



**HAL**  
open science

# Optique Ondulatoire : Chapitre VIII - Polarisation - Introduction aux milieux biréfringents - Eléments d'optique non-linéaire

Gérard Rebmann

► **To cite this version:**

Gérard Rebmann. Optique Ondulatoire : Chapitre VIII - Polarisation - Introduction aux milieux biréfringents - Eléments d'optique non-linéaire. Licence / L3. 2007. sfo-00292572

**HAL Id: sfo-00292572**

**<https://hal-sfo.ccsd.cnrs.fr/sfo-00292572>**

Submitted on 7 Jul 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## **Chapitre VIII**

*Polarisation*  
*Introduction aux milieux biréfringents*  
*Éléments d'optique non-linéaire*

*NOTES*

## 1 Introduction

Ce chapitre qui termine le cours d'optique de licence a pour objectif d'ouvrir une fenêtre sur des éléments utiles pour compléter des études en optique. Les notions présentées ici n'y seront pas approfondies cette année.

On a, au cours des précédents chapitres pratiquement toujours eu une approche scalaire de l'optique, c'est à dire que les amplitudes calculées ont été considérées comme indépendantes de la polarisation - de la direction du champ électrique  $\vec{E}$  - de l'onde. Cette approche est totalement justifiée lorsqu'on se place assez loin des sources des phénomènes étudiés pour des OEM qui se propagent dans des milieux "l.h.i.", mais elle a ses limites. La polarisation de la lumière est nécessaire pour expliquer de nombreux phénomènes. Ce chapitre se propose d'en examiner quelques uns.

## 2 Rayonnement du dipôle

### 2.1 Equations de propagation avec sources

On rappelle les définitions du potentiel vecteur  $\vec{A}$  et du potentiel électrique  $V$  :

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} V$$

En présence de source de rayonnement comme un dipôle, si on choisit la jauge de Lorentz :

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

les équations de Maxwell mènent aux équations suivantes sur les potentiels  $V$  et  $\vec{A}$  :

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \quad \text{et} \quad \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

où  $\vec{j}$  et  $\rho$  représentent les densités volumiques de courant et de charge et dont les solutions en potentiels retardés s'écrivent :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}_1, t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} d^3 \vec{r}_1 \quad \text{et} \quad V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}_1, t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} d^3 \vec{r}_1$$

Solutions qui montrent que les sources situées en  $\vec{r}_1$  contribuent aux potentiels en  $\vec{r}$  à l'instant  $t$  par leur état en  $t' = t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c$ .

### 2.2 Dipôle électrique

Un dipôle électrique est un ensemble de deux charges électriques de signes opposés et dont la charge totale est nulle. On s'intéresse ici à un dipôle placé en 0, orienté suivant  $\vec{e}_z$  oscillant à une fréquence  $\omega$  et dont le courant résultant peut s'écrire :

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \Re \{ j_\omega e^{-i\omega t} \delta(\vec{r}) \} \vec{e}_z$$

Un tel dipôle rayonnant peut servir à modéliser des antennes radio, des atomes ou des molécules excités (modèle d'électrons élastiquement liés) ou encore des atomes (ou des molécules) qui, polarisés par un rayonnement dans lequel ils sont plongés, réémettent ou diffusent la lumière.

On a déjà rencontré au Chap.I, le moment dipolaire atomique sous un angle quantique :

$\langle \psi | \hat{D}_e | \psi \rangle$ , on décrit ici par un modèle classique la polarisation avec un moment dipolaire à la fréquence  $\omega$  :

$$\vec{d} = \Re\{gae^{-i\omega t}\}\vec{e}_z = \Re\{d_\omega e^{-i\omega t}\}\vec{e}_z$$

par une densité de courant associée, localisée à l'origine :

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{\omega}{ia} d_\omega \delta(\vec{r}) e^{-i\omega t} \vec{e}_z$$

le potentiel vecteur qui résulte de cette distribution de courant très particulière s'écrit :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \omega}{4\pi ia} d_\omega \vec{e}_z \int \int \int \frac{e^{-i\omega(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_1|}{c})}}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \delta(\vec{r}_1) d^3 r_1$$

qui s'écrit encore :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \simeq \frac{\mu_0 \omega}{4\pi ia} d_\omega \vec{e}_z \frac{e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r} = \frac{\mu_0 \omega}{4\pi ia} d_\omega \vec{e}_z \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}$$

d'où on déduit les composantes du champ électromagnétique :

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{\mu_0 \omega}{4\pi ia} d_\omega \vec{\nabla} \wedge \left[ \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \vec{e}_z \right] = \frac{\mu_0 \omega}{4\pi ia} d_\omega \vec{\nabla} \left( \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \right) \wedge \vec{e}_z$$

or

$$\vec{\nabla} \left( \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \right) \vec{u}_r = \left[ \frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right] e^{i(kr - \omega t)} \vec{u}_r$$

d'où avec  $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$  et en ne retenant que le terme principal à grande distance :

$$\vec{B} \simeq \frac{\mu_0 k \omega}{4\pi r a} d_\omega e^{i(kr - \omega t)} (\vec{u}_r \wedge \vec{e}_z) = -\frac{\mu_0 \omega^2 d_\omega}{4\pi c a} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \sin \theta \vec{u}_\varphi$$

et  $\vec{E}$  déduit de l'expression de  $\vec{B}$  par la relation  $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -(i\omega/c^2)\vec{E}$  :

$$\vec{E} \simeq \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \frac{\omega^2 d_\omega}{a} e^{i(kr - \omega t)} (\vec{u}_r \wedge \vec{e}_z) \wedge \vec{u}_r = -\frac{\omega^2 d_\omega}{4\pi \epsilon_0 c^2 a} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \sin \theta \vec{u}_\theta$$

### Interprétation

• Le champ est proportionnel à  $\omega^2$  donc à l'accélération de la charge. Ce résultat est général, toute charge accélérée rayonne.

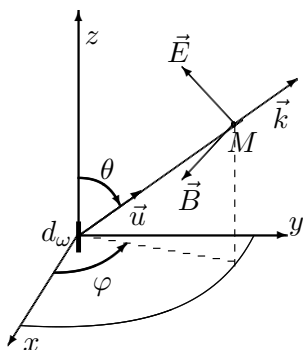


Figure 1 - Géométrie du rayonnement

• Le champ électrique varie comme  $\sin \theta$  : le rayonnement est maximum dans le plan perpendiculaire au dipôle et nul dans sa direction ( $\vec{Oz}$ ). Le diagramme ci-contre représente le vecteur de Poynting en fonction de la direction. La symétrie est cylindrique d'axe ( $z'$ ).

- Le champ en  $M$ , à grande distance du dipôle  $d_\omega$ , a une structure d'onde sphérique,  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$  forment un trièdre direct.
- La lumière rayonnée est polarisée dans le plan contenant le dipôle.

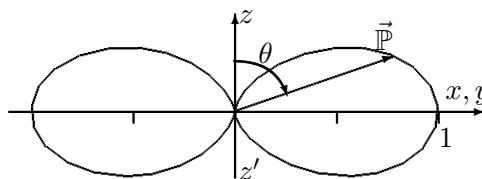


Figure 2 - Diagramme de rayonnement du dipôle

### 2.3 Couleur du temps et polarisation du ciel

La densité de rayonnement ou éclairement est reliée à la moyenne temporelle du vecteur de Poynting :

$$\langle \vec{P} \rangle_T = \langle \Re(\vec{E}) \wedge \Re(\vec{H}) \rangle_T = \frac{\langle E^2 \rangle_T}{Z_v} \vec{u}_r$$

où l'impédance du vide  $Z_v = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega$

La puissance totale rayonnée sera l'intégrale sur une sphere de rayon  $r$  de ce vecteur, soit :

$$\mathcal{P} = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \langle \vec{P} \rangle_T \cdot \vec{u}_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\omega^4 d_\omega^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 c^4 a^2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta d\varphi$$

et finalement :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{12\pi \epsilon_0 c^3} \left(\frac{d_\omega}{a}\right)^2 \omega^4$$

Ceci indique que la puissance diffusée dépend de la fréquence, elle est beaucoup plus importante pour les fréquences les plus hautes. Si on se souvient que le spectre visible s'étend en longueur d'onde entre 390 nm et 780 nm soit un facteur 2 entre le rouge et le violet en fréquence, la puissance diffusée variera d'un facteur  $2^4 = 16$  du rouge au violet. Le ciel devrait donc être violet ! C'est omettre que l'œil n'est pas également sensible dans tout le spectre visible, il est plus sensible dans le jaune orangé que dans le violet. La moyenne qui s'opère ainsi nous fait apparaître le ciel bleu.

Un tel modèle classique fonctionne bien que les atomes devraient être décrits par la mécanique quantique. Pour les fréquences du rayonnement très inférieures aux fréquences de transitions électroniques (notre cas) on parle de diffusion élastique de Rayleigh. À partir d'un hamiltonien d'interaction où il intervient des éléments faisant appel à des transitions dites virtuelles vers des états intermédiaires d'énergie élevée :

$$\langle a'; 1_j | \hat{H}_{int} | a; 1_l \rangle \propto \sum_b \left[ \frac{\langle a' | \hat{D}_j | b \rangle \langle b | \hat{D}_l | a \rangle}{E_a - E_b + \hbar\omega} + \frac{\langle a' | \hat{D}_l | b \rangle \langle b | \hat{D}_j | a \rangle}{E_a - E_b - \hbar\omega} \right]$$

où  $a$  et  $a'$  représente l'atome dans le niveau bas et  $b$  un niveau intermédiaire excité, où on passe d'un photon de paramètres  $l$  à un photon de paramètres  $j$  et de même énergie et où  $\hat{D}$  représente un opérateur dipolaire. Le calcul complet qui sort du cadre de ce cours mène néanmoins également à une dépendance en  $(\frac{\omega}{\omega_0})^4$  (Ouf!)

Voyons la polarisation du ciel bleu :

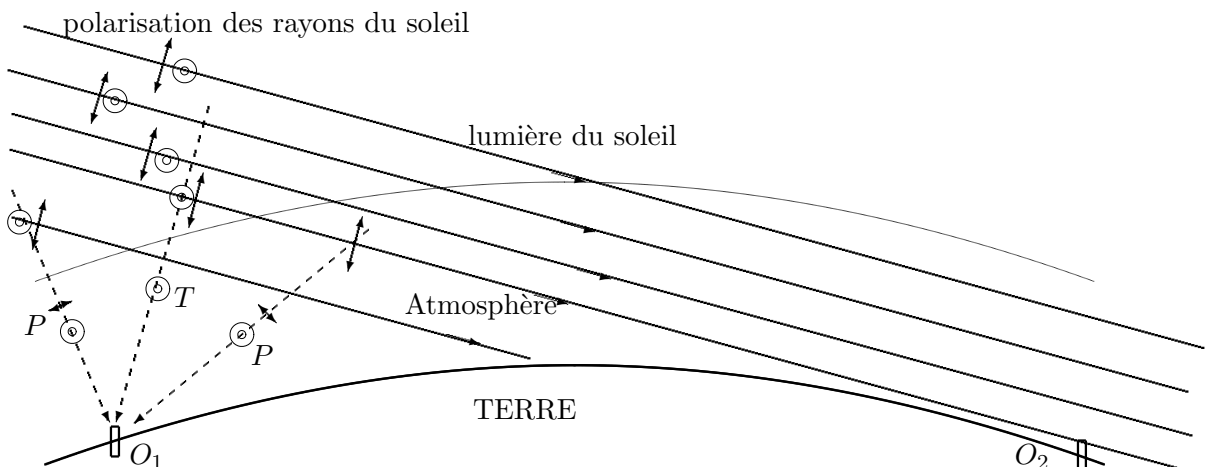


Figure 3 - Polarisation de la lumière du ciel

La lumière diffusée par les molécules de l'atmosphère terrestre est polarisée : le champ EM des rayons solaires est transverse comme rappelé sur la figure, il polarise les molécules de l'atmosphère que l'on peut modéliser par des dipôles qui, à leur tour, rayonnent. Il en résulte que la lumière du ciel bleu est totalement polarisée (*T*) seulement dans un plan perpendiculaire aux rayons solaires et partiellement (*P*) polarisée ailleurs. Pour un observateur  $O_1$ , la lumière diffusée qui est partiellement polarisée est une superposition des deux polarisations orthogonales possibles.

Les rayons qui ont parcouru un important trajet dans l'atmosphère ont subi plus de diffusions d'où un appauvrissement dans les hautes fréquences : ils apparaissent orangé à rouge pour l'observateur  $O_2$ .

En toute rigueur, lorsque les atomes ou les molécules sont disposés régulièrement comme dans un solide une telle diffusion ne se produit pas latéralement, on admettra que la lumière est ainsi diffusée en raison des fluctuations de densité atmosphérique, ce qui explique que le soleil couchant n'apparaît pas toujours aussi rouge, les conditions atmosphériques influencent les observations. Un ciel "perturbé" donnera plus de couleurs. La lumière diffusée par les nuages ne produit pas le même effet car les gouttelettes d'eau qui les composent sont de la taille de quelques longueurs d'onde, c'est plus une diffraction multiple et les effets de la fréquences sont moyennés, le nuage paraîtra d'autant plus foncé que la lumière aura subi plus d'évènements diffusant : nuage blanc peu dense, nuage noir "chargé". Une exception toutefois avec certains nuages élevés, constitués d'aiguilles de glace, avec lesquels on observe des arcs souvent irisés dus à des réflexions et réfraction multiples. C'est plutôt alors un phénomène similaire aux arcs en ciel dus aux réfractions multiples dans les gouttes d'eau.

### 3 Description de la polarisation de la lumière

On a vu rapidement au Ch.I que la polarisation d'une OEM, décrite à l'aide du champ électrique pouvait être linéaire, elliptique ou un "mélange". Afin de décrire les états de polarisation de la lumière, on peut utiliser le formalisme de JONES.

#### 3.1 Vecteurs de JONES

Afin de décrire plus complètement la polarisation, écrivons le vecteur champ électrique d'une onde plane se propageant suivant  $Oz$  :

$$\vec{E}(z, t) = \Re\{\vec{E}_o e^{i(kz - \omega t)}\}$$

$$E_x(z, t) = E_{ox} \cos(kz - \omega t + \varphi_x) \quad E_y(z, t) = E_{oy} \cos(kz - \omega t + \varphi_y)$$

où

$$\vec{E}_o = \vec{e}_x E_{ox} e^{i\varphi_x} + \vec{e}_y E_{oy} e^{i\varphi_y}$$

qui peut encore s'écrire sur la base des vecteur unitaires des axes  $Ox, Oy$  :

$$\vec{E}_o = \begin{pmatrix} E_{ox} e^{i\varphi_x} \\ E_{oy} e^{i\varphi_y} \end{pmatrix}$$

On décrira évidemment la même polarisation si on multiplie ce vecteur à composantes complexes par un nombre complexe, ainsi les polarisations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{pmatrix} E_{ox} e^{i\varphi_x} \\ E_{oy} e^{i\varphi_y} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{E_{oy}}{E_{ox}} e^{i(\varphi_y - \varphi_x)} \end{pmatrix}$$

Comme la polarisation est indépendante de l'amplitude, il est commode de normaliser le vecteur et d'introduire  $\psi$  et  $\phi$  tels que :

$$\tan \psi = \frac{E_{oy}}{E_{ox}} \quad \phi = \varphi_y - \varphi_x$$

### 3.1.1 Définition : vecteur de Jones

Une polarisation est alors définie (mais pas de manière unique) par un vecteur de JONES :

$$\hat{p}(\psi, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ e^{i\phi} \sin \psi \end{pmatrix}$$

### 3.1.2 Quelques cas particuliers

Les polarisations les plus simples déjà rencontrées :

- Polarisation linéaire suivant  $\vec{Ox}$  ou  $\vec{Oy}$  :  $\hat{p}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ;  $\hat{p}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Polarisation linéaire faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe  $Ox$  :  $\hat{p}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$
- Polarisation circulaires gauche ou droite :  $\hat{\sigma}_g = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$  ;  $\hat{\sigma}_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

### 3.1.3 Opérations et propriétés

- Produit scalaire :

$$\hat{p}_1 \cdot \hat{p}_2 = p_{1x}p_{2x} + p_{1y}p_{2y}$$

- Normalisation : Un vecteur de Jones est normalisé lorsque

$$\hat{p}^* \cdot \hat{p} = 1$$

Attention \* signifie complexe conjugué!

- Orthogonalité : deux vecteurs de Jones  $\hat{p}_1$  et  $\hat{p}_2$  sont orthogonaux si :

$$\hat{p}_1^* \cdot \hat{p}_2 = \hat{p}_1 \cdot \hat{p}_2^* = 0$$

## 4 Notions de biréfringence

### 4.1 Origine et occurrence

Certains matériaux anisotropes (cristaux) présentent de la biréfringence, c'est à dire provoquent une double réfraction. Les observations montrent que les polarisations des faisceaux réfractés sont orthogonales. L'explication tient à l'anisotropie de ces matériaux (l.h. mais plus i.). On verra que la biréfringence des cristaux liquides est utilisée pour la commutation optique dans les écrans LCD (Liquid Crystal Display) des ordinateurs. On se souvient (Ch.I) que la polarisation atomique qui intervient dans l'indice de réfraction s'écrit :

$$P = \frac{N}{\hbar} \sum_j \frac{2\omega_{oj} | \langle j | \hat{D}_\epsilon | 0 \rangle |^2}{\omega_{oj}^2 - \omega^2} E_o \cos \omega t$$

L'anisotropie s'exprime par le fait que  $\hat{D}_\epsilon$  - opérateur moment dipolaire de l'atome - qui dépend de la polarisation  $\vec{\epsilon}$ , ne couple pas les mêmes états selon la polarisation du rayonnement (règles de sélection). Ainsi on aura des  $\omega_{oj}$  différents selon la polarisation et, même



loin des  $\omega_{oj}$  de résonance, l'indice (par  $\chi_e$ ) sera différent selon la polarisation et deux indices différents provoquent deux réfractions possibles.

Cela revient à représenter les atomes dans un modèle classique par des oscillateurs avec des forces de rappel qui dépendent de la direction de l'axe. Prenons le cas simple et limite où pratiquement les charges ne peuvent osciller que suivant  $oz$ .

- Pour une onde se propageant suivant l'axe  $Z'Z$ , les polarisations dans les directions  $X$  et  $Y$  sont équivalentes, on observe qu'un seul indice et pas de biréfringence, on parle d'indice "ordinaire".
- Pour une onde se propageant dans un plan  $\Pi$  contenant  $Z$  ( $\vec{k} \cdot \vec{e}_z \neq 0$ ) on observe de la biréfringence. Les forces de rappel (modèle classique) sont identiques au cas précédent pour une polarisation orthogonale au plan  $\Pi$  (indice ordinaire) et différente sinon (indice "extraordinaire").

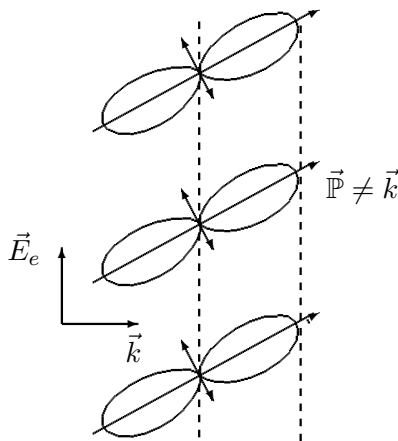


Figure 4 - Rayonnement des atomes dans le plan  $\Pi$  (cas limite)

- Le "mouvement des charges" est pratiquement suivant  $Z'Z$  (cas limite) et le rayonnement du dipôle envoie l'essentiel de l'énergie dans un plan perpendiculaire à  $Z'Z$  et dans une direction différente de la direction de l'onde. Les plans de phase sont toujours perpendiculaires à  $\vec{k}$ , mais la direction que suit l'énergie donnée par  $\vec{P}$ , n'est plus parallèle à  $\vec{k}$ !

Un tel rayon est dit "extraordinaire" et l'indice qui lui est associé aussi.

Plus précisément, l'indice décrit la vitesse de propagation de l'onde qui résulte de la composition de l'onde incidente avec celle induite par la polarisation, l'énergie totale ( $\vec{P}$ ) se dirige dans une direction intermédiaire entre celle de l'onde diffusée et celle de l'onde incidente mais le résultat essentiel, une direction différente pour  $\vec{P}$  et  $\vec{k}$  reste caractéristique de la situation.

## 4.2 Surface des indices

Pour représenter l'indice en fonction de  $\vec{k}$  on trace la surface  $n(\vec{k})$ , elle présente deux nappes (ordinaire et extraordinaire) qui coïncident dans la direction de l'axe d'anisotropie. Les matériaux ainsi décrits, (avec un seul axe particulier) sont dits uniaxes, il n'y qu'une direction selon laquelle les deux nappes coïncident : un seul axe optique. Il existe des matériaux biaxes, très anisotropes, pour lesquels les trois directions présentent des "forces de rappel différentes" :

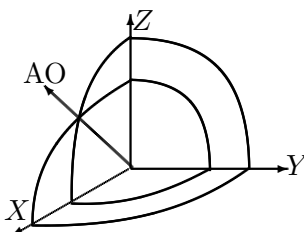


Figure 5 - Matériau biaxe

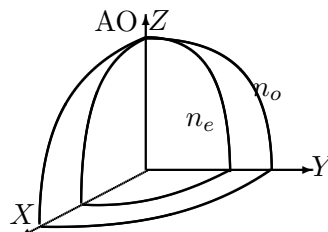


Figure 6 - Matériau uniaxe

### 4.3 Interférences avec une lame biréfringente

On considère une lame taillée dans un matériau biréfringent telle que pour une onde se propageant suivant  $oz$  on ait deux indices différents  $n_x \neq n_y$  liés aux polarisations. Les ondes polarisées suivant  $Ox$  ayant une vitesse différente de celles polarisées suivant  $Oy$ , il faut décomposer tout champ sur ces polarisations particulières  $(x, y)$  les faire se propager chacune à sa vitesse et recomposer l'onde à la sortie de la lame. Afin d'obtenir le maximum de contraste on envoie autant d'amplitude sur chaque polarisation (polariseur à  $45^\circ$  des axes de la lame). La lame produit les déphasages suivants :

$$\varphi_x = \frac{2\pi}{\lambda}(n_x - 1)l \quad \text{et} \quad \varphi_y = \frac{2\pi}{\lambda}(n_y - 1)l \quad (1)$$

On décrit la lame dans le formalisme de JONES par une matrice  $2 \times 2$  :

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_x} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_y} \end{pmatrix} \quad \text{On pose } \varphi = \varphi_y - \varphi_x = \frac{2\pi}{\lambda}(n_y - n_x)l$$

$$\hat{L} = e^{i\phi} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \quad \text{et } \phi = \frac{1}{2}(\varphi_x + \varphi_y) = \frac{2\pi}{\lambda}(\frac{1}{2}(n_x + n_y) - 1)l$$

$$\text{alors } \varphi_x = \phi - \frac{\varphi}{2} \text{ et } \varphi_y = \phi + \frac{\varphi}{2}$$

Le résultat en sortie de lame s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \\ e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

qui, projeté sur un polariseur perpendiculaire au premier :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donne :  $\frac{1}{2}(e^{-i\varphi/2} - e^{i\varphi/2}) = -\sin \varphi/2$

Donc une intensité en

$$I_o \sin^2 \varphi/2 = I_o \sin^2 \left( \frac{\pi}{\lambda}(n_y - n_x)l \right) = \frac{I_o}{2}(1 - \cos \varphi)$$

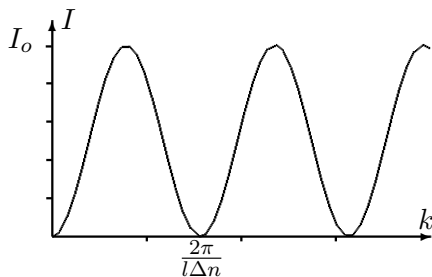


Figure 7 - Intensité

L'intensité produite par le dispositif constitué d'une lame biréfringente entre deux polariseurs croisés est présentée dans la figure ci-contre. Elle dépend de  $\lambda$  et peut donc s'annuler pour certaines longueurs d'onde.

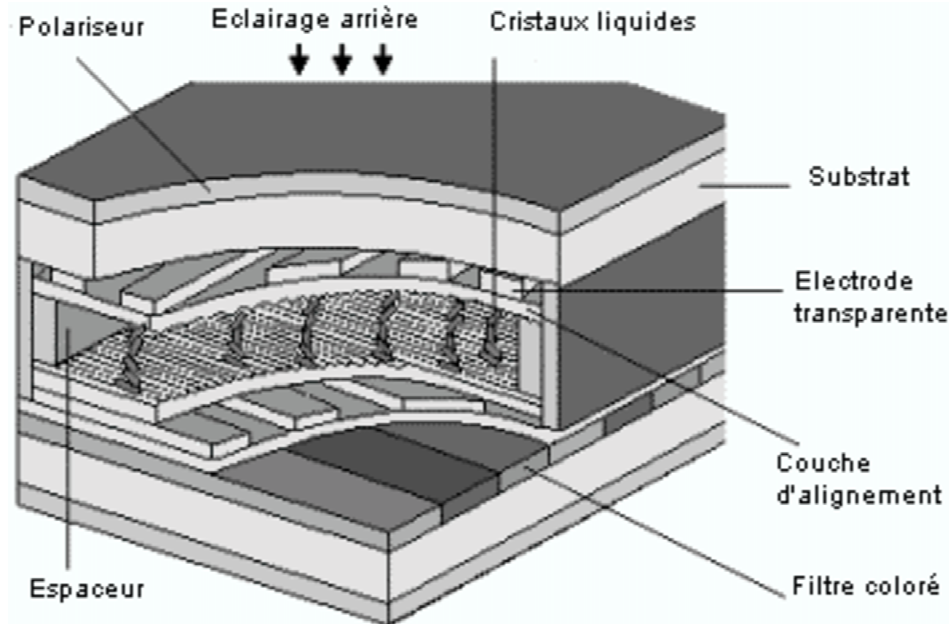
### 4.4 Application : écran "LCD"

Les cristaux liquides sont des matières organiques amorphes, qui ont la propriété de modifier la polarisation de la lumière, si on leur applique un champ électrique. Leurs molécules, de forme allongée, s'ordonnent naturellement de manière parallèle les unes aux autres.

Déposées sur une plaque gravée de sillons, les molécules vont s'aligner dans les sillons. Le principe de l'écran LCD consiste à placer des cristaux liquides en sandwich entre deux plaques gravées et orientées à  $90^\circ$ . Les molécules, au repos, vont passer progressivement d'une orientation à l'autre. L'écran est rétro-éclairé avec une lumière polarisée

parallèlement aux sillons de la première plaque, sa polarisation est guidée par les molécules et après une rotation de  $90^\circ$  elle passe par un deuxième filtre polarisant.

Sous l'effet d'une tension de commande, les molécules vont progressivement s'orienter dans le sens du champ électrique et la lumière sera bloquée par le deuxième polariseur. Chaque pixel de l'image est constitué d'une cellule de ce type devant laquelle est placé un filtre rouge, vert, ou bleu.



La principale difficulté réside dans le système de commande des pixels.

Le système à matrice passive (contrôle des pixels par ligne ou colonne) utilisé dans les premiers ordinateurs portables est beaucoup trop lent pour convenir au flux d'images vidéo. Il faut donc employer des matrices dites actives (contrôle individuel des pixels), constituées de transistors en couche mince TFT (Thin Film Transistor). Ces matrices assurent une commutation rapide. Cependant, plus la taille de l'écran augmente, plus le nombre de transistors est grand et plus les risques de défaut augmentent.

## 5 Notions d'optique non-linéaire

### 5.1 Introduction

Bien que d'une manière générale on puisse dire qu'on est en présence d'un phénomène non linéaire lorsqu'un matériau éclairé par un ensemble de radiations de fréquences  $\{\omega_i\}$  produit des radiations de fréquences différentes de l'ensemble initial (ex. diffusion RAMAN), on réserve généralement le terme "optique non linéaire" à la production d'harmoniques et de combinaisons  $\omega_i \pm \omega_j$  des fréquences initiales.

On s'intéresse ici à la génération de second harmonique ( $\omega \rightarrow 2\omega$ ) et aux combinaisons linéaires des fréquences ( $\omega_1 \pm \omega_2$ ) qui sont utilisées dans l'amplification et l'oscillation paramétrique.

Ces phénomènes n'apparaissent que pour de fortes intensités et n'ont pu être mis en évidence qu'avec des LASERS puissants : les premières générations de second harmonique (optique) sont publiées en 1961, obtenues à l'aide de laser à rubis, par FRANKEN dans le quartz puis par GIORDMAINE dans le KDP ( $KH_2PO_4$ ).

Ces phénomènes sont dus à la réponse au champ électromagnétique de milieux particuliers dont la polarisabilité possède des termes non-linéaires. Afin de les décrire on développe la polarisation atomique (ou moléculaire) :

$$\vec{p} = (\vec{p}_0) + [\alpha]\vec{E} + [\beta]\vec{E}\vec{E} + [\gamma]\vec{E}\vec{E}\vec{E} + \dots$$

On appelle  $[\alpha]$  le “tenseur” de polarisabilité atomique ou moléculaire, il établit la relation entre les deux vecteurs qui ne sont en général pas colinéaires. Les tenseurs  $[\beta]$  et  $[\gamma]$ , plus compliqués sont nommés “hyperpolarisabilités” d’ordre 2 et 3 respectivement, on ne s’intéressera pas au terme  $\vec{p}_o$  de polarisation constante, présent en l’absence de champ externe.

On peut se représenter l’origine de ces non-linéarités dans le potentiel de liaison de l’électron qui, notamment pour des déplacement important, n’a plus de raison d’être quadratique (dissymétrie). Afin de faire le lien avec l’indice de réfraction on reprend l’expression de la polarisation du milieu en termes de susceptibilité diélectrique :

$$\vec{P} = \varepsilon_o([\chi]^{(1)}\vec{E} + [\chi]^{(2)}\vec{E}\vec{E} + [\chi]^{(3)}\vec{E}\vec{E}\vec{E} + \dots)$$

Le premier terme qui représente les propriétés linéaires du matériau est à l’origine de l’indice de réfraction, les autres termes sont des susceptibilités non-linéaires. On va maintenant s’intéresser plus particulièrement au premier des termes non-linéaires.

## 5.2 Les tenseurs $[\chi]^{(2)}$

La signification du terme  $[\chi]^{(2)}\vec{E}\vec{E}$  doit se comprendre comme :

$$P_i^{NL} = \varepsilon_o \chi_{ijl}^{(2)} E_j E_l$$

où les  $i, j, l$  sont pris dans  $x, y, z$ .

$\chi$  est un tableau à  $3 \times 3 \times 3 = 27$  composantes ... heureusement la moindre symétrie annule de nombreuses composantes. Pratiquement on ne s’intéressera qu’à quelques composantes de  $\chi$  qui couplent les composantes de  $\vec{E}$  présentes dans la géométrie expérimentale. Par exemple, imaginons un matériau où  $\chi_{yxx} \neq 0$  :

$$P_y^{NL} = \varepsilon_o \chi_{yxx} E_x E_x = d' E_x^2$$

où on a regroupé l’effet dans un coefficient  $d'$ .

On conçoit qu’il apparaît une onde polarisée suivant  $y$  d’amplitude proportionnelle à  $E_x^2$  : cette polarisation joue un rôle de “source” à  $2\omega$  et on dira qu’il y a génération de second harmonique. On notera que ce terme introduit également un terme constant résultat d’un “redressement optique”.

$$P^{NL} = d' E_o^2 \cos^2 \omega t = \frac{d' E_o^2}{2} (1 + \cos 2\omega t)$$

Comme pour l’indice et les susceptibilités linéaires, les coefficients des susceptibilités non-linéaires présentent une dépendance en fréquence, cette dépendance a été établie par MILLER :

$$\chi_{ijl}^{(2)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \chi_{ii}^{(1)}(\omega_1) \chi_{jj}^{(1)}(\omega_2) \chi_{ll}^{(1)}(\omega_3) \Delta_{ijl}$$

où  $\Delta_{ijl}$  (dit “Delta de Miller”) est un nombre de l’ordre de 1 à quelques unités, caractéristique du matériau.

## 5.3 De Maxwell à Manley-Rowe

On a vu que les équations de Maxwell permettaient d’aboutir à l’équation de propagation :

$$\overline{\Delta} \vec{E} - \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_o \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$$

qui devient si on décompose la polarisation en linéaire et non-linéaire  $P = P^L + P^{NL}$

$$\overline{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_o \frac{\partial^2 \vec{P}^L}{\partial t^2} = \mu_o \frac{\partial^2 \vec{P}^{NL}}{\partial t^2}$$

où le premier membre n'est autre que celui de l'équation classique de propagation :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}^{NL}}{\partial t^2}$$

On retrouve l'équation de propagation habituelle mais avec un second membre non nul, qui traduit une "source" de champ.

On va résoudre cette équation de manière approchée, dans une géométrie simplifiée. On est amené à faire plusieurs hypothèses simplificatrices :

- H1 - Conservation de la direction de polarisation.

On suppose que la propagation conserve la polarisation linéaire (absence de pouvoir rotatoire). Cette hypothèse permet de ne considérer que les amplitudes scalaires.

- H2 - Ondes "pseudo-planes"

On cherche des solutions qui ont la géométrie d'ondes planes qui se propagent suivant  $Oz$  mais dont l'amplitude varie au cours de la traversée du milieu (cristal non-linéaire). Cette hypothèse permet de rendre compte de la fonction de "source" du cristal. On écrira pour chaque  $\omega$  présente :

$$E_\omega(z, t) = E_\omega(z) \cos(kz - \omega t + \phi)$$

- H3 - Amplitudes lentement variables.

On cherche des solutions dont les amplitudes varient lentement en fonction de l'abscisse. Cette hypothèse permet de négliger les termes  $\frac{d^2 E_\omega}{dz^2}$  devant les termes en  $k \frac{dE_\omega}{dz}$

Avec les hypothèses émises,

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{dE_\omega}{dz} \cos(kz - \omega t + \phi) - E_\omega(z) k \sin(kz - \omega t + \phi)$$

et puisque  $E$  ne varie qu'en  $z$  le laplacien se réduit à

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \left[ \frac{d^2 E_\omega}{dz^2} - E_\omega(z) k^2 \right] \cos(kz - \omega t + \phi) - 2 \frac{dE_\omega}{dz} k \sin(kz - \omega t + \phi)$$

où en appliquant H3 l'équation de propagation devient :

$$-k^2 E_\omega \cos(kz - \omega t + \phi) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - 2 \frac{dE_\omega}{dz} k \sin(kz - \omega t + \phi) = \mu_0 \frac{\partial^2 P^{NL}}{\partial t^2}$$

où on a sélectionné la direction de polarisation de  $P^{NL}$  correspondant à  $E_\omega$  et où on retiendra les termes de même fréquence  $\omega$ . Les deux premiers termes correspondent à une solution d'onde plane classique :

$$-k_\omega^2 E_\omega \cos(kz - \omega t + \phi) + \frac{\omega^2}{v^2} E_\omega \cos(kz - \omega t + \phi) = 0$$

d'où on retrouve  $\omega = \pm v k$  quel que soit  $E_\omega$ . Si plusieurs fréquences sont présentes on aura toujours la relation  $\omega_i = \pm v_i k_i$  car  $v$  dépend de  $\omega$ . Afin de décrire l'évolution de l'amplitude il reste comme dans les méthode de "variation des constantes", l'équation suivante :

$$2k \frac{dE_\omega}{dz} \sin(kz - \omega t + \phi) = -\mu_0 \frac{\partial P^{NL}}{\partial t^2}$$

Examinons le terme de source, il provient de

$$\vec{P}^{NL} = [d] \vec{E}_1 \vec{E}_2$$

où  $[d]$  représente un tenseur (3 lignes par 6 colonnes) qui transforme les composantes de

$$E_1 E_2 \begin{pmatrix} E_{1x} E_{2x} \\ E_{1y} E_{2y} \\ E_{1z} E_{2z} \\ E_{1y} E_{2z} + E_{1z} E_{2y} \\ E_{1z} E_{2x} + E_{1x} E_{2z} \\ E_{1x} E_{2y} + E_{1y} E_{2x} \end{pmatrix} \text{ en vecteur polarisation, et où les } E_i = E_{\omega_i} \cos(k_i z - \omega_i t + \phi_i).$$

L'aspect tensoriel ne nous intéresse pas pour l'instant, mais seulement la dépendance temporelle de la composante  $P_j$  située dans le plan de polarisation  $(x, y)$ . On suppose que  $d'$  est le coefficient "utile" du tenseur tel qu'on puisse en réduire les effets à :

$$P_j^{NL} = d' E_{\omega_1} \cos(k_1 z - \omega_1 t + \phi_1) E_{\omega_2} \cos(k_2 z - \omega_2 t + \phi_2)$$

$$P_j^{NL} = \frac{d'}{4} [\tilde{E}_{\omega_1} e^{i(k_1 z - \omega_1 t)} + cc] [\tilde{E}_{\omega_2} e^{i(k_2 z - \omega_2 t)} + cc]$$

où on a intégré les déphasages à l'origine dans les  $\tilde{E}_{\omega_i}$  et où  $cc$  évoque le complexe conjugué. On voit qu'il apparaît des termes en  $(\omega_1 + \omega_2)$  et en  $(\omega_1 - \omega_2)$  dans l'expression de  $P_j^{NL}$ .

Considérons dans un premier temps l'équation d'évolution du terme à  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  :

$$i \frac{d\tilde{E}_{\omega_3}}{dz} k_3 (e^{i(k_3 z - \omega_3 t)} - e^{i(k_3 z - \omega_3 t)}) = \mu_0 \omega_3^2 \frac{d'}{4} \{ \tilde{E}_{\omega_1} \tilde{E}_{\omega_2} e^{i[(k_1 + k_2)z - (\omega_1 + \omega_2)t]} + cc \}$$

qui peut se réduire à

$$k_3 \frac{d\tilde{E}_{\omega_3}}{dz} = -i \mu_0 \omega_3^2 \frac{d'}{4} \tilde{E}_{\omega_1} \tilde{E}_{\omega_2} e^{-i\Delta k z}$$

où  $\Delta k = k_3 - (k_1 + k_2)$ . Ainsi l'équation d'évolution de l'amplitude à  $\omega_3$  s'écrit :

$$\frac{d\tilde{E}_{\omega_3}}{dz} = -i \mu_0 \omega_3 v_3 \frac{d'}{4} \tilde{E}_{\omega_1} \tilde{E}_{\omega_2} e^{-i\Delta k z}$$

Dans un deuxième temps on peut considérer trois ondes en interaction :  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , alors les calculs mènent aux équations couplées suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{E}_{\omega_1}}{dz} &= -i \mu_0 \omega_1 v_1 \frac{d'}{4} \tilde{E}_{\omega_3} \tilde{E}_{\omega_2}^* e^{i\Delta k z} \\ \frac{d\tilde{E}_{\omega_2}}{dz} &= -i \mu_0 \omega_2 v_2 \frac{d'}{4} \tilde{E}_{\omega_3} \tilde{E}_{\omega_1}^* e^{i\Delta k z} \\ \frac{d\tilde{E}_{\omega_3}}{dz} &= -i \mu_0 \omega_3 v_3 \frac{d'}{4} \tilde{E}_{\omega_1} \tilde{E}_{\omega_2} e^{-i\Delta k z} \end{aligned}$$

Traditionnellement on introduit  $A_i = \sqrt{\frac{n_i}{\omega_i}} \tilde{E}_{\omega_i}$ , ainsi le vecteur de Poynting pour une onde  $\omega_i$  s'écrit :

$$|\vec{\mathbb{P}}_i| = \frac{|\tilde{E}_{\omega_i}|^2}{2Z_i} = \frac{1}{2} \omega_i \frac{|A_i|^2}{Z_v}$$

où  $Z_v = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ , impédance du vide.

Les  $|A_i|^2$  sont proportionnels au flux de photons :

$$\text{flux de photons} = \frac{\text{flux d'énergie}}{\text{énergie d'un photon}} = \frac{1}{2} \omega_i \frac{|A_i|^2}{Z_v} \frac{1}{\hbar \omega_i} = \frac{1}{2} \frac{|A_i|^2}{\hbar Z_v}$$

Si on introduit

$$\kappa = \frac{d'}{4} \sqrt{\frac{\mu_o \omega_1 \omega_2 \omega_3}{\varepsilon_o n_1 n_2 n_3}}$$

on obtient les équations couplées d'évolution des  $A_i$  :

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} &= -i\kappa A_2^* A_3 e^{i\Delta kz} \\ \frac{dA_2}{dz} &= -i\kappa A_3 A_1^* e^{i\Delta kz} \\ \frac{dA_3}{dz} &= -i\kappa A_1 A_2 e^{-i\Delta kz} \end{aligned}$$

À partir de ces équations on déduit les **relations de Manley-Rowe** :

$$\frac{d}{dz} |A_1|^2 = \frac{d}{dz} |A_2|^2 = -\frac{d}{dz} |A_3|^2$$

qui montrent qu'il faut prendre un photon à  $\omega_1$  et un photon à  $\omega_2$  pour créer un photon à  $\omega_3$ .

## 5.4 Génération de second harmonique

On se place dans le cas particulier où  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  et où  $\omega_3 = 2\omega$ , alors les équations d'évolution se résument à :

$$\begin{aligned} \frac{dA_\omega}{dz} &= -i\kappa A_\omega^* A_{2\omega} e^{i\Delta kz} \\ \frac{dA_{2\omega}}{dz} &= -i\kappa \frac{A_\omega^2}{2} e^{i\Delta kz} \end{aligned}$$

### 5.4.1 Conversion faible

On fait l'hypothèse que  $A_\omega(z) = A_\omega(0) = Cst$  qui revient à dire qu'il y a peu de signal créé à  $2\omega$  et qu'on peut donc négliger le nombre de photons "perdus" par le signal fondamental devant le nombre total de photons de ce signal.

• **À l'accord de phase** ( $\Delta k = 0$ ),  $k_{2\omega} = 2k_\omega$  soit  $\frac{2\omega}{c}n(2\omega) = 2\frac{\omega}{c}n(\omega)$  ou encore  $n(2\omega) = n(\omega)$ .

Il suffit de résoudre

$$\frac{dA_{2\omega}}{dz} = -i\kappa \frac{A_\omega^2}{2}$$

avec comme condition aux limites à l'entrée du cristal :  $A_{2\omega}(0) = 0$

On déduit :

$$A_{2\omega}(z) = -i\frac{\kappa}{2} A_\omega^2 z$$

et  $|A_{2\omega}|^2 = \frac{\kappa^2}{4} |A_\omega|^4 L^2$  à la sortie du cristal de longueur  $L$ .

• **Hors accord de phase**  $\Delta k = k_{2\omega} - 2k_\omega = \frac{2\omega}{c}n(2\omega) - \frac{2\omega}{c}n(\omega) = \frac{2\omega}{c} \Delta n$

La résolution de

$$\frac{dA_{2\omega}}{dz} = -i\kappa \frac{A_\omega^2}{2} e^{i\Delta kz}$$

conduit à :

$$A_{2\omega}(L) = -i\frac{\kappa}{2} A_\omega^2 \left[ \frac{e^{i\Delta kz}}{-i\Delta k} \right]_0^L = \frac{\kappa A_\omega^2}{2\Delta k} [e^{-i\Delta k L} - 1]$$

d'où

$$A_{2\omega}(L) = i \frac{\kappa A_{\omega}^2}{\Delta k} e^{-i\Delta k L/2} \sin \Delta k L/2$$

et en flux de photons :

$$|A_{2\omega}(L)|^2 = \frac{\kappa^2 A_{\omega}^4}{4} L^2 |\text{sinc}(\Delta k L/2)|^2$$

Le flux de photons oscille en  $\sin^2 \Delta k L/2$ , si on fait varier l'épaisseur on observe des franges de période  $L_c = \frac{2\pi}{\Delta k} = \frac{\lambda}{2\Delta n}$  où  $\Delta n = |n(2\omega) - n(\omega)|$ .

#### 5.4.2 Expérience des franges de MAKER

Il y a deux manières simples de faire varier l'épaisseur de matériau traversée par un faisceau : utiliser une lame prismatique qu'on déplace devant le faisceau ou bien incliner une lame à faces parallèles. C'est cette dernière qui est le plus communément choisie (MAKER) et qui produit des franges en

$$\sin^2\left(\frac{\Delta k L}{2 \cos \theta}\right)$$

Il faut noter que l'amplitude en  $\theta = 0$  n'est pas significative, que la "période" permet d'accéder à l'écart des indices et que l'amplitude maximum qui conduit au coefficient  $d'$  (par  $\kappa^2$ ) diminue lorsque  $\theta$  augmente en raison des pertes par réflexion (Fresnel) et par absorption (négligées dans nos calculs mais présentes dans la réalité expérimentale).

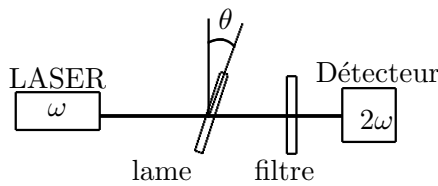


Figure 8 - Schéma du montage

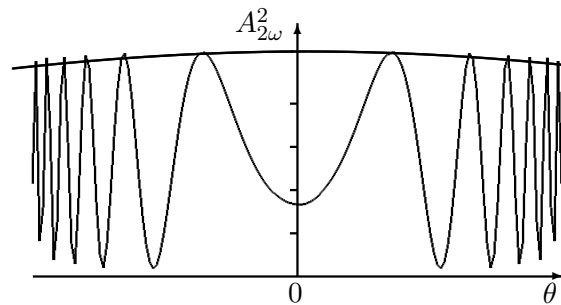


Figure 9 - Franges de MAKER

#### 5.4.3 Conversion forte

Lorsque le signal fondamental diminue notablement dans le cristal, on ne peut plus le négliger dans le calcul et il faut résoudre les équations couplées. Le calcul mène à une saturation de la génération de second harmonique qui se traduit par un terme en  $\tanh$  dans la solution :

$$A_{2\omega}(z) = i \frac{|A_o|}{\sqrt{2}} \tanh\left(\frac{\kappa |A_o| z}{\sqrt{2}}\right)$$

On constate que même avec un cristal infini - ce qui est très rare - on n'obtiendra jamais que  $\frac{|A_o|^2}{2}$  c'est à dire la moitié des photons présents à l'entrée. Ce résultat est conforme au fait qu'il faut deux photons à  $\omega$  pour "fabriquer" un photon à  $2\omega$ .

### 5.5 Amplification et oscillation paramétrique

On considère trois ondes en interaction par l'intermédiaire d'un milieu non-linéaire, avec  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . On distingue :

- le signal à amplifier ( $\omega_1$ )



- la “pompe” qui apporte l’énergie à  $\omega_3$
- le complémentaire (“idler”), signal qui apparaît à  $\omega_2$ .

On néglige les variations du signal de pompe :  $A_3(z) = A_3(0)$  qu’on peut fixer réel.

Il suffit de résoudre les équations couplées :

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dz} &= -i\kappa A_2^* A_3 e^{i\Delta kz} && \text{signal} \\ \frac{dA_2^*}{dz} &= i\kappa A_3^* A_1 e^{-i\Delta kz} && \text{complémentaire}\end{aligned}$$

En posant

$$g = \kappa A_3 = \sqrt{\frac{\mu_o \omega_1 \omega_2}{\epsilon_o n_1 n_2}} \frac{d'}{4} E_3(0)$$

on obtient simplement :

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dz} &= -ig A_2^* e^{i\Delta kz} \\ \frac{dA_2^*}{dz} &= ig A_1 e^{-i\Delta kz}\end{aligned}$$

À l’accord de phase, les solutions sont :

$$\begin{aligned}A_1(z) &= A_1(0) \cosh gz \\ A_2(z) &= -iA_1(0) \sinh gz\end{aligned}$$

On démontre qu’en dehors de l’accord de phase il suffit de remplacer  $g$  par  $\sqrt{g^2 - (\frac{\Delta k}{2})^2}$  pour obtenir les solutions à un terme de phase près. Comme  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ , on a :

$$|A_1|^2 - |A_2|^2 = |A_1(0)|^2$$

qui signifie que l’écart en nombre de photons entre signal et complémentaire reste constant et qui s’explique puisqu’un photon de la pompe à  $\omega_3$  donne deux photons, l’un à  $\omega_1$  (signal) et l’autre à  $\omega_2$  (complémentaire). Ce processus permet d’amplifier un signal à  $\omega_1$ , toutefois les gains sont assez faibles (typiquement  $g \simeq 0.3 \text{ cm}^{-1}$ ). Pour obtenir des résultats significatifs on place le cristal dans une cavité optique et on peut ainsi créer un oscillateur optique paramétrique -OPO- (cf Ch 4).

Il est critique de se rapprocher de l’accord de phase, mais on a vu que l’indice de tout matériau présentait de la dispersion et  $\Delta k = 0$  est impossible dans un milieu isotrope. Heureusement certains matériaux biréfringents permettent d’obtenir une même valeur d’indice pour des fréquences différentes en jouant sur les polarisations (ordinaire - extraordinaire). On conçoit alors que l’orientation du cristal modifie les conditions de l’accord de phase et donc les conditions d’oscillation. Ces aspects demandent une étude plus approfondie des matériaux non-linéaires biréfringents (non-isotropes), étude qui pourra se poursuivre en option de maîtrise...