

$$\Delta B_i - \frac{1}{v_\varphi^2} \frac{\partial^2 B_i}{\partial t^2} = 0$$

Remarque : On notera que l'équation de propagation pour \vec{E} peut aussi s'écrire :

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_o \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$$

Ce qui revient à dire qu'à côté de la propagation d'une onde à la vitesse c , on a un terme de source lié à la polarisation atomique. Cette écriture reflète la situation physique où les dipôles atomiques sont entraînés à la fréquence ω dans un mouvement harmonique et donc rayonnent... On peut montrer que cette onde rayonnée à ω est déphasée par rapport à celle qui l'a provoquée et la somme des contributions de tous ces atomes polarisés et de l'onde incidente, constitue l'onde résultante se propageant à la vitesse $v_\varphi < c$, chaque tranche de matériau constituée de nombreux dipôles atomiques apportant son déphasage.

Les équations de propagation permettent d'introduire une vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}$$

Dans les milieux non magnétiques, $\mu_r = 1$ et

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

On appelle $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ l'indice de réfraction. On a vu que ε_r dépendait de la fréquence même dans les "fenêtres" de transparence (hors des zones de transitions), et donc dans un milieu la vitesse de phase : v_φ dépend de ω , c'est dire qu'il y a dispersion des ondes.

3 Solutions des équations de propagation

En l'absence de source, la symétrie des solutions d'une équation différentielle aux dérivées partielles d'ordre 2 ne dépend que de celle des conditions aux limites.

3.1 Ondes planes progressives

Recherchons les solutions pour un cas simple où on suppose que le champ ne varie ni suivant x ni suivant y (vecteur uniforme dans tout plan $z=\text{cst}$ donné) : il ne dépend que de z . L'équation de propagation du champ se simplifie considérablement :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{v_\varphi^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

En cherchant des solutions sous la forme d'un produit de fonctions d'une de variable : $E(z, t) = F(z)G(t)$, on se ramène à :

$$\frac{1}{F(z)} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{1}{v_\varphi^2 G(t)} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}$$

Pour qu'une fonction qui ne dépend que de t (le membre de droite) soit identique à une fonction qui ne dépend que de z (le membre de gauche) il faut que ces deux fonctions soient égales à une même constante ; appelons $-k^2$ cette constante puisqu'on cherche des solutions oscillantes dans le temps. On s'est ramené à intégrer deux équations différentielles ordinaires à coefficients constants.

$$\frac{d^2 F}{dz^2} = -k^2 F \quad \text{et} \quad \frac{d^2 G}{dt^2} = -v_\varphi^2 k^2 G$$

On trouve des fonctions de base des solutions sous la forme d'exponentielle, en raison de la linéarité des équations, toutes combinaisons de ces solutions seront également solutions.

$$F(z) = F_o e^{\pm ikz} \quad \text{et} \quad G = G_o e^{\pm i\omega t}$$

avec $\omega = v_\varphi k$ et finalement des solutions de base :

$$E = E_o \exp[i(kz - \omega t + \varphi)] \quad \text{ou} \quad E = E_o \exp[i(-kz - \omega t + \varphi)]$$

La solution générale s'écrit sur la base de ces ondes planes progressives monochromatiques (OPPM), comme une somme continue (intégrale) de Fourier.

Pour généraliser à une direction quelconque (au lieu de z) on passe en notation vectorielle $\vec{k} \cdot \vec{r}$:

$$E = E_o \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)]$$

3.1.1 Géométrie

Avec une telle OPPM, les équations de Maxwell se simplifient : $\frac{\partial}{\partial r} \Rightarrow i\vec{k}$ et $\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow -i\omega$ ainsi

$$i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B}$$

d'où on déduit que \vec{B} est perpendiculaire à \vec{k} et à \vec{E} et de

$$i\vec{k} \wedge \vec{H} = -i\omega \vec{D}$$

on déduit que \vec{D} donc \vec{E} est perpendiculaire à \vec{k} et à \vec{H} donc à \vec{B} . Finalement les trois vecteurs $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ forment un trièdre rectangle direct : une OPPM est une OEM transverse dont les vecteurs champ électrique et magnétique sont orthogonaux.

3.1.2 Surfaces d'onde

On définit les surfaces d'ondes comme des surfaces équiphasées : $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi = Cste.$ Pour une onde plane ce sont des plans perpendiculaires à \vec{k} .

3.1.3 Surfaces isoénergétiques

Le vecteur de Poynting, défini comme :

$$\vec{\mathbb{P}} = \Re e(\vec{E}) \wedge \Re e(\vec{H})$$

permet de calculer l'intensité de l'onde : celle-ci est proportionnelle au flux de la moyenne temporelle du vecteur de Poynting. De la géométrie précédente on déduit que $\vec{\mathbb{P}}$ est parallèle à \vec{k} et donc pour une onde plane les surfaces isoénergétiques sont confondues avec les surfaces équiphasées (surfaces d'onde).

3.2 Ondes sphériques progressives

Lorsque la symétrie est sphérique c'est à dire que les champs ne dépendent que de r , distance au centre du repère qui coïncide avec l'origine d'une onde sortante ou le point de convergence d'une onde rentrante, l'équation s'écrit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rE) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

qui conduit en dehors de $r = 0$ à :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rE) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(rE) = 0$$

Equation d'onde à une dimension en rE , d'où on déduit l'expression générale des solutions

$$E(r) = \frac{1}{r} [f(r - vt) + g(r + vt)]$$

Comme pour l'onde plane on peut considérer une décomposition sur des fonctions de base de la forme

$$E(r) = \frac{A}{r} \exp[i(\pm kr - \omega t + \varphi)]$$

Si l'origine du repère d'espace ne correspond pas au centre de la sphère, il faut en tenir compte en substituant à kr l'expression $\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_o)$ où \vec{k} et $\vec{r} - \vec{r}_o$ sont colinéaires :

$$E(\vec{r}) = \frac{A}{\|\vec{r} - \vec{r}_o\|} \exp[i(\pm \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_o) - \omega t + \varphi)]$$

ou encore :

$$E(\vec{r}) = \frac{A}{\|\vec{r} - \vec{r}_o\|} \exp[i(\pm (k\|\vec{r} - \vec{r}_o\| - \omega t + \varphi)]$$

Dans ces expressions, le terme \pm correspond aux deux possibilités : + pour une onde sortante et - pour une onde rentrante.

3.2.1 Surfaces d'onde

Les surfaces d'ondes perpendiculaires à \vec{k} sont évidemment sphériques. De telles ondes peuvent être utilisées pour décrire des faisceaux convergents ou divergents rencontrés en optique géométrique ; on notera toutefois que le fait de les limiter (latéralement) nécessite de s'assurer que les effets de la diffraction peuvent être négligés. On notera également qu'une onde rentrante devient une onde sortante après passage par le centre (passage par un foyer).

Remarque : Un dipôle oscillant possède une symétrie axiale (cylindrique d'axe le moment dipolaire), il rayonne une onde qui loin de ce dipôle source peut valablement être assimilé à une onde sphérique pourvu qu'on se tienne à proximité du plan de symétrie (perpendiculaire au moment dipolaire).

3.2.2 Surfaces isoénergétiques

La norme de la moyenne temporelle du vecteur de Poynting décroît en $1/r^2$ lorsqu'on s'éloigne du centre, les surfaces isoénergétiques sont les mêmes sphères que les surfaces d'ondes.

3.3 Ondes cylindriques, faisceaux gaussiens

Dans la réalité, notamment avec des sources LASER, on observe des faisceaux peu divergents pour lesquels l'énergie reste confinée autour d'un axe. On cherche des solutions susceptibles de décrire ces faisceaux, sous la forme suivante :

$$E = \psi(r, z)e^{i(kz - \omega t)}$$

où $\psi(r, z)$ est une fonction lentement variable en z et représente un profil gaussien :

$$\psi(r, z) = \exp -\frac{\sigma^2 r^2}{2} e^{iP(z)}$$

L'hypothèse de variation lente de $\psi(r, z)$ en z permet de justifier qu'on néglige le terme en $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$ devant les autres termes dans l'expression de $\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} - k^2 \psi \right) e^{i(kz - \omega t)}$$

En appliquant l'équation d'onde à l'expression de $E(r, z)$ et en tenant compte de l'approximation on obtient une nouvelle relation :

$$(\sigma^4 - 2ik\sigma \frac{d\sigma}{dz})r^2 - 2\sigma^2 - 2k \frac{dP}{dz} = 0$$

Qui, devant être vérifiée pour tout r , mène aux relations suivantes :

$$\frac{i}{k} = -\frac{2}{\sigma^3} \frac{d\sigma}{dz} \quad \text{et} \quad \frac{dP}{dz} = -\frac{\sigma^2}{k}$$

et par intégration à

$$\frac{1}{\sigma^2} = \frac{iz}{k} + \frac{1}{\sigma_o^2}$$

où $\sigma_o^2 = \sigma(0)^2$ est une constante d'intégration prise réelle par choix de phase. Ainsi, en séparant partie réelle et imaginaire :

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_o^2}{1 + [\frac{z}{z_r}]^2} - \frac{ik}{z[(\frac{z_r}{z})^2 + 1]}$$

où $z_r = \frac{k}{\sigma_o^2} = \frac{\pi n w_o^2}{\lambda}$ avec w_o la distance à l'axe pour laquelle le champ électrique est divisé par e (*w pour waist, la taille en anglais...*). La longueur caractéristique z_r s'appelle la longueur de Rayleigh.

L'équation en P qui devient :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{1}{z_r + iz}$$

s'intègre également :

$$P(z) = i \text{Log}(z_r + iz) - i \text{Log}(z_r) = i[\text{Log}\sqrt{z_r^2 + z^2} - \text{Log}(z_r)] - \text{Arctan}(z/z_r)$$

Finalement on obtient une solution de la forme :

$$\psi(r, z) = \frac{z_r}{\sqrt{z_r^2 + z^2}} \exp -\frac{\sigma_o^2 r^2}{2[1 + (\frac{z}{z_r})^2]} \exp -i\left\{ \frac{kr^2}{2z[1 + (\frac{z_r}{z})^2]} + \text{Arctan}\left(\frac{z}{z_r}\right) \right\}$$

d'où on tire l'expression réelle, complète et plus parlante du champ :

$$E(r, z, t) = E_o \frac{w_o}{w(z)} e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} \cos(kz - \omega t + \Phi(r, z))$$

avec une largeur du faisceau de :

$$w(z) = w_o \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_r}\right)^2}$$

et avec un terme de phase :

$$\Phi(r, z) = \frac{kr^2}{2R(z)} + \text{Arctan}(z/z_r)$$

Où

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_r}{z}\right)^2 \right]$$

représente un rayon de courbure des surfaces équiphasés. Toutes ces valeurs sont fonction de la longueur caractéristique de Rayleigh :

$$z_r = \frac{\pi n w_o^2}{\lambda}$$

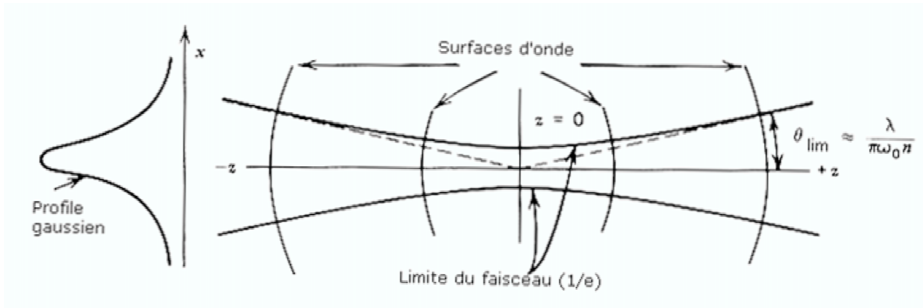


Fig 3 - Caractéristiques d'un faisceau gaussien

On notera que dans la limite des grandes distances $z \rightarrow \infty$ l'expression tend vers :

$$E = \frac{A_o}{R} \exp \left[ikz + ik \left(\frac{x^2 + y^2}{2R} \right) \right]$$

Qui représente le développement au premier ordre de l'onde sphérique :

$$\frac{A_o}{R} \exp \left[ik \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right]$$

lorsque $R^2 = z^2 \gg x^2 + y^2$.

On notera que dans cette limite, le faisceau diverge avec une ouverture totale de

$$\theta = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2w}{z} = \frac{2w_o}{z_r} = \frac{2\lambda}{\pi n w_o}$$

valeur à rapprocher de la limite de la diffraction de $1.22 \frac{\lambda}{n w_o}$ pour un trou de rayon w_o .

- . . . -